# MATEMATIKA 1

1. domača naloga - REŠITVE

(1) (a) Naredimo običajen postopek dokazovanja z indukcijo. Pri tem upoštevamo, da je $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$.

(b) Naredimo običajen postopek dokazovanja z indukcijo. Pri tem upoštevamo, da je število $2^{2^n} - 1$ deljivo s 15 natanko tedaj, ko je $2^{2^n} - 1 = 15k$ za nek $k$. Izrazimo lahko $2^{2^{n+1}} - 1 = \left(2^{2^n}\right)^2 - 1 = (15k+1)^2 - 1$.

(2) Po Vietovih formulah je $-x_1 - x_2 = -3$, kar nam skupaj z $x_1 - x_2 + 5 = 0$ da $x_1 = -1$ in $x_2 = 4$. Torej je $a = x_1 x_2 = -4$.

(3) (a) Najmanjši element množice dobimo za $n = 1$, torej je minum in tudi infimum enak $\frac{1}{3}$. Zapišemo lahko $\frac{2n-1}{2n+1} = 1 - \frac{2}{2n+1}$, kar nam pove, da je supremum enak 1, maksimum pa ne obstaja.

(b) Ker je $x^2 + 1$ kvadratna funkcija s temenom v točki $(0, 1)$, lahko sklepamo, da sta minimum in infimum enaka 1, maksimum in supremum pa enaka $3^2 + 1 = 10$.

(4) (a) Kritični točki sta 1 in 3, zato razdelimo problem na 3 dele. Rešitev: $x < \frac{4}{3}$.

(b) Najprej rešimo notranjo absolutno vrednost. Kritična točka je 1. Rešitev: $-2 \leq x \leq 4$.

(5) (a) Zapišemo $z = x + yi$ in dobimo $2x = 2i$, kar pomeni, da enačba nima rešitve.

(b) Zapišemo $z = x + yi$ in dobimo rešitvi $z = i$ in $z = -i$.

(6) (a) Uporabimo polarni zapis in dobimo $w = |w|(\cos(\varphi_k) + i\sin(\varphi_k))$, pri čemer je $|w| = \sqrt[3]{8}, \varphi_1 = \frac{\pi}{4}, \varphi_2 = \frac{11\pi}{12}$ in $\varphi_3 = \frac{19\pi}{12}$.

(b) Označimo $w = \frac{1}{z-1}$ in opazimo, da dobimo zgornjo enačbo. Na koncu še izrazimo $z = 1 + \frac{1}{w}$.

(7) (a) Množica predstavlja premico z enačbo $y = \frac{x-1}{3}$.

(b) Množica predstavlja krožnico s središčem v točki $i - 2$ in polmerom 2.