

1. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU MATEMATIKA 1

Rokopis rešenih nalog pustite za asistenta pri vratarici na Jadranski 21, najkasneje do vključno s četrtkom, 26. novembra 2015. Na izdelke ne pozabite napisati imena, priimka in vpisne številke. Oddana domača naloga je pogoj za pristop k prvemu kolokviju. Rešitve bodo na spletni učilnici objavljene v petek, 27. novembra 2015.

1. Dokaži, da je število $13^{2n} + 6$ deljivo s 7 za vsak $n \in \mathbb{N}$.
2. S pomočjo matematične indukcije dokaži, da za vsak $x \neq -1, 1$ in vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$1 + 2x^2 + \dots + nx^{2(n-1)} + (n+1)x^{2n} = \frac{1 - (n+2)x^{2(n+1)} + (n+1)x^{2(n+2)}}{(x^2 - 1)^2}.$$

3. Reši neenačbi:

(a) $\frac{x}{x+2} > 2$

(b) $\frac{x^2 - 9}{x^2 - x - 2} < 1$

4. Reši neenačbo $|x^2 + |x - 2|| > |x - 1| + 1$.
5. (a) S pomočjo zvez $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$ in $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ izpelji zvezo

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}.$$

- (b) Izračunaj $\cos \frac{\pi}{8}$ in $\sin \frac{\pi}{8}$.
- (c) Poišči vse rešitve kompleksne enačbe

$$z^3 = -\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{5} + i \cdot \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{5}.$$

6. Poišči vse rešitve kompleksnih enačb:

(a) $z^4 = z$

(b) $z^3 = (\bar{z})^3$

Dobljene rešitve tudi skiciraj v kompleksni ravnini.

7. Polinom p , definiran s predpisom $p(x) = x^4 + x^3 - x^2 + x - 2$

- (a) Polinom p razcepi nad obsegom realnih števil.
- (b) Polinom p razcepi nad obsegom kompleksnih števil.

8. S predpisom $p(x) = x^4 - 6x^3 + 15x^2 - 18x + 10$ je podan polinom p .

- (a) Preveri, da je $1 - i$ ničla polinoma p .
- (b) Polinom p razcepi nad obsegom realnih števil.
- (c) Polinom p razcepi nad obsegom kompleksnih števil.

9. Preslikava $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je rotacija v pozitivni smeri za kot $\frac{\pi}{4}$ okoli koordinatnega izhodišča.

- (a) Obravnavaj injektivnost, surjektivnost in bijektivnost preslikave f .
- (b) Ugotovi, v kaj se s preslikavo f preslika trikotnik z oglišči $(1, 0)$, $(0, 1)$ in $(-1, 0)$.

10. Podano je zaporedje $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ s splošnim členom

$$a_n = \frac{2n^2 + 1}{n^2 + 2}.$$

- (a) Obravnavaj naraščanje in padanje zaporedja.
- (b) Ali je zaporedje omejeno?
- (c) Ugotovi ali obstajajo minimum, maksimum, infimum in supremum zaporedja. Tiste, ki obstajajo, tudi določi.