MATEMATIKA 1

2. domača naloga - REŠITVE

(1) Število S je stekališče zaporedja $\{a_n\}$, če za vsak $\epsilon > 0$ in vsako naravno število N obstaja tako naravno število $n > N$, da je $|a_n - S| < \epsilon$.
Število L je limita zaporedja $\{a_n\}$, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tako naravno število N, da za vse $n > N$ velja $|a_n - L| < \epsilon$.

(2) (a) Izraz v števcu in imenovalcu delimo z n^2. Stekališči sta $\frac{1}{2}$ in $\frac{-1}{2}$.
(b) Zaporedje ima limito (in zato edino stekališče) 0.
(c) Množica stekališč je enaka $\{-1, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, 1\}$.

(3) (a) V števcu in imenovalcu delimo z n^2. Limita je enaka $\frac{1}{2}$.
(b) Izraz v števcu in imenovalcu pomnožimo s $\sqrt{n^2 + n + 1} + n$. Limita je enaka $\frac{1}{2}$.
(c) Limito pretvorimo na limito tipa $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$. Limita je enaka e^4.

(4) Dokaz naraščanja in omejenosti poteka z indukcijo. Limita je enaka 2.

(5) Vrsta konvergira, če konvergira zaporedje njenih delnih vsot $s_k = \sum\limits_{n=1}^{k} a_n$.

(6) (a) Zaporedje členov vrste ne gre proti 0. Vrsta torej divergira.
(b) Uporabimo korenski kriterij, vrsta konvergira.
(c) Uporabimo kvocientni kriterij, vrsta konvergira.
(d) Uporabimo primerjalni kriterij, vrsto primerjamo s harmonično vrsto in tako ugotovimo, da divergira.
(e) Uporabimo Leibnizov kriterij. Absloutne vrednosti členov gredo monotono proti 0, vrsta torej konvergira.

(7) Funkcija je definirana na intervalu $[1, 5]$, njena zaloga vrednosti pa je interval $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Funkcija je injektivna, njen inverz pa je enak $f^{-1}(x) = 2\sin(x) + 3$.

(8) Predpisa se glasita $f(g(x)) = \frac{1}{\ln^2(\sqrt{x})}$ in $g(f(x)) = \ln\left(\frac{1}{|x|}\right)$. Definicijski območji pa sta enaki $D_f = (0, \infty) \setminus \{1\}$ in $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.