

REŠITVE 3. DOMAČE NALOGE

MATEMATIKA 1

2010/2011

1. Reši naslednji enaèbi

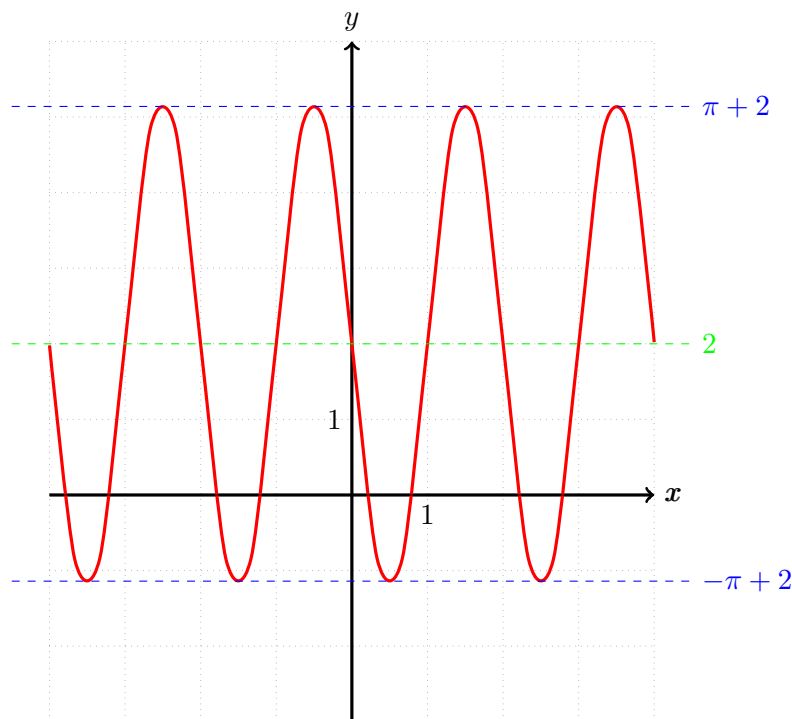
- $\ln x + \frac{6}{\ln(x^2)} = 4,$
- $4^x - 2^{x+2} + 4 = 0.$

Rešitev:

- Za novo spremenljivko vzamemo $t = \ln x$ in dobimo $x_1 = e, x_2 = e^3.$
- Za novo spremenljivko vzamemo $t = 2^x$ in dobimo $x = 1.$

2. Skiciraj graf funkcije f , dane s predpisom $f(x) = \pi \sin(\pi x + \pi) + 2.$

Rešitev:



3. Izračunaj odvode naslednjih funkcij.

- $e^{2x^2} + \frac{3}{\sqrt[3]{x}};$
- $(2x - 3\sqrt{x^2 - 2}) \sin(x);$
- $\frac{2 \sin(x)}{3x^2 + 6\sqrt{x} - \cos(2x)};$
- $\frac{(\sin^2(x) + x) \tan(3x^2)}{8x + x^{-2}};$

Rešitev: (Pozor: nekatere funkcije je možno odvajati na več načinov. Rezultati tako včasih izgledajo različni, čeprav so v resnici iste funkcije.)

- $e^{2x^2} \cdot 4x - x^{-4/3}$;
- $(2 - 3x(x^2 - 2)^{-1/2}) \sin(x) + (2x - 3\sqrt{x^2 - 2}) \cos(x)$;
- $$\frac{2 \cos(x)(3x^2 + 6\sqrt{x} - \cos(2x)) - 2 \sin(x)(6x + 3x^{-1/2} + 2 \sin(2x))}{(3x^2 + 6\sqrt{x} - \cos(2x))^2}$$

$$\frac{\left((2 \sin(x) \cos(x) + 1) \tan(3x^2) + (\sin^2(x) + x)(\cos^{-2}(3x^2)6x) \right) (8x + x^{-2}) - (\sin^2(x) + x)(\tan(3x^2))(8 - 2x^{-3})}{(8x + x^{-2})^2}$$

4. Izračunaj naslednji limiti:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin(x)}$. **Rešitev:** 2.
- $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln^3(x)$. **Rešitev:** 0.

5. Določi globalne ekstreme in zalogo vrednosti funkcije $f(x) = x^3 - 3x$ na intervalu $[-2, 3]$.

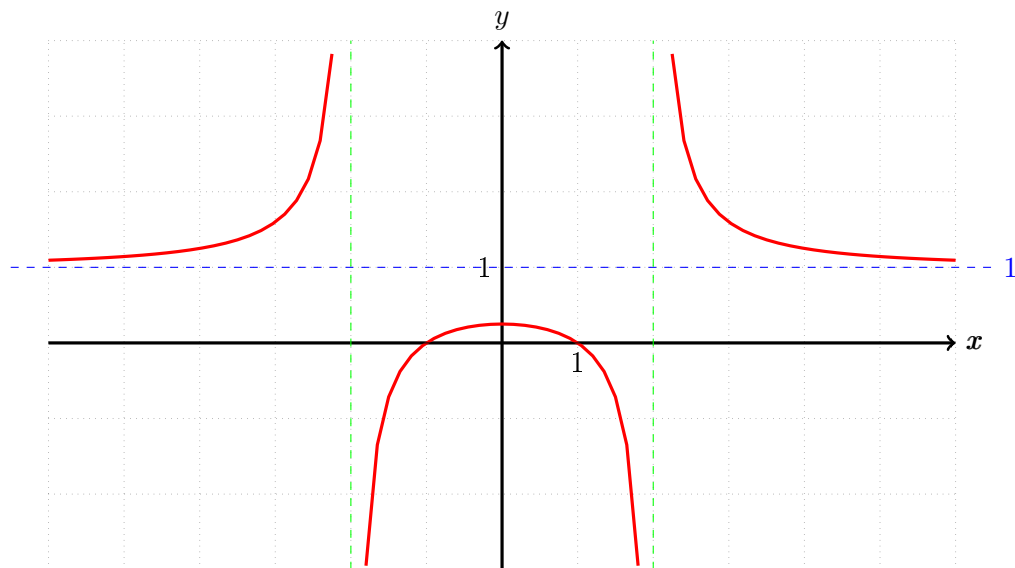
Rešitev: Maksimum: $(3, 18)$; minimum: $(1, -2)$ in $(-2, -2)$; zaloga vrednosti $[-2, 18]$.

6. Določi definicijsko območje, ničle, pole, ekstreme, asimptote, območja naraščanja in padanja ter konveksnosti in konkavnosti in nariši graf funkcije

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$$

Rešitev: $D_f = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$; ničli pri $x = -1$ in $x = 1$; pola pri $x = 2$ in $x = -2$; lokalni maksimum pri $x = 0$; prevojev ni; naraščanje na $(-\infty, 0)$, padanje na $(0, \infty)$; konveksnost na $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$, konkavnost na $(-2, 2)$; $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$;

$$f'(x) = -6 \frac{x}{(x^2 - 4)^2}, \quad f''(x) = 6 \frac{3x^2 + 4}{(x^2 - 4)^3}$$

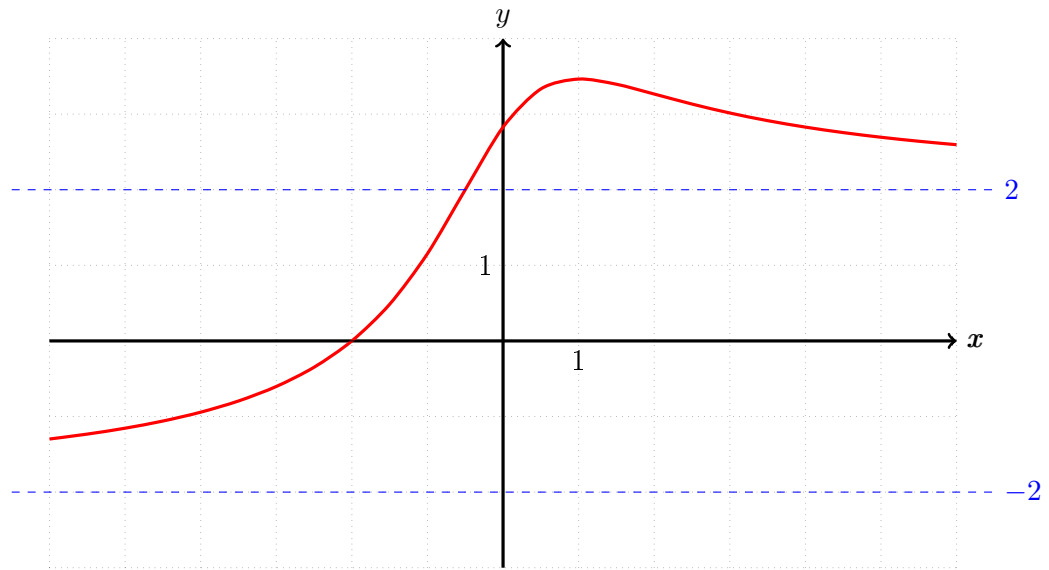


7. Določi definicijsko območje, ničle, ekstreme, asimptote, območja naraščanja in padanja ter konveksnosti in konkavnosti in nariši graf funkcije

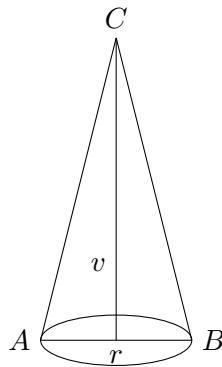
$$f(x) = \frac{2x + 4}{\sqrt{x^2 + 2}}.$$

Rešitev: $D_f = \mathbb{R}$; ničla pri $x = -2$; lokalni maksimum pri $x = 1$; prevoja pri $x = 2$ in $x = -1/2$; naraščanje na $(-\infty, 1)$, padanje na $(1, \infty)$; konveksnost na $(-\infty, -1/2) \cup (2, \infty)$, konkavnost na $(-1/2, 2)$; $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$;

$$f'(x) = -4 \frac{x - 1}{(x^2 + 2)^{3/2}}, \quad f''(x) = 4 \frac{2x^2 - 3x - 2}{(x^2 + 2)^{5/2}}.$$



8. Poišči števili a in b z vsoto 8, pri katerih je produkt ab največje možno število. **Rešitev:** $a = b = 4$.
9. Trikotnik $\triangle ABC$ je prerez pokončnega stožca z višino v in premerom osnovne ploskve r . Obseg trikotnika $\triangle ABC$ je 20 cm.



- Izrazi višino stožca v s premerom osnovne ploskve r .

- Zapiši formulo za prostornino stožca $V(r)$ kot funkcijo premera osnovne ploskve r .
- Kolikšna morata biti r in v , da bo prostornina največja možna?

Rešitev:

- $v = \sqrt{100 - 10r}$.
- $V(r) = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2\sqrt{100 - 10r}$.
- $r = 8\text{cm}, v = 2\sqrt{5}\text{ cm}$.

10. Izračunaj naslednje integrale:

- $\int 3x \sin(x^2 + 3)dx$;
- $\int (\pi\sqrt{x}e^{x^{3/2}} + xe^\pi)dx$;
- $\int x^3e^{2x}dx$;
- $\int \arccos(x + 1)dx$.

Rešitev:

- $\frac{-3}{2} \cos(x^2 + 3) + C$;
- $\frac{2\pi}{3}e^{x^{3/2}} + \frac{1}{2}e^\pi x^2 + C$;
- $\frac{1}{8}e^{2x}(4x^3 - 6x^2 + 6x - 3) + C$;
- $(x + 1) \arccos(x + 1) - \sqrt{-x(x + 2)} + C$.