REŠITEV 3. DOMAČIH NALOG

1. $y' = (2x^2 + x - 2)e^x$. V $x = 0$ dobimo $y(0) = 1$ in $y'(0) = -2$.

   Enačba tangente: $y = -2x + 1$

   Enačba normale: $y = \frac{x}{2} + 1$.

2. $y' = \frac{1}{x}$. Enačba tangente v točki (x_0, y_0): $y = \frac{x}{x_0} + y_0 - 1$. Tangenta gre skozi izhodišče natanko tedaj, ko $y_0 = 1$. Torej $y_0 = \ln(x_0) = 1$ in potemtakem $x_0 = e$. Enačba tangente se torej glasi $y = \frac{x}{e}$.

3. Presečišče krivulj v $x = 2$.

   1.krivulja: $y' = 3x^2 + 4x + 5$, $\tan\varphi_1 = y'(2) = 25$

   2.krivulja: $y' = 4x + 2$, $\tan\varphi_2 = y'(2) = 13$

   Kot med krivuljama:
$$\tan\varphi = \frac{\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2}{1 + \tan\varphi_1 \tan\varphi_2} = \frac{8}{326}$$

4. (a) $x_0 = 27$, $h = -0,2$ torej $\sqrt[3]{26,8} \approx \sqrt[3]{27} - \frac{1}{3} \cdot 27^{-\frac{2}{3}} \cdot 0,2 = 2,992592593$

   (b) $x_0 = 0$, $h = 0,01$, torej $\arctan(0,01) \approx \arctan(0) + \frac{1}{1+0^2} \cdot 0,01 = 0,01$

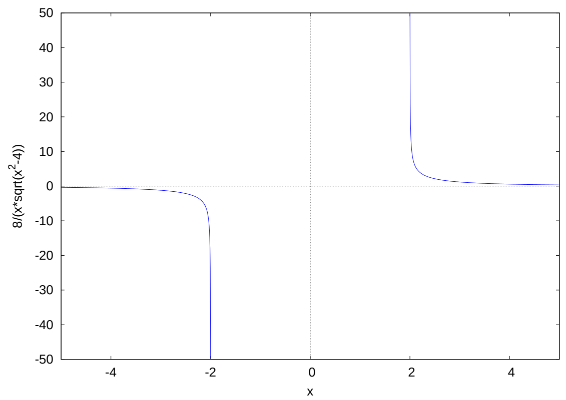
   (c) $x_0 = 0$, $h = -0,03$, torej $f(-0,03) \approx f(0) - \frac{\sqrt{1+0^2} - 0^2(1+0^2)^{-\frac{1}{2}}}{1+0^2} \cdot 0,03 = -0,03$

5. R =polmer krogle, $h = x+R$ =višina stožca, r =polmer osnovne ploskve stožca, prostornina=$V = \frac{\pi}{3}r^2h$. Povezava R, x, r preko Pitagorovega izreka v pravokotnem trikotniku: $R^2 = x^2 + r^2$. Torej $V = \frac{\pi}{3}(-x^3 - Rx^2 + R^2x + R^3)$. Stacionarni točki: $x_1 = \frac{R}{3}$, $x_2 = -R$, torej je maksimum v $x = \frac{R}{3} = \frac{1}{3}$. To nam da: $h = \frac{4}{3}$ in $r = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

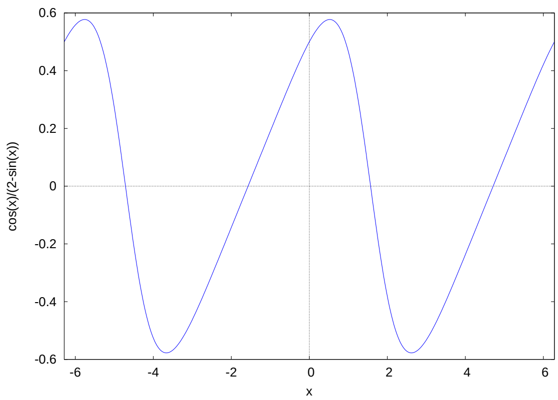
6. (a) $\lim_{x\to\infty} \frac{x\ln x}{x^2+1} = 0$

   (b) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{3}$

7. Definicijsko območje $D_f = (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$. Ničel ni. $f'(x) = \frac{-8(2x^2-4)}{x^2(x^2-4)^{3/2}}$ Ni lokalnih ekstremov in na D_f je $f' < 0$, torej je funkcija padajoča. $f''(x) = 16x^{-3}(x^2 - 4)^{-\frac{1}{2}} + 8x^{-1}(x^2-4)^{-\frac{3}{2}} + 24x(x^2-4)^{-\frac{5}{2}}$, zato je na $(-\infty, -2)$ funkcija konkavna, na $(2, \infty)$ konveksna. $\lim_{x\uparrow -2} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\downarrow 2} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$.



8. Definicijsko območje $D_f = \mathbb{R}$, ničle$=\{\frac{\pi}{2} + k\pi |\ k \in \mathbb{Z}\}$. $f'(x) = \frac{-2\sin x+1}{(2-\sin x)^2}$, $f''(x) = \frac{-6\cos x(1-\sin x)}{(2-\sin x)^3}$, torej lokalni ekstremi$=\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi |\ k \in \mathbb{Z}\}$. Na $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi]$ je funkcija padajoča, sicer naraščajoča. Funkcija konveksna na $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi]$, sicer konkavna. Funkcija je periodična s periodo 2π.



9. (a) $2\ln|x-1| + \frac{x^2+2x}{2} + C$
(b) $-\frac{1}{\ln|x|} + C$
(c) $\frac{e^{x^2}}{2} + C$
(d) $\frac{\ln\left(\frac{\sqrt{x^6-1}}{x^3}+1\right)}{6} - \frac{\ln\left(\frac{\sqrt{x^6-1}}{x^3}-1\right)}{6} + C$
(e) $2\sin(\sqrt{x}) + C$
(f) $\frac{(5x^2-3)^8}{80} + C$
(g) $-(x+1)e^{-x} + C$
(h) $\frac{x^3\ln|x|}{3} - \frac{x^3}{9} + C$
(i) $x\arccos(x) - \sqrt{1-x^2} + C$
(j) $2(\sqrt{x}\ln|x| - 2\sqrt{x})$