MATEMATIKA 1

3. domača naloga - REŠITVE

(1) Zaradi zveznosti je $\lim_{x\to-1} f(x) = f(-1)$ in $\lim_{x\to1} f(x) = f(1)$. To nam da $a = b = 1$.

(2) (a) $y' = \dfrac{(x+2)\cos(x) - (x+1)\sin(x)}{(x+1)^{\frac{3}{2}}}$,

(b) $y' = x^{\sin(x)}\left(\cos(x)\ln(x) + \dfrac{1}{x}\sin(x)\right)$,

(c) $y' = \dfrac{x-y}{x+y}$.

(3) $f^{(4)}(0) = 24$.

(4) Zaradi zveznosti je $a = \lim_{x\to0} f(x) = 0$. Odvod je za $x \neq 0$ enak $f'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$, za $x = 0$ pa dobimo po definiciji, da je $f'(0) = 0$. Ker $\lim_{x\to0} f'(x)$ ne obstaja, funkcija f' ni zvezna v točki 0.

(5) Izračunamo $y'(0) = 3$. Zato je smerni koeficient tangente enak 3, smerni koeficient normale pa $\frac{-1}{3}$. Ker gresta obe premici skozi točko $(0,4)$, je enačba tangente $y = 3x + 4$, enačba normale pa $y = \frac{-1}{3}x + 4$.

(6) Tangenta na krivuljo v točki x_0 je enaka $y = \frac{1}{x_0}x + (\ln(x_0) - 1)$. Ta tangenta gre skozi izhodišče natanko tedaj, ko je $x_0 = e$.

(7) Krivulji se sekata pri $x = 2$. Smerna koeficienta obeh tangent sta 25 in 13, zato je kot enak arctg(6/163).

(8) Uporabimo formulo, da je približek za $f(a+h)$ enak $f(a) + hf'(a)$.

(a) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $a = 8$, $h = 0,2$,

(b) $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$, $a = 0$, $h = 0,001$,

(c) $f(x) = e^x$, $a = 0$, $h - 0,03$.

(9) Kvadrat razdalje od točke $A(x, x^2+1)$ na paraboli do točke T je enak $(x-5)^2 + (x^2+1)^2$. S pomočjo odvoda izračunamo, da izraz lokalni ekstrem doseže pri $x = 1$, torej je razdalja najmanjša v točki $A(1,2)$.

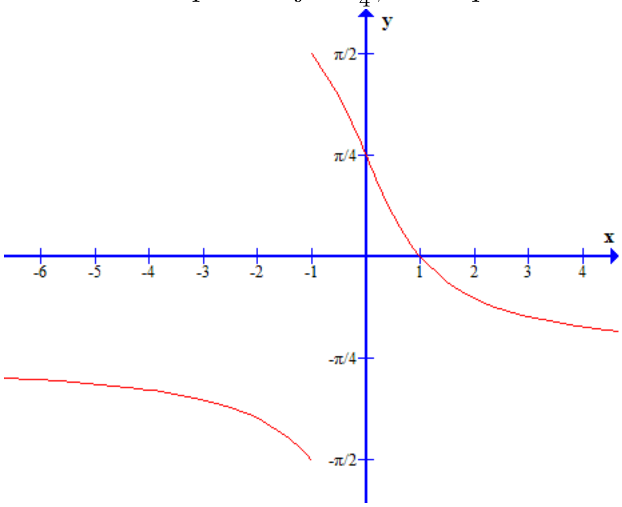
(10) (a) $\lim_{x\to0} \dfrac{\arcsin(x)}{\operatorname{tg}(x)} = 1$,

(b) Dvakrat uporabimo L'Hospitalovo pravilo in dobimo $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x\ln(x)}{x^2+1} = 0$,

(c) Izraz damo na skupni imenovalec, ga pomnožimo zgoraj in spodaj z x^2, nakar dobimo $\lim_{x\to0} \dfrac{x^2 - \sin^2 x}{x^4}$. Po trikratni uporabi L'Hospitalovega pravila dobimo rezultat $\frac{1}{3}$.

(d) Izraz preoblikujemo s pomočjo eksponentne funkcije in logaritma, kar nam da $\lim_{x\to\infty} (e)^{\frac{\ln x}{1-x}} = 1$.

(11) Funkcija je definirana povsod, razen v $x = -1$, ničlo ima v $x = 1$, povsod je padajoča, v neskončnosti se približuje $-\frac{\pi}{4}$, v -1 pa se z desne približuje $\frac{\pi}{2}$, z leve pa $-\frac{\pi}{2}$.



(12) Graf krivulje $r = \sqrt{\cos(2\varphi)}$: