MATEMATIKA 1

4. domača naloga - REŠITVE

(1) (a) Uvedemo novo spremenljivo $t = x^3 + 1$.
Rezultat: $\frac{2}{3}\sqrt{x^3+1}$.
(b) Integral rešimo per partes.
Rezultat: $\frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4}$.
(c) Izraz razcepimo na parcialne ulomke in integriramo vsak sumand posebej.
Rezultat: $\ln\frac{(x-2)(x+2)^2}{x}$.
(d) Polinoma zdelimo in okrajšamo.
Rezultat: $x - \frac{1}{x} - \ln|x|$.
(e) Pomnožimo izraz z $\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$, nato uporabimo nastavek za integrale tega tipa. Pri tem lahko upoštevamo, da je funkcija, ki jo integriramo, soda.
Rezultat: $\frac{x}{2}\sqrt{x^2+1} - \frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.
(f) Izraz pod korenom dopolnimo do popolnega kvadrata, uvedemo novo spremenljivo $t = x + \frac{1}{2}$ in izračunamo vsak integral posebej.
Rezultat: $2\sqrt{1+x+x^2} - 4\ln\left|x + \frac{1}{2} + \sqrt{1+x+x^2}\right|$.
(g) Uvedemo novo spremenljivko $t = \cos(x)$.
Rezultat: $\frac{\cos^{11}(x)}{11} - \frac{\cos^9(x)}{9}$.
(h) Zapišemo $\sin^2(4x) = \frac{1}{2}(1-\cos(8x))$ in integriramo.
Rezultat: $\frac{x}{2} - \frac{\sin(8x)}{16}$.

(2) (a) Uvedemo novo spremenljivko $t = x^3$.
Rezultat: $\frac{\pi}{12}$.
(b) Integriramo per partes.
Rezultat: π.

(3) (a) Izraz razcepimo na parcialne ulomke in integriramo vsak sumand posebej.
Rezultat: $\ln\sqrt{\left|\frac{x+1}{x+3}\right|}$.
(b) Vstavimo meje v zgornji izraz.
Rezultat: $\ln\sqrt{\left|\frac{b+1}{b+3}\right|} + \ln\sqrt{3}$.
(c) Limita zgornjega izraza, ko pošljemo b proti ∞ obstaja in je enaka $\ln\sqrt{3}$.

(4) (a) Postopamo podobno kot v prejšnji nalogi. Izlimitirani integral ne obstaja.
(b) Postopamo podobno kot v prejšnji nalogi. Izlimitirani integral obstaja.

(5) Izračunamo presečišči krivulj: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Ploščina je zato enaka $\int_0^1 (\sqrt[3]{x} - \sqrt{x})dx = \frac{1}{12}$.

(6) $V = \pi - \frac{\pi^2}{4}$.

(7) $P = \frac{\pi}{6}(\sqrt{125} - 1)$.

(8) (a) Izraz razcepimo na parcialne ulomke, razvijemo v vrsto vsakega posebej in nato vrsti seštejemo.
Rezultat: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2^n-1)}{2^n}x^n$, za $|x| < 1$.

(b) Funkcijo najprej odvajamo, uporabimo razvoj v binomsko vrsto, ki jo nato nazaj integriramo.

Rezultat: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \binom{-1/2}{n} x^{4n+2}$, za $|x| < 1$.

(9) Vrsta je alternirajoča, zato je napaka približka manjša od absolutne vrednosti prvega izpuščenega člena. Ker je $\frac{x^3}{3}$ za $x = \frac{1}{10}$ že manjše od 0,001, je dovolj vzeti samo prvi člen, torej je približek enak kar $\frac{1}{10}$.