Določeni integral

1. Izračunaj naslednja določena integrala.

   (a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 dx$,

   (b) $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^6+4}} dx$.

2. Izračunaj ploščino lika, ki ga omejujejo premice $x = -1$, $x = 1$ in $y = 1$ ter graf funkcije $y = x^2$.

3. Izračunaj ploščino lika, ki ga omejujeta grafa funkcij $y = \frac{x^2}{2}$ in $y = \frac{1}{x^2+1}$.

4. Izračunaj ploščino lika, ki ga omejujeta grafa funkcij $y = 1$ in $y = 2\cos^2 x$ nad intervalom $[0, \frac{\pi}{2}]$.

5. Izračunaj ploščino lika, ki ga omejujeta premica $y = e$ in graf funkcije $y = x\ln x$ nad intervalom $[1, e]$.

6. Z uvedbo nove spremenljivke v določenem integralu dokaži, da velja

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^1 \frac{1}{\arccos x} dx.$$

7. Izračunaj ploščino območja znotraj elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

8. Podan je določeni integral

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{x+1}.$$

   (a) Direktno izračunaj I.

   (b) S pomočjo trapezne metode izračunaj I $(n = 4)$.

   (c) S pomočjo Simpsonove metode izračunaj I $(n = 4)$.

   (d) Kakšen mora biti n, da se bo integral od rezultata, ki ga dobimo po trapezni metodi največ razlikoval za $0,00001$?

9. Izračunaj prostornino telesa, ki ga dobiš tako, če zavrtiš omejeni lik, ki ga omejujeta funkciji $y = x$ in $y = 2x - x^2$ okrog osi x.

10. Izračunaj površino vrtenine, ki jo dobiš tako, če graf funkcije $y = \sin x$ zavrtiš okrog osi x na intervalu med dvema zaporednima ničlama.

11. Izračunaj dolžino grafa funkcije $f(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ za $x \in [0, 1]$.

12. V polarnih koordinatah je podana krivulja $r(\varphi) = \cos\varphi$. Krivuljo skiciraj in izračunaj ploščino in obseg območja, ki ga omejuje.

13. Krivulja je podana parametrično

$$\vec{r}(t) = (2t - t^2, 4 - t^2).$$

   Skiciraj to krivuljo!

14. Skiciraj krivuljo $(x^2 + y^2) = a^2(x^2 - y^2)$ in izračunaj ploščino lika, ki ga omejuje.

15. Izračunaj dolžino krivulje, ki je podana parametrično

$$\vec{r}(t) = (t, \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}})$$

za $t \in [0, 1]$.

16. Ugotovi, ali konvergira vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2(n)}.$$