

FUNKCIJE

1. Ali so funkcije $f(x) = 2\ln x$, $g(x) = \ln x^2$ in $h(x) = 2\ln|x|$ enake?
2. Ugotovi, ali so naslednje funkcije injektivne, surjektivne ali bijektivne.
 - (a) $f : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$,
 - (b) $f : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \cos x$,
 - (c) $f : [0, 2\pi] \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$,
 - (d) $f : [0, 2\pi] \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \cos x$,
 - (e) $f : [0, \pi] \rightarrow [0, 1]$, $f(x) = \sin x$,
3. Določi definicijsko območje funkcije $f(x) = \ln(e^{2x^3} - 1)$. Ali je f injektivna na D_f ?
4. Določi definicijsko območje funkcije naslednjih funkcij.

(a) $f(x) = \ln\left(\arcsin \frac{x+2}{5-x}\right)$,

(b) $f(x) = \sqrt{\ln \frac{2x-1}{x+1}}$.

5. Podana je funkcija $f(x) = \sqrt{2x-1} - 1$. Poišči njeno definicijsko območje D_f , zalogo vrednosti Z_f in skiciraj njen graf. Ali je $f : D_f \rightarrow Z_f$ bijektivna funkcija? Ali obstaja inverzna funkcija funkcije f ? Če obstaja, jo poišči in skiciraj še njen graf.
6. Podana je funkcija

$$f(x) = \frac{1}{e^x - 1}.$$

Določi njeno definicijsko območje, zalogo vrednosti in skiciraj njen graf. Poišči tudi k funkciji f inverzno funkcijo.

7. Poišči definicijsko območje funkcije

$$f(x) = \sqrt{\ln(x^2 + x - 5)}$$

in skiciraj njen graf.

8. Skiciraj grafe naslednjih funkcij.

(a) $f(x) = 2\sin^2(x + \pi) + 1$,

(b) $f(x) = 3\operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{2}) + 1$,

(c) $f(x) = \arccos \frac{x+1}{2} - \pi$,

9. Naj bosta $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funkciji. Dokaži naslednje trditve.

(a) Če sta f, g injektivni, potem je $f \circ g$ injektivna.

(b) Če sta f, g surjektivni, potem je $f \circ g$ surjektivna.

(c) Če sta f, g bijektivni, potem je $f \circ g$ bijektivna.

(d) Če sta f, g naraščajoči, potem je $f \circ g$ naraščajoča.

(e) Če sta f, g padajoči, potem je $f \circ g$ naraščajoča.

(f) Če je ena funkcija naraščajoča, druga pa padajoča, potem je $f \circ g$ padajoča.

10. Naj bosta $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funkciji. Dokaži naslednje trditve.

(a) Če je $f \circ g$ surjektivna, potem je f surjektivna. Ali velja tudi obratno?

(b) Če je $g \circ f$ injektivna, potem je f injektivna. Ali velja obratno?

11. Dani sta funkciji $f(x) = \frac{1}{x^2}$ in $g(x) = \ln\sqrt{x}$. Zapiši $f \circ g$ in $g \circ f$ in izračunaj njuni definicijski območji.

12. Naj bo $f(x) = \sin x$ in $g(x) = |x|$. Izračunaj in skiciraj grafe funkcij $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ g \circ f$ in $g \circ f \circ g$.

13. Podana je funkcija $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$. Izračunaj

$$f_n(x) := \underbrace{(f \circ \dots \circ f)}_n(x).$$

(Nasvet: izračunaj f_2, f_3 in f_4 . Kaj opaziš? Splošno formulo dokaži z indukcijo.)

14. Definirajmo funkciji

$$\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{in} \quad \operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Dokaži naslednje trditve.

(a) Funkcija sh (ch) je liha (soda).

(b) Funkcija $\operatorname{ch} : [0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ je bijektivna. Določi njeno inverzno funkcijo.

(c) $\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(y)$,

(d) $\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y)$,

(e) $\operatorname{ch}^2(x) = 1 + \operatorname{sh}^2(x)$.

15. Poišči bijekcije med naslednjimi množicami.

(a) \mathbb{N} in $2\mathbb{N}$,

(b) \mathbb{N} in \mathbb{Z} ,

(c) $(0, 1)$ in (a, b) ,

(d) $[a, b]$ in $[c, d]$,

(e) \mathbb{N} in $\mathbb{N} \times \{1, 2\}$,

(f) $(0, 1)$ in $(1, \infty)$.

16. Dokaži, da so naslednje množice ekvipotentne. $[0, 1]$, $[0, 1)$, $(0, 1]$ in $(0, 1)$.