Limite in zveznost funkcij

1. Po definiciji izračunaj
$$\lim_{x\to 1}\sqrt{x}.$$

2. Izračunaj naslednje limite.

   (a) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x+6}{x^4-2}$,

   (b) $\lim_{x\to}\frac{x^3-x^2+2x+4}{2x^3-x^2+2x+12}$,

   (c) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$,

   (d) $\lim_{x\to 4}\frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$,

   (e) $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{13+x}-4}{x-3}$,

   (f) $\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x^2-1}$,

   (g) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5\sin x)}{\sin(5x)}$,

   (h) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{(x-\pi)^2}$,

   (i) $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{a}\quad(a>0)$,

   (j) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos(a+x)-\cos a}{x}$,

   (k) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

3. Po definiciji dokaži, da je funkcija $f(x)=\sqrt{x}$ zvezna na $[0,\infty)$.

4. Funkcija f je podana s predpisom
$$f(x)=\begin{cases} x^2+x+a & : \quad x<1 \\ bx & : \quad x\geq 1 \end{cases}.$$
Določi vse take možne pare (a,b), da bo funkcija f zvezna povsod.

5. Funkcija f je podana s predpisom
$$f(x)=\begin{cases} x^2+x+a & : \quad x<0 \\ 2x & : \quad 0\leq x<1 \\ \cos(x-b) & : \quad x\geq 1 \end{cases}.$$
Določi a in b tako, da bo funkcija f zvezna povsod. Skiciraj graf funkcije f.

6. Funkcija f je podana s predpisom
$$f(x)=\begin{cases} \mathrm{arctg}x & : \quad |x|>1 \\ \arcsin(x)+b & : \quad |x|\leq 1 \end{cases}.$$
Določi a in b tako, da bo funkcija f zvezna povsod. Skiciraj graf funkcije f

7. Dokaži, da ima enačba
$$\sin x - x = -2$$
rešitev na intervalu $[0,5]$.

8. Naj bo $f : [0, 1] \to [0, 1]$ zvezna funkcija. Dokaži, da obstaja $x \in [0, 1]$, da je $f(x) = x$. Nasvet: Oglej si funkcijo $g(x) = f(x) - x$. Če $f(0) \neq 0$ in $f(1) \neq 1$, potem $f(0) > 0$ in $f(1) < 1$. Kaj lahko poveš o predznaku števil $g(0)$ in $g(1)$?

9. Dokaži, da je naraščajoča funkcija, definirana na realni osi, zvezna povsod razen v števno mnogo točkah. Nasvet: Naj bo $\mathcal{N}$ množica vseh točk, kjer je f nezvezna. Naj bosta a in b ($a < b$) točki nezveznosti naraščajoče funkcije f. Tedaj obstaja tako racionano število r_a, da je $f(a_-) < r_a < f(a_+)$. Na podoben način izberimo racionalno število r_b. Tedaj je

$$r_a < f(a^+) \leq f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq f(b_-) < r_b.$$

Oglej si funkcijo $g : \mathcal{N} \to \mathbb{Q}$, definirano s predpisom $g(c) = r_c$. Dokaži, da je g injektivna. Odtod sklepaj, da je $\mathbb{N}$ največ števno neskončna.