Odvod in njegova uporaba

1. Odvajaj naslednje funkcije.

   (a) $f(x) = x^3 - \frac{12}{x^7} + 2\sqrt[5]{x} - \frac{6}{x^{-2}} + 8x^{\frac{3}{2}} - 2x + x^{14} + x^e + 1$,

   (b) $f(x) = (x^\pi + \sqrt{x})(x^2 - 3x^{-\frac{3}{7}})$,

   (c) $f(x) = \frac{x^3-3x+2}{x^2+7x-1}$,

   (d) $f(x) = \cos^3 x$,

   (e) $f(x) = \cos^2 x \cos 2x$,

   (f) $f(x) = x^3 \cos(1-5x^2)$,

   (g) $f(x) = x^x$,

   (h) $f(x) = x^{x^x}$,

   (i) $f(x) = \ln(x^2-1)$,

   (j) $f(x) = \ln \frac{\sqrt[3]{2x^3+3x^2}}{\sqrt{x+x^3}}$,

   (k) $f(x) = \frac{x \sin x}{2^x + \mathrm{tg} x}$,

   (l) $f(x) = (\cos x)^{\sin x}$,

   (m) $f(x) = \arcsin(e^x)$,

   (n) $f(x) = e^{\arcsin x}$,

2. Izračunaj višje odvode funkcij:

   (a) $f(x) = \sin(3x)$, $f^{(51)}(x)$,

   (b) $f(x) = x^2 e^{-x}$, $f^{(10)}(x)$,

   (c) $f(x) = \frac{1}{x}$, $f^{(n)}(x)$,

   (d) $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$, $f^{(n)}(x)$.

3. S pomočjo diferenciala približno oceni vrednost naslednjih izrazov.

   (a) $\ln(0.9)$,

   (b) $\sqrt{\frac{0.9}{1.1}}$,

4. Zapiši enačbi tangente in normale na graf funkcije

$$f(x) = (2x^2 - 3x + 1)e^x$$

   v točki $T(0, y_0)$.

5. Poišči vse točke, v katerih je tangenta na parabolo $y = x^2 - 7x + 3$ vzporedna premici $5x + y - 3 = 0$.

6. Dana je funkcija $f(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$. Poišči kot, pod katerim se sekata tangenti na graf funkcije v njegovih presečiščih z abscisno osjo.

7. Poišči enačbi tangente in normale na krivuljo $y^4 - 4x^4 - 6xy = 0$ v točki $(1, 2)$.

8. Določi in klasificiraj stacionarne točke funkcije $f(x) = x^2 e^x$. Določi globalne ekstreme funkcije f na intervalu $[-4, 3]$.

9. V krog s polmerom R včrtaj pravokotnik z največjo ploščino.

10. V ravnini je krog s polmerom R. V zgornji polkrog včrtaj tak trapez z največjo možno ploščino, katere daljša osnovnica ima za krajišči točki $(R, 0)$ in $(-R, 0)$.

11. Naj bo $0 < p < 1$. Naj bo $x > 0$ poljuben. Iz točke (x, y) na grafu funkcije $f(x) = \ln x$ izstrelimo kroglico v smeri tangente na krivuljo proti ordinatni osi s hitrostjo x^p. Poišči točko na krivulji, od koder bo izstrelek najhitreje priletel do ordinatne osi.

12. V centru jezera, ki ima obliko kvadrata s stranico $2a$, je plavalec, ki bi rad prispel v desnji zgornji kot jezera. Pod kakšnim kotom glede na stranico naj plava, da bo najhitreje na cilju, če plava s hitrostjo 3 km/h, po bregu pa hodi s hitrostjo 6 km/h.

13. S pomočjo Lagrangejevega izreka dokaži, da za poljubni realni števili x in y velja

$$|\mathrm{arctg} x - \mathrm{arctg} y| \leq |x - y|.$$

14. Natančno skiciraj grafe naslednjih funkcij.

    (a) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$,
    (b) $f(x) = e^x - x - 1$,
    (c) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$.

15. Izračunaj naslednje limite.

    (a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$,
    (b) $\lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{e^x}$, kjer je p poljuben polinom,
    (c) $\lim_{x\to 1}(1 - x)\mathrm{tg}(\frac{\pi x}{2})$,
    (d) $\lim_{x\to 0}(1 - \cos x)\mathrm{ctg} x$,
    (e) $\lim_{x\to 0} x^2 \ln x$.