Odvod in njegova uporaba

1. Odvajaj naslednje funkcije.

   (a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + x\frac{1}{2} - \frac{3}{7}x^\pi$,

   (b) $f(x) = x^2 + 2^x$,

   (c) $f(x) = \frac{a^x - x^y}{\sqrt{a^x+1}}$,

   (d) $f(x) = x^4 e^{x^3-1}$,

   (e) $f(x) = \frac{x^2-2x+4}{x^3-3x-1}$,

   (f) $f(x) = \frac{\cos^2 x - \sin(2x)}{e^x+1}$,

   (g) $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$,

   (h) $f(x) = \ln(x - \sqrt{x}) \cdot \cos(\ln x - 1)$,

   (i) $f(x) = cos^n x \sin^m x$,

   (j) $f(x) = \frac{1}{\cos^2(x+\sqrt{x})}$,

   (k) $f(x) = e^{\cos x} \cdot \cos(e^x + x^2)$,

   (l) $f(x) = \frac{x^2 - \ln x}{1-e^x}$,

   (m) $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$,

   (n) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$,

   (o) $f(x) = \ln(\ln(\ln(\cdots(\ln x))))$, kjer v funkciji f nastopa n naravnih logaritmov,

   (p) $f(x) = (1-x)^{\frac{x}{x^2+1}}$,

   (q) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^3+1} e^{\frac{a^x-1}{\cos(4x)+\sin^2 x}}$,

   (r) $f(x) = e^{x^2} + 3x - 130$,

   (s) $f(x) = \mathrm{arctg}\sqrt{x}$,

   (t) $f(x) = \sqrt{\mathrm{arctg} x}$,

   (u) $f(x) = \sin(\ln x)$,

   (v) $f(x) = \ln(\sin x)$.

   Opomba: da boste lažje utrdili odvajanje funkcij, so tipi funkcij med seboj premešani in nujno ne sledijo vrstnemu redu funkcij in metod odvajanj z vaj.

2. Izračunaj višje odvode funkcij:

   (a) $f(x) = \cos(2x)$, $f^{(2014)}(x)$,

   (b) $f(x) = x^3 e^x$, $f^{(6)}(x)$,

   (c) $f(x) = \frac{1}{x^n}$, $f^{(n)}(x)$, kjer n naravno število,

   (d) $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$, $f^{(n)}(x)$.

3. S pomočjo diferenciala približno oceni vrednost naslednjih izrazov.

   (a) $\sqrt[3]{200}$,

   (b) $\sqrt[3]{1.01}$,

(c) $(4.03)^3$,

(d) $(4.01)^2 - \sqrt{3.99}$,

(e) $\mathrm{arctg}(0.02)$.

4. Izračunaj odvod funkcije f v točki $x = 2$, če veš, da je $f(2) = 3$ in točka $(4, 5)$ leži na tangenti na graf funkcije v točki $x = 2$.

5. Poišči tiste tangente na graf funkcije $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$, ki so vzporedne premici $y = 9x + 2$.

6. Dana je funkcija $f(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$. Poišči kot, pod katerim se sekata tangenti na graf funkcije v njegovih presečiščih z abscisno osjo.

7. Pod kakšnim kotom krivulja $y = \mathrm{tg}x$ seka abscisno os?

8. Pod kakšnim kotom se sekata krivulji $y = x^2$ in $y = x^3$?

9. Pod kakšnim kotom se sekata krivulji $y = x^2 + 2x + 3$ in $y = x^2 + 5x + 7$?

10. Pod kakšnim kotom se sekata krivulji $y = x^3 + 2x^2 + 5x - 6$ in $y = 2x^2 + 5x + 2$?

11. Izračunaj odvod implicitno podane funkcije $y = y(x)$.

    (a) $x^2 + y^3 + 2y^2 + 2xy = 1$,

    (b) $\ln y + e^{xy^2} = x$,

    (c) $x^y = y^x$.

12. Določi in klasificiraj stacionarne točke funkcije $f(x) = xe^{x^2}$. Določi globalne ekstreme funkcije f na intervalu $[-4, 3]$.

13. Določi in klasificiraj stactionarne točke funkcije $f(x) = \sin^3 x$.

14. V elipso
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
včrtaj pravokotnik z največjo ploščino.

15. V ravnini je krog s polmerom R. V zgornji polkrog včrtaj tak trapez z največjo možno ploščino, katere daljša osnovnica ima za krajišči točki $(R, 0)$ in $(-R, 0)$.

16. Naj bo $0 < p < 1$. Naj bo $x > 0$ poljuben. Iz točke (x, y) na grafu funkcije $f(x) = \ln x$ izstrelimo kroglico v smeri tangente na krivuljo proti ordinatni osi s hitrostjo x^p. Poišči točko na krivulji, od koder bo izstrelek najhitreje priletel do ordinatne osi.

17. S pomočjo Lagrangejevega izreka dokaži, da za poljubni negativni realni števili x in y velja
$$|e^x - e^y| \leq |x - y|.$$

18. Natančno skiciraj grafe naslednjih funkcij.

    (a) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$,

    (b) $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$,

(c) $f(x) = \ln(x^2 - 1)$,

(d) $f(x) = xe^x$,

(e) $f(x) = e^x - e^{-x}$,

19. Poišči enačbi tangente in normale na krivuljo $y^2 = x^3 \ln y + x$ v točki $(1, 1)$.

20. Določi konstanti a in b tako, da bo funkcija

$$f(x) = \begin{cases} -\mathrm{arctg}\frac{1}{x} & : \ x > 0 \\ ax + b & : \ x \leq 0 \end{cases}$$

odvedljiva.

21. Izračunaj naslednje limite.

(a) $\lim_{x \to 1}(1 - x)\mathrm{tg}(\frac{\pi x}{2})$,

(b) $\lim_{x \to \infty} \frac{x \ln x}{x^2 + 1}$,

(c) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right)$,

(d) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$,