

ZAPOREDJA

1. Poišči vsa stekališča zaporedja $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, podanega s splošnim členom

(a) $a_n = \frac{(-1)^n \sin(n)}{n+1}$,

(b) $a_n = 1 + (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$.

2. Podano je zaporedje $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ s splošnim členom

$$a_n = \frac{n^2}{1+n}.$$

(a) Obravnavaj naraščanje in padanje zaporedja $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

(b) Obravnavaj omejenost zaporedja $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

(c) Ali zaporedje $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira?

3. Podano je zaporedje $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ s splošnim členom

$$a_n = \frac{1-n^2}{1+n^2}.$$

(a) Obravnavaj naraščanje in padanje zaporedja $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

(b) Obravnavaj omejenost zaporedja $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

(c) Ali zaporedje $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira? Izračunaj $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

4. Po definiciji preveri, da velja:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{2n+1} = \frac{1}{2}$,

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{n^2+n} = 1$.

V obeh primerih določi kateri členi zaporedja se razlikujejo od limite za največ $\frac{1}{10}$.

5. Podano je zaporedje $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ s splošnim členom

$$a_n = \frac{1}{1+n^2}.$$

(a) Izračunaj $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

(b) Po definiciji dokaži, da je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

6. Izračunaj naslednje limite.

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3n-2}$,

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+3n-5}{1-4n^2}$,

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n+2}$,

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3-2n^2+n+6}{n^2(n+1)}$,

(e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n^2+3n+1}-\sqrt{n^2+1}}{n}$,

(f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-n}{\sqrt{4n^4+n^2-1}}$,

- (g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^5 + 2n + n^2}}{\sqrt{n+1}(n^2 + 3n - 1)},$
 (h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 6^n - 7^{n+1}}{48 \cdot 7^{n-1} - 5^n},$
 (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 2^{n+1}}{2^{n+3} - 2^{n-1}}.$

7. Izračunaj naslednje limite.

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2(\sqrt{n^2 - 1} - n^3)),$
 (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 7n + 1} - n}{\sqrt{n^2 + 2n} - n},$
 (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-5}}{\sqrt{n-3} - \sqrt{n+1}}.$

8. Dano je zaporedje s prvim členom $a_1 = 0$ in rekurzivno formulo

$$a_{n+1} = \frac{3a_n + 2}{5}.$$

Pokaži, da je zaporedje monotono in omejeno in izračunaj njegovo limito.

9. Dano je zaporedje z rekurzivno formulo

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 1}.$$

Pokaži, da je zaporedje konvergentno za poljubno izbiro prvega člena in izračunaj njegovo limito. Naj bo $a_1 = a$ prvi člen zaporedja. Določi splošni člen zaporedja $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

10. Dano je zaporedje s prvima členoma $a_1 = 0$ in $a_2 = 1$ in rekurzivno formulo

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n-1}},$$

za $n \geq 2$. Pokaži, da je zaporedje monotono in omejeno in izračunaj njegovo limito.

11. Naj bo a poljubno pozitivno realno število. Dano je zaporedje

$$a_n = \underbrace{\sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{\dots}}}}}_n.$$

Določi a_1, a_2 in a_3 . Dokaži, da zaporedje $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira in izračunaj njegovo limito.

12. Izračunaj naslednji limiti.

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n+5}\right)^{n+1},$
 (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+n-4}{n^2+n-3}\right)^{n^2+n+5}.$

13. Izračunaj limiti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n+1]{n} \quad \text{in} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+1}.$$