

1. kolokvij iz OVS (16.4.2010)

Pri reševanju nalog ni potrebno izračunati numeričnih vrednosti binomskih simbolov, potenc in ekponentne funkcije (primer: rezultat lahko pustite v obliki $1 - \frac{\binom{10}{3}2^5}{e^{10}}$).

1. Aleš ima v predalu 10 črnih nogavic, 4 bele in 1 nogavico z vzorcem (ta je brez para). Zjutraj iz predala na slepo vzame dve nogavici.
 - (a) Kakšna je verjetnost, da je izvlekel par črnih nogavic?
 - (b) Kakšna je verjetnost, da je dobil dve nogavici iste barve?
 - (c) Vzel je dve nogavici in nima para iste barve. S kakšno verjetnostjo bo v rokah držal par, če iz predala vzame še tretjo nogavico?

Rešitev:

$$(a) p = \frac{\binom{10}{2}}{\binom{15}{2}}$$

$$(b) p = \frac{\binom{10}{2}}{\binom{15}{2}} + \frac{\binom{4}{2}}{\binom{15}{2}}$$

$$(c) A: \text{dve nogavici, brez para. } B: \text{tri nogavice s parom. Zanima nas } P(B|A). P(A) = \frac{10 \cdot 4}{15 \cdot 14} + \frac{10 \cdot 1}{15 \cdot 14} + \frac{4 \cdot 1}{15 \cdot 14}. P(A \cap B) = \frac{10 \cdot 4}{15 \cdot 14} \left(\frac{9}{13} + \frac{3}{13} \right) + \frac{10 \cdot 1}{15 \cdot 14} \frac{9}{13} + \frac{4 \cdot 1}{15 \cdot 14} \frac{3}{13}. P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

2. Vržemo tri poštene kocke. Označimo z A dogodek, da vsaj na dveh izmed treh kock pade šestica.
 - (a) Kakšna je verjetnost dogodka A ?
 - (b) Kakšna je verjetnost, da se v dvajsetih ponovitvah poskusa dogodek A zgodi vsaj trikrat?
 - (c) Koliko je pričakovano število metov, ki jih potrebujemo, da se zgodi dogodek A ? Kakšna je verjetnost, da se dogodek A ne zgodi v prvih desetih metih?

Rešitev:

$$(a) p = 3 \left(\frac{1}{6} \right)^2 - 2 \left(\frac{1}{6} \right)^3 = \frac{2}{27}$$

$$(b) p = 1 - \left(\left(\frac{25}{27} \right)^{20} + \binom{20}{1} \left(\frac{2}{27} \right) \left(\frac{25}{27} \right)^{19} + \binom{20}{2} \left(\frac{2}{27} \right)^2 \left(\frac{25}{27} \right)^{18} \right)$$

$$(c) E = \frac{27}{2}, p = \left(\frac{25}{27} \right)^{10}.$$

3. Poleg poštenih trgovin se odpirajo tudi poštene igralnice. V njih se igrajo zgolj takšne igre, pri katerih je pričakovani dobiček enak 0. Da bodo bolj zanimivi za obiskovalce sestavljajo posebno igro s srečkami, pri kateri bo vsaka srečka stala 1€. Polovica srečk bo praznih, šestina pa jih bo

prinašala dobiček 3€. Koliko srečk z dobitkom za 1€ in koliko srečk z dobitkom za 6€ naj natisnejo, da bo igra poštena?

Rešitev: Rešiti je potrebno sistem enačb $\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{6} \cdot 3 + p_1 \cdot 1 + p_6 \cdot 6 = 1$ in $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + p_1 + p_6 = 1$. Rešitev je $p_1 = \frac{3}{10}$ in $p_6 = \frac{1}{30}$.

4. Slučajni spremenljivki X in Y sta podani s porazdelitveno shemo

$X \backslash Y$	0	1
0	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$
4	$\frac{1}{15}$	c

- (a) Določi konstanto c .
- (b) Določi porazdelitvi slučajnih spremenljivk X in Y . Ali sta slučajni spremenljivki neodvisni?
- (c) Izračunaj kovarianco $K(X, Y)$.

Rešitev:

(a) $c = \frac{1}{5}$.

(b) $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{3} & \frac{4}{15} \end{pmatrix}$, $Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$. Spremenljivki sta nista neodvisni ($P(X = 0, Y = 0) \neq P(X = 0)P(Y = 0)$).

(c) $K(X, Y) = 0$.