Rešitve kolokvija iz OVS z dne 4. 6. 2010

FRI – visoki strokovni program

1. Enakomerna porazdelitev na predpisanem intervalu pomeni, da so slučajne spremenljivke X_i porazdeljene zvezno z gostoto:

$$g(x) = \begin{cases} 1/2 & ; -1 < x < 1 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} .$$

Sledi:

$$E(X_i) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x \, \mathrm{d}x = \frac{x^2}{4}\Big|_{-1}^{1} = 0 \,, \quad D(X_i) = E(X_i^2) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{x^3}{6}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{3} \,.$$

Sledi $E(\bar{X}) = 0$ in $D(\bar{X}) = 1/300$. Po centralnem limitnem izreku približno velja:

$$P(-0^{\cdot}05 < \bar{X} < 0^{\cdot}05) \approx \Phi\left(\frac{0^{\cdot}05 - 0}{\sqrt{1/300}}\right) - \Phi\left(\frac{-0^{\cdot}05 - 0}{\sqrt{1/300}}\right) = 2\Phi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \doteq 0^{\cdot}6135 \,.$$

Točen rezultat: $0^{\cdot}612988$.

2. a) Trditev sledi iz dejstva, da je $g(x) \geq 0$ za vsak x in še:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) \, \mathrm{d}x = \int_{1}^{\infty} \frac{2}{1 + x)^3} \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{(1+x)^2}\Big|_{1}^{\infty} = 1 \,.$$

b) Če z F označimo pripadajočo kumulativno porazdelitveno funkcijo, za $x \geq 1$ velja:

$$F(x) = \int_{1}^{x} \frac{2}{1 + t)^3} \, \mathrm{d}t = 1 - \frac{1}{(1+x)^2} \,.$$

95. percentil je tisto število x, ki reši enačbo $F(x) = 0^{\cdot}95$, to pa je:

$$x = \sqrt{\frac{1}{1 - 0^{\cdot}95}} - 1 \doteq 3^{\cdot}472 \,.$$

3. $n = 30, \quad k = 6, \quad \hat{p} = k/n = 0^{\cdot}2, \quad c = z_{0.95} = \Phi^{-1}(0^{\cdot}45) \doteq 1^{\cdot}645,$

$\Delta = \sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \doteq 0^{\cdot}121.$

Interval zaupanja: $(\hat{p} - \Delta, \hat{p} + \Delta) \doteq (7^{\cdot}9\%, 32^{\cdot}1\%)$.

4. a) $P(X > 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X > 2) = 1 - \dfrac{5}{2e} \doteq 0^{\cdot}0803.$

b) $\chi^2 \doteq 5^{\cdot}67, \quad df = 3, \quad K_\alpha = [7.82, \infty)$.

Hipoteze ne moremo zavrniti.