Integral

Nedoločeni integral

Nedoločeni integral je operacija, ki deluje obratno kot odvajanje. To pomeni, da je nedoločeni integral funkcije f enak tisti funkciji F, katere odvod je enak dani funkciji f. Nedoločeni integral funkcije f označimo $\int f(x)\,dx$. Torej velja:

$$\int f(x)\,dx = F(x) \quad \Leftrightarrow \quad F'(x) = f(x)$$

Funkcijo F, ki jo dobimo kot rezultat integriranja, imenujemo primitivna funkcija.
Ker je odvod konstanete enak 0, lahko primitivni funkciji prištejemo poljubno konstanto, pa bo njen odvod še vedno enak $f(x)$.
To pomeni, da je rezultat nedoločenega integrala določen samo do aditivne konstante natančno. Zato tudi v zapisu rezultata običajno dodamo člen $+C$, torej:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Osnovna pravila integriranja

$$\int A\,f(x)\,dx = A\int f(x)\,dx$$

$$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (\text{za vsak } n \in \mathbb{R},\ n \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C$$

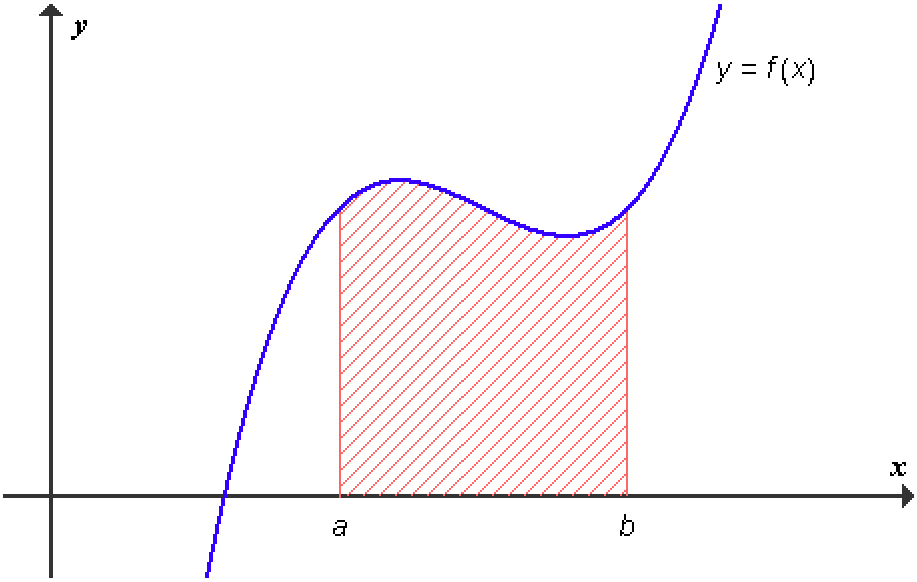
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \operatorname{arc\,tg} x + C$$

Določeni integral

Imejmo funkcijo f, ki je na intervalu $[a, b]$ nenegativna. Izračunati želimo ploščino lika, ki ga omejuje graf funkcije f skupaj z abscisno osjo in z navpičnima premicama $x = a$ in $x = b$.

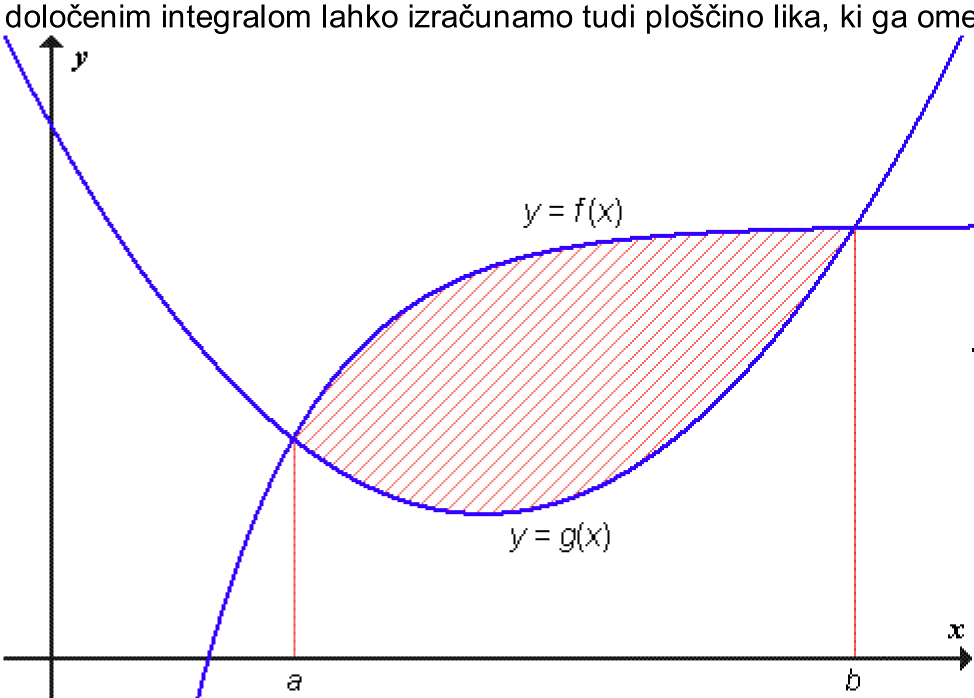


Izkaže se, da je ploščina tega lika enaka $S = F(b) - F(a)$, pri čemer je funkcija F enaka nedoločenemu integralu dane funkcije f.
Zato se odločimo, da definiramo določeni integral funkcije f na intervalu $[a, b]$ z **Newton-Leibnizevo formulo**:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \qquad \text{pri čemer je } F(x) = \int f(x)\,dx$$

Če je funkcija f na intervalu $[a, b]$ pozitivna ali enaka 0, je vrednost določenega integrala enaka ploščini lika, ki ga na tem intervalu omejujeta graf funkcije f in abscisna os.
Če je funkcija na tem intervalu negativna, je rezultat določenega integrala enak nasprotni vrednosti ploščine ustreznega lika.

Z določenim integralom lahko izračunamo tudi ploščino lika, ki ga omejujeta grafa dveh funkcij:



$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$