# Osnove verjetnosti in statistika

Gašper Fijavž

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

Ljubljana, 9. april 2010

## "Limita" binomske porazdelitve

Naj velja $X \sim b(n, p)$.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^k \approx \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(k-np)^2}{2np(1-p)}\right)$$

## “Limita” binomske porazdelitve

Opazujmo vse “binomske” porazdelitve z matematičnim upanjem $a$ in disperzijo $\sigma^2$. Te porazdelitve se približujejo zvezno porazdeljeni slučajni spremenljivki $X$ z gostoto verjetnosti enako . . .

## Normalna porazdelitev

Slučajna spremenljivka $X$ je porazdeljena *normalno* z matematičnim upanjem $a$ in disperzijo $\sigma^2$, $X \sim N(a, \sigma)$, če ima gostoto porazdelitve enako

$$g_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Slučajna spremenljivka $Z$ je porazdeljena *standardno normalno*, $Z \sim N(0, 1)$, če ima gostoto

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

## Normalna porazdelitev

$E(N(a, \sigma)) = a$ in $D(N(a, \sigma)) = \sigma^2$

## Normalna porazdelitev

**Trditev**

*Če* $X \sim N(a, \sigma)$ *in* $Z = \dfrac{X - a}{\sigma}$, *potem je* $Z \sim N(0, 1)$.

*Naloga:* Izračunaj $P(\alpha \leq X \leq \beta)$.

# Normalna porazdelitev

*Zgled:* Naj bo $X$ porazdeljena normalno z upanjem $E(X) = 10$ in deviacijo $\sigma(X) = 2$. Določi $P(9 \leq X \leq 12)$.

# Porazdelitvena funkcija

Naj bo $X$ *zvezno porazdeljena* slučajna spremenljivka.

*Porazdelitvena funkcija $F_X(x)$* slučajne spremenljivke $X$ je definirana s predpisom

$$F_X(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} g_X(t)dt,$$

pri čemer je $g_X(x)$ gostota verjetnosti spremenljivke $X$.

## Uporaba tabelice za $\Phi$

*Naloga:* Naj bo $Z \sim N(0,1)$. Izračunaj

- $P(Z \leq 1/2)$, $P(Z \leq 3/2)$ in $P(Z \leq 2)$.
- $P(Z \geq 1)$, $P(Z \geq 2)$ in $P(Z \geq -1/2)$.
- $P(1 \leq Z \leq 2)$
- $P(1/2 \leq Z \leq 5/2)$
- $P(-1 \leq Z \leq 5/2)$

## Centralni limitni izrek

### Izrek

*Naj bo $X_1, X_2, X_3, X_4, \ldots$ zaporedje neodvisnih slučajnh spremenljivk, ki so vse enako porazdeljene z matematičnim upanjem $E(X_i) = a$ in $D(X_i) = \sigma^2$.*

*Opazujemo slučajno spremenljivko $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.*

*Velja $E(S_n) = n \cdot a$ ter $D(S_n) = n \cdot \sigma^2$ in $\sigma(S_n) = \sigma\sqrt{n}$ .*

*Za $S_n$ velja*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)} < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

## Centralni limitni izrek

nadaljevanje...

$\dfrac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)}$ je razporejena *približno* kot $N(0,1)$

$S_n$ je razporejena *približno* kot $N(na, \sigma\sqrt{n})$

## Centralni limitni izrek

*Naloga:* 10000-krat vržemo kocko. Kolikšna je verjetnost, da je šestica padla vsaj 1680-krat?

## Centralni limitni izrek

*Naloga:* Kovanec vržemo 1000-krat. Oceni verjetnost, da bo število grbov med 400 in 600.

Poišči tak (čimmanjši) simetrični interval $I$ okrog pričakovane vrednosti, da bo verjetnost, da število grbov pripada $I$ vsaj $0,99$.

## Centralni limitni izrek

*Naloga:* Tovarna računalnikov ocenjuje, da se v prvih dveh letih, ko traja garancija, pokvari 10% njihovih računalnikov. V Avstralijo prodajo 1000 računalnikov. Oceni verjetnost, da se jim bo v garancijskem roku pokvarilo

(a) več kot 120 računalnikov,

(b) med 110 in 130 računalnikov.