Osnove verjetnosti in statistika

Gašper Fijavž

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

Ljubljana, 26. februar 2010

Poskus in dogodek

Kaj je poskus?

- Vržemo kovanec.
- Petkrat vržemo kovanec.
- Zakotalimo kocko.
- Iz kompleta kart izberemo dve karti.
- Kupimo srečko.

Poskus in dogodek

Kaj je dogodek?

- Pri metu kovanca pade grb.
- Pri petih metih kovanca večkrat pade cifra.
- Na kocki pade sodo število pik.
- Obe izbrani karti sta figuri.
- Srečka zadane.

Poskus in dogodek

Kaj je verjetnost dogodka?
Verjetnost, da se dogodek pri izbranem poskusu zgodi.

Verjetnost, statistična definicija

Izberemo poskus G in dogodek D. Poskus velikokrat ponovimo.

- N ... število ponovitev poskusa
- k ... število ponovitev poskusa, ki so *ugodni* za dogodek D

Opazujemo kvocient

$$\frac{k}{N}$$

Zgled

Poskus: vržemo dve *pošteni* kocki.

Kolikšna je verjetnost, da

- je obakrat isto število pik.
- sta na kockah različni števili pik.
- je vsota pik enaka 7.

Zgled

Poskus: iz kupa *52 kart* izberemo dve.

Kolikšna je verjetnost, da

- sta karti iste barve.
- da v drugo dobimo močnejšo karto.

Kaj pa, če prvo karto vrnemo v kup, preden izvlečemo drugo?

Formalizirajmo

- *poskus* . . . množica G
- *dogodek* . . . podmnožica $D \subseteq G$

Verjetnost dogodka

Statistična definicija:

$$P(A) \sim \frac{k}{N}$$

Verjetnost dogodka

Klasična definicija

$$G = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$$

$$p_i = P(\{a_i\})$$

$$\sum_{i=1}^{k} p_i = \sum_{a_i \in G} P(\{a_i\}) = 1$$

$$A \subseteq G \qquad P(A) = \sum_{a_i \in A} P(\{a_i\}) = \sum_{a_i \in A} p_i$$

Računanje z dogodki

A	dogodek
$\overline{A}$	nasprotni dogodek
$A \cap B$	presek dogodkov
$A \cup B$	unija dogodkov
N	nemogoč dogodek
G	gotov dogodek

Računanje z dogodki

Izrek

- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$

Dogodka A in B sta *nezdružljiva*, če je $A \cap B = N$.

Izrek

- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Zgled

Poskus: Iz kupa 52 kart izvlečemo eno karto, jo vrnemo, premešamo in izvlečemo še eno.

Dogodki:

A	...	prva karta je rdeča
B	...	prva karta je črna
C	...	druga karta je rdeča
D	...	prva karta je figura
E	...	druga karta je figura
F	...	obe karti sta črni figuri
H	...	vsaj ena karta je črna figura
I	...	obe karti sta črni
J	...	natanko ena karta je figura

Zgled

Naj velja

$$
\begin{aligned}
P(A \cap B) &= \tfrac{1}{4} \\
P(A \cup B) &= \tfrac{7}{8} \\
P(\overline{A}) &= \tfrac{5}{8}
\end{aligned}
$$

Izračunaj: $P(A), P(B), P(A \cap \overline{B}), P(\overline{B})$.

Pogojna verjetnost

Naj bo $P(B) > 0$. S $P(A|B)$ označimo *verjetnost, da se zgodi A, pri pogoju, da se je zgodil B*.

Izrek

Če je $P(B) > 0$, potem velja

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Zgled

Poskus: Vržemo dve kocki.

Dogodka:

A ... vsota pik je 7 ali 8

B ... z drugo kocko vržemo (strogo) več pik

Neodvisni dogodki

Dogodka A in B sta *neodvisna*, če velja

- $P(A) = P(A|B)$
- $P(B) = P(B|A)$

Izrek

Dogodka A in B sta neodvisna natanko tedaj, ko je

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Zgledi

Poskus: Izvlečemo karto.

Dogodki:

C	...	izvlečemo črno
K	...	izvlečemo kralja
F	...	izvlečemo figuro

Poskus: Vržemo kocko.

Dogodki:

A	...	vržemo 6
B	...	vržemo 1
C	...	vržemo liho
D	...	vržemo 1 ali 6
E	...	vržemo 1 ali 5

Popoln sistem dogodkov

Družina dogodkov $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k$ je *popoln sistem dogodkov*, če je

- $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k = G$
- $A_i \cap A_j = N$, za vse $i \neq j$.

Dvofazni poskus

1. faza Nastopi natanko ena od *hipotez* $H_1, H_2, \ldots, H_k$.
2. faza Opazujemo dogodek A.

Zanima nas: $P(A)$.
Poznamo: $P(H_1), P(H_2), \ldots, P(H_k)$ in
$P(A|H_1), P(A|H_2), \ldots, P(A|H_k)$

Formula o (po)polni verjetnosti

Izrek (Formula o (po)polni verjetnosti)

Naj bo $H_1, H_2, \ldots, H_k$ *popoln sistem dogodkov. Potem je*

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + \ldots P(H_k)P(A|H_k).$$

Formula o (po)polni verjetnosti

Naloga: Kocko vržemo dvakrat. Kolikšna je verjetnost dogodka, da v drugo vržemo (strogo) več pik kot prvič?

Bayesov obrazec

Izrek (Bayesov obrazec)

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)}$$

Bayesov obrazec

Naloga: Pri kocki smo v drugo dejansko vrgli več pik kot v prvem metu. Kolikšna je verjetnost, da smo v prvem poskusu vrgli 1 piko?

Detektor laži

Naloga: Na sodišču laže 1% prič, vse priklopimo na detektor laži.
Če priča laže, detektor ugotovi laž v 98% primerov.
Če priča govori resnico, detektor ugotovi laž v 1% primerov.
Kolikšna je verjetnost, da priča laže, če detektor to pokaže?

Testiranje redke bolezni

povzeto po *Mudd Math Fun Facts*
V povprečju zboli le $\frac{1}{10000}$ ljudi.
Test, ki je na voljo, je 99% natančen. Zmoti se v 1% zdravih primerov (pokaže bolezen) in v 1% bolnih primerov (zavrne okužbo).
Kolikšna je verjetnost, da smo bolni, če je test pozitiven?

Predavanja in študenti

Na predavanja hodi 60% študentov.
Če študent hodi na predavanja, naredi izpit v 90% primerov. Če ne hodi, samo v 10% primerov.
Kolikšna je verjetnost, da je slučajno izbrani *pozitivni* študent hodil na predavanja?

Zaporedja neodvisnih poskusov

- *Velikokrat* ponovimo isti poskus.
- Vsakič se zgodi dogodek A z *enako verjetnostjo* p.
- Dogodek A je v vsakem poskusu neodvisen od prejšnjih izidov.

Bernoullijev obrazec

S $P(n; p; k)$ označimo *verjetnost*, da se pri

- n ponovitvah poskusa
- natanko k-krat zgodi dogodek A ,
- katerega verjetnost v enem poskusu je enaka p.

Izrek

$$P(n; p; k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{(n-k)}$$

Naloge:

1. Kovanec vržemo $10\times$. Kolikšne so verjetnosti dogodkov, da grb pade 0-krat, 1-krat, 2-krat, *vsaj* 3-krat?
2. Kolikrat moramo vreči kocko, da z verjetnostjo vsaj $0,99$ pričakujemo, da bo padla vsaj ena šestica?
3. V učilnici je 10 računalnikov. Verjetnost, da je posamezen računalnik pokvarjen, je enaka $0,1$. Kolikšna je verjetnost, da bo vsaj 9 računalnikov delalo?