Fakulteta za računalništvo in informatiko,
2. letnik VSP, smer Programska Oprema

OSNOVE VERJETNOSTI IN STATISTIKA

Avditorne vaje

šolsko leto 2003/2004

1.) 10 bratov ima v omari 20 nogavic (10 parov) od tega 4 bele pare in 6 črnih parov. V sobi ugasnemo luč in bratje v temi obujejo nogavice. Na koliko različnih načinov lahko obujejo te nogavice?

X – tisti, ki imajo 2 beli nogavici – 2X, 0Y
Y – tisti, ki imajo 2 črni nogavici – 0X, 2Y
Z – tisti, ki imajo 1. nogavico belo, 2. nogavico črno – 1X, 1Y
W – tisti, ki imajo 1. nogavico črno, 2. nogavico belo – 1X, 1Y

Zapišemo tri enačbe s štirimi neznankami:

a) X + Y + Z + W = 10
b) 2X + Z + W = 8
c) 2Y + Z + W = 12

Pri tem velja, da so X, Y, Z in W elementi množice naravnih števil.

Enačbi a in c lahko zanemarimo, saj ni ne spremenita – osredotočimo se na enačbo »b« na podlagi katere lahko zapišemo možne porazdelitve v obliki tabele:

X	Z	W	Št.porazdelitev	Skupaj porazdelitev
4	0	0	1	
3	1	1		
3	0	2	3	
3	2	0		
2	0	4		
2	1	3		
2	2	2	5	
2	3	1		
2	4	0		
1	0	0		
1	1	5		
1	2	4		
1	3	3	7	25
1	4	2		
1	5	1		
1	0	0		
0	0	8		
0	1	7		
0	2	6		
0	3	5		
0	4	4	9	
0	5	3		
0	6	2		
0	7	1		
0	8	0		

2.) Dekle ima v omari 12 kap in 3 klobuke. Na koliko načinov si lahko izbere pokrivalo?

Glede na to, da naenkrat lahko nosi le eno pokrivalo – ali kapo ali klobuk, je rešitev 12 + 3 = 15

3.) Nace ima 4 puloverje, 2 srajci in troje hlače. Na koliko načinov se lahko obleče, če gre vedno napravljen v ene hlače, en pulover in eno srajco?

1. način:
(vse troje) + (pulover in srajica) + (srajico in hlače) + (pulover in hlače) + pulover + srajica + hlače

$$(4 \cdot 2 \cdot 3) + (4 \cdot 2) + (2 \cdot 3) + (4 \cdot 3) + 4 + 2 + 3 = 60$$

2. način:
uvedemo »nevidna« oblačila – predpostavimo, da ima lahko oblečeno še eno »nevidno« oblačilo. V tem primeru lahko izračunamo:

$$5 \cdot 3 \cdot 4 = 60$$

4.) Olga zna skuhati 4 juhe, 2 glavni jedi in 1 sladico. Koliko različnih jedilnikov lahko pripravi?

$$4 \cdot 2 \cdot 1 = 8$$

5.) Peter je sprevodnik na progi s 7 postajami. Na vsaki karti, ki jo proda, je napisana vstopna ter izstopna postaja. Koliko različnih kart mora imeti na prodaj?

Vstop – 7 možnosti
Izstop – 7 -1 = 6 možnosti

Skupaj – 42 različnih kompletov kart

6.) Koliko različnih besed lahko dobimo iz črk naslednjih besed: (pomen besed ni pomemben)

a) REZKA

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

b) STANISLAV

Ker se črki S in A ponavljajo, moramo upoštevati, da se lahko ponavljajo na dva različna načina. Tako dobimo:

$$\frac{9!}{2! \cdot 2!} = \frac{9!}{4} = 90720$$

c) BANANA

$$\frac{6!}{3! \cdot 2!} = 60$$

7.) V razredu zna 12 učencev lepo peti, 7 pa jih obvlada matematiki. Koliko učencev imamo v razredu?

Ker imamo premalo podatkov, lahko rečemo le, da je v razredu najmanj 12 učencev. Sicer pa je lahko teoretično v tem razredu neskončno učencev.

8.) V razredu vsak učenec obiskuje vsaj enega od krožkov. Od tega 15 učencev obiskuje modelarski krožek, 21 jih obiskuje likovni krožek, trije pa obiskujejo oba krožka. Koliko je učencev v razredu?

To izračunamo po formuli: $\boxed{|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|}$

Torej je število učencev enako: 15 + 21 – 3 = 33

9.) Na šoli imamo 100 učencev. Od tega je 28 košarkarjev, 30 rokometašev in 42 nogometašev. 8 učencev igra košarko in nogomet, 10 jih igra košarko in rokomet, 5 jih igra rokomet in nogomet, trije pa igrajo vse tri športe. Koliko je učencev na šoli, ki se ne ukvarjajo z nobenim od športov?

Učence označimo z:
A – košarkarji
B – rokometaši
C – nogometaši

Dalje vzamemo formulo: $\boxed{|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|}$

To lahko preoblikujemo v:

$$\begin{aligned} & |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C| = \\ & = |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)| = \\ & = |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \end{aligned}$$

V to vstavimo podatke: $28 + 30 - 8 + 42 - 10 - 5 + 3 = 80$

To pomeni, da se 80 učencev ukvarja s športom – iz tega izračunamo, da se 100-80=20 učencev ne ukvarja z nobenim športom.

10.) Imamo 52 kart in 4 igralce. Karte se delijo in vsak dobi 13 kart.

a) Kakšna je verjetnost, da vsak dobi samo karte ene barve (pik, karo, srce, križ)?

$$P = \frac{4!}{\frac{52!}{(13!)^4}} = \frac{4! \cdot (13!)^4}{52!} = 0{,}4474 \cdot 10^{-24}$$

b) Kakšna je verjetnost, da ima kdorkoli vsaj 2 asa?
Trditev lahko zanikamo in sicer tako, da izračunamo verjetnost, da ima vsak natanko enega asa. To lahko potem izračunamo po formuli:

$$\boxed{P(A) = 1 - P(\overline{A})}$$

tako dobimo:
$$P = 1 - 0{,}105 = 0{,}895$$

11.) V posodi imamo B belih in R rdečih kroglic. Ven vlečemo po eno kroglico brez vračanja, dokler posoda ni prazna. Kakšna je verjetnost, da rdečo kroglico izvlečemo v K+1 koraku?

Imamo B + R različnih prostih mest (izven posode). Tako je lahko različnih razporeditev – na koliko načinov lahko iz B + R mest izberemo B mesta enaka: $\binom{B+R}{B}$

Iz tega lahko nastavimo formulo: $P = \dfrac{\binom{(B-K)+(R-1)}{B-K}}{\binom{B+R}{B}}$

12.) V posodi imamo 8 belih, 4 črne in 2 rdeči kroglici. Kakšna je verjetnost, da so vse tri različne, če vlečemo kroglice:

a) z vračanjem
b) brez vračanja

a) z vračanjem

$$P(1.bela, 2.črna, 3.rdeč) = \frac{8 \cdot 4 \cdot 3}{14^3}$$

$$P(1.rdeč, 2.bela, 3.črna) = \frac{2 \cdot 8 \cdot 4}{14^3}$$

Iz tega vidimo, da lahko zapišemo splošno formulo:

$$P(vse\_razl.) = 3!\frac{8 \cdot 4 \cdot 2}{14^3}$$

b) brez vračanja
Formulo za to lahko zapišemo takole:

$$P = 3!\frac{8 \cdot 4 \cdot 2}{14 \cdot 13 \cdot 12}$$

Enako formulo lahko zapišemo tudi z uvedbo binomskega simbola:

$$P = \frac{8 \cdot 4 \cdot 2}{\binom{14}{3}} = \frac{8 \cdot 4 \cdot 2}{\frac{14 \cdot 13 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3}}$$

POGOJNA VERJETNOST

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

13.) Na slepo izberemo število iz množice {1,2,3…,21}. Kakšna je verjetnost, da je izbrano število deljivo s 3?

Že »na pamet« vidimo, da je ta verjetnost enaka 1/3.

Kakšna pa je verjetnost, da je število deljivo s 3, pogojno sodo?

Najprej določimo dve množici:

- števila, deljiva s 3, ki so soda: {6, 12, 18} – 3 števila
- števila, ki so soda: {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14,16, 18, 20} – 10 števil

Iz tega lahko zaključimo, da je verjetnost enaka 3/10

14.) V posodi imamo 4 bele in 6 rdečih kroglic. Izlečemo dve kroglici brez vračanja.
a) Kakšna je verjetnost, da bomo potegnili dve beli kroglici, pogojno da bo 1. bela?
b) Kakšna je verjetnost, da bosta obe beli, pogojno 2. bela?
c) Kakšna je verjetnost, da bosta obe beli, pogojno vsaj ena bela?
d) Kakšna je verjetnost, da bo 1. črna pogojno natanko ena bela?

a)
$$P(dveB.)=P(1.B)\cdot P(2.B/1.B)=\frac{4\cdot 3}{10\cdot 9}=\frac{2}{15}$$
$$P(dveB./1.B)=\frac{P(1.B\cap obeB.)}{P(1.B)}=\frac{P(obeB)}{P(1.B)}=\frac{\frac{2}{15}}{\frac{4}{10}}=\frac{1}{3}$$

Če vemo, da je 1. bela, potem ostane 9 kroglic, od tega 3 bele – torej je verjetnost 1/3.
Za drugi del naloge lahko izračunamo:

b) $P(2.B)=P(1.B,2.B)+P(1.\check{C},2.B)=\frac{4\cdot 3}{10\cdot 9}+\frac{6\cdot 4}{10\cdot 9}=\frac{4}{10}$

Iz tega vidimo, da je verjetnost, da je 2. bela enaka verjetnosti, da je 1. bela (kar smo izračunali že prej). To pa je zato, ker lahko drugače štejemo kaj je 1. in kaj je 2. kroglica, saj kroglice niso oštevilčene oziroma se bele kroglice med seboj ne razlikujejo. Zaradi tega lahko zaključimo, da velja: $P(dveB./2.B)=P(dveB./1.B)$

Za tretji del naloge pa računamo:

c)
$$P(obeB)=\frac{12}{90};P(vsaj1B)=1-(nobenaB)=1-\frac{6\cdot 5}{10\cdot 9}=\frac{2}{3}$$
$$P(obeB/vsaj1B)=\frac{P(obeB)}{P(vsaj1B)}=\frac{\frac{12}{90}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{5}$$

Za zadnji del naloge pa izračunamo:

d) $P(1.\check{c}/na\tan ko1B)=\frac{P(1.\check{C}/2.B)}{P(1.\check{C},2.B)\cup P(1.B,2.\check{C})}=\frac{1}{2}$

BERTRANDOV PARADOKS

Imamo 3 (neoštevilčene) škatle s po dvema kovancema in sicer:

- **v prvi škatli sta 2 zlata kovanca**
- **v drugi škatli je en zlat in en srebrn kovanec**
- **v tretji škatli sta 2 srebrna kovanca**

1.korak: Iz neke škatle potegnemo na slepo en kovanec
2.korak: ugibamo kakšen je drugi kovanec, ki je ostal v škatli, iz katere smo vlekli

Paradoks:
Recimo, da je kovanec zlat. Tedaj prihaja ali iz 1. ali 2. škatle. Ker sta obe enako verjetni, zaključimo da je za drugi kovanec enako verjetno da bo zlat ali srebrn (torej P=1/2).

Temu pa v resnici ni tako, kar lahko tudi izračunamo:

$$P(Z/Z) = \frac{P(ZZ \cap Z)}{P(Z)} = \frac{2}{3}$$

MONTY HOLLOW PARADOKS

Danih je troje vrat. Za enimi vrati je čokolada, za ostalimi dvojimi pa zelje.

1.korak: izberemo ena vrata, za katerimi predvidevamo da je čokolada – ta vrata ostanejo zaprta
2.korak: vodja igre brez predsodkov odpre ena od preostalih dveh vrat, za katerimi je zelje in nam ponudi da se premislimo.

Je bolje, da si premislimo ali ne?

Paradoks:
Ker imamo na razpolago še dvoja vrata in ker vemo, da je za enimi zelje, za drugimi pa čokolada, je enaka verjetnost, da je čokolada za izbranimi vrati kot tudi za preostalimi, zato je vseeno ali si premislimo ali ne (P=1/2).

Temu ni tako, saj moramo upoštevati, da vodja igre brez predsodkov odpre ena vrata za katerimi je zelje. Torej če smo mi izbrali vrata, za katerimi je čokolada (P=1/3) ali pa vrata za katerimi je zelje (P=2/3) je razmerje, da smo izbrali prava vrata tako 1/3:2/3 iz česar sledi, da je bolje, da si premislimo (večja verjetnost, da bomo dobili čokolado).

NEODVISNOST

Dogodek A je neodvisen od dogodka B kadar velja:

$$P(A) = P(A/B)$$

$$P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

15.) Vržemo dva kovanca. Pri tem označimo dogodke:
A – 1. pade cifra
B – 2. pade cifra
C – obakrat pade cifra
D – obakrat pade enako

a) **Ali sta dogodka A in B neodvisna?**

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{1}{2}$$ => DA, dogodka sta neodvisna

$$P(A \cap B) = C = \frac{1}{4}$$

b) **Ali sta dogodka A in C neodvisna?**
NE, ker je C poddogodek dogodka A

c) Ali sta dogodka A in D neodvisna?

$$P(D) = \frac{1}{2}$$

=> DA, dogodka sta neodvisna

$$P(A \cap D) = C = \frac{1}{4}$$

d) Ali lahko rečemo, da so dogodki A, B in D neodvisni dogodki?

NE, saj velja, da sta:
- A in B neodvisna
- A in D neodvisna
- B in D neodvisna

Iz česar sledi, da so dogodki PAROMA NEODVISNI.

Če so dogodki paroma neodvisni, potem med seboj niso neodvisni.

16.) Neodvisno vržemo 3 kovance. Označimo dogodke:
A – 1. kovanec pade grb
B – grb pade na natanko dveh kovancih

a) recimo, da so vsi trije kovanci pošteni. Ali sta dogodka A in B neodvisna?

Z G_n označimo, da pade grb, z C_n pa da pade cifra na n-tem kovancu

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = (G_1 \cap G_2 \cap C_3) \cup (G_1 \cap C_2 \cap G_3) \cup (C_1 \cap G_2 \cap G_3) = \frac{3}{8}$$

$$P(A \cap B) = (G_1 \cap G_2 \cap C_3) \cup (G_1 \cap C_2 \cap G_3) = \frac{1}{4}$$

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{16}$$

Ker 3/16 ni enako 1/4, dogodka nista neodvisna.

b) prvi kovanec je pošten. Verjetnost, da pade grb na 2. in na 3. pa je P. Pri kakšni vrednosti P sta dogodka A in B neodvisna?

$$P(B) = (G_1 \cap G_2 \cap C_3) \cup (G_1 \cap C_2 \cap G_3) \cup (C_1 \cap G_2 \cap G_3) = \frac{1}{2}P(1-P) + \frac{1}{2}P(1-P) + \frac{1}{2}P \cdot P = P - \frac{1}{2}P^2$$

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B) = P(1-P) = P - P^2$$

$$\frac{1}{2}(P - \frac{1}{2}P^2) = P - P^2$$

$$\frac{3}{4}P^2 = \frac{1}{2}P \Rightarrow P_1 = 0$$

$$\frac{3}{4}P = \frac{1}{2}$$

$$P_2 = \frac{2}{3}$$

IZREK O POPOLNI VERJETNOSTI

Popoln sistem dogodkov: $H_1, H_2, \ldots, H_n$

Zanj velja, da:

- **so dogodki paroma združljivi**
- **unija dogodkov mora biti cel prostor**

Gotovi dogodek označujemo s črko G.

$$\boxed{\sum\left(P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)+\ldots+P(H_n)P(A/H_n)\right)=P(A)}$$

17.) Dani sta dve posodi. V prvi je 5 belih, 3 rdeče in 2 črni kroglici. V drugi posodi so 3 bele in 3 črne kroglice. Najprej eno kroglico premestimo iz 1. v drugo posodo. Nato iz 2. posode brez vračanja potegnemo dve kroglici. Kakšna je verjetnost, da potegnemo eno belo in eno črno kroglico?

$$P(H(B))=\frac{5}{10}$$
$$P(H(R))=\frac{3}{10}$$
$$P(H(\check{C}))=\frac{2}{10}$$

$$P(A/H_B)=\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot 2=\frac{4}{7}$$
$$P(A/H_R)=\frac{3}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot 2=\frac{3}{7}$$
$$P(A/H_{\check{C}})=\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6}\cdot 2=\frac{4}{7}$$

$$P(A)=\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{7}+\frac{3}{10}\cdot\frac{3}{7}+\frac{2}{10}\cdot\frac{4}{7}=\frac{20+9+8}{70}=\frac{37}{70}$$

Celoten postopek lahko tudi poenostavimo, tako, da vzamemo le dve hipotezi namesto treh

---

18.) Trije vinogradniki – Janez, Ivan in Štefan ponudijo Franceljnu en kozarec vina. Pri tem obstaja verjetnost, da mu ponudijo šmarnico, po kateri boli glava. Dogodki so sledeči:
P(Janez ponudi šmarnico) = 40%
P(Ivan ponudi šmarnico) = 60%
P(Štefan ponudi šmarnico) = 10%
P(Franceljna boli glava tudi če ni pil šmarnice) = 10%
P(Franceljna boli glava po 1 kozarcu šmarnice) = 40%
P(Franceljna boli glava po 2 kozarcih šmarnice) = 70%
P(Franceljna boli glava po 3 kozarcih šmarnice) = 100%
Kolikšna je verjetnost, da ga bo po obisku teh vinogradnikov bolela glava?

Z »B« označimo, da ga boli glava, s H_i pa, da je spil i kozarcev šmarnice

$$P(B/H_0)=0{,}1$$
$$P(H_0)=0{,}6\cdot 0{,}4\cdot 0{,}9=0{,}216$$
$$P(B/H_1)=0{,}4$$
$$P(H_1)=0{,}4\cdot 0{,}4\cdot 0{,}9+0{,}6\cdot 0{,}6\cdot 0{,}9+0{,}6\cdot 0{,}4\cdot 0{,}1=0{,}492$$
$$P(B/H_2)=0{,}7$$
$$P(H_2)=0{,}4\cdot 0{,}6\cdot 0{,}9+0{,}4\cdot 0{,}4\cdot 0{,}1+0{,}6\cdot 0{,}6\cdot 0{,}1=0{,}268$$
$$P(B/H_3)=0{,}7$$
$$P(H_3)=0{,}4\cdot 0{,}6\cdot 0{,}10=0{,}024$$

$$P(B)=0{,}216\cdot 0{,}1+0{,}429\cdot 0{,}4+0{,}268\cdot 0{,}7+0{,}024\cdot 1=41{,}5\%$$

BAYESOVA FORMULA

H_1, H_2, ... H_N – sistem dogodkov

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A / H_i)}{P(H_1)P(A / H_1) + ... + P(H_n)P(A / H_n)}$$

19.) Na tržnici prodajata dve branjevki – Francka in Micka. Verjetnost, da Janez kupi solato pri Francki je 40%, da pa kupi solato pri Micki pa 60%. Francka ima 10% nagnite solate, Micka pa 20% nagnite solate. Janez domov prinese nagnito solato. Kakšna je verjetnost, da jo je kupil pri Micki?

H_F – kupi pri Francki
H_M – kupi pri Micki
A – dogodek, da je prinesel nagnito glavo

$$P(H_M / A) = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}2}{(0{,}6 \cdot 0{,}2) + (0{,}4 \cdot 0{,}1)} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

20.) Trije lovci lovijo zajca in le-ta pade pod strelom. Vemo, da Janez zadane z 10% verjetnostjo, Francelj z 20% verjetnostjo ter Tone z 30% verjetnostjo.

- **a) kakšna je verjetnost da je zajca zadel Janez?**
- **b) Vemo, da je zajca zadel le en lovec – kakšna je verjetnost, da je bil to Janez?**

a)

$$P(J / Z) = \frac{P(J \cap Z)}{P(Z)}; P(J \cap Z) = P(J)$$

$$P(Z) = 1 - P(\overline{J} \cap \overline{F} \cap \overline{T}) = 1 - (0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}7) = 0{,}496$$

(zajca sta lahko zadela tudi dva ali pa kar vsi trije)

b)

$$P(J / Z) = - ???????$$

BERNOULLIJEVA ZAPOREDJA POIZKUSOV

Poizkusi so:

- **neodvisni (n neodvisnih poizkusov)**
- **vsak uspe z enako verjetnostjo P**

Uvedemo spremenljivko U, ki nam predstavlja število uspešnih poizkusov.
$P_n(U=k)$ ... verjetnost, da je uspelo k poizkusov
Zato lahko zapišemo:

$$P_n(U = k) = \binom{n}{k} P^k \cdot (1 - P)^{n-k}$$

Pri čemer je $\binom{n}{k}$ enako številu izborov k elementov izmed n, k je število uspelih poizkusov, n-k pa število neuspelih poizkusov

---

21.) 7x vržemo pošteno kocko.

a) **kakšna je verjetnost, da 6 pade vsaj enkrat**

$$P = 1 - P(nikoli\_ne\_pade) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^7$$

b) **kakšna je verjetnost, da 6 pade natanko enkrat**

$$P = 7 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^6$$

c) **kakšna je verjetnost, da pade natanko dvakrat?**

$$P = \binom{7}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5$$

Tako zapišemo, ker imamo lahko več kombinacij – lahko 6 pade prvič in drugič, lahko prvič in tretjič itd.

d) **Kakšna je verjetnost, da pade natanko petkrat?**

$$P = \binom{7}{5} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^5 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2$$

Če se osredotočimo na binomski simbol, vidimo da velja:

$$\binom{7}{5} = 21 = \binom{7}{2}$$

Iz česar lahko zaključimo, da velja:

$$\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}}$$

22.) V škatli imamo 6 bonbonov. Hodimo mimo škatle in vsakič ven vzamemo en bonbon z verjetnostjo 90%.

a) **Kakšna je verjetnost, da sta po 8 mimohodih notri še 2 bonbona?**
b) **Kakšna je verjetnost, da smo škatlo izpraznili v natanko 8. mimohodu?**

a)
P(po 8 mimohodih ostane 2 bonbona) = P(po 8 mimohodih smo vzeli 4 bonbone)

$$P = \binom{8}{4} \cdot 0{,}9^4 \cdot 0{,}1^4 = 0{,}0046$$

b)

$$P = \binom{7}{5} \cdot 0{,}9^5 \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9 = 21 \cdot 0{,}0053 = 0{,}1113$$

23.) Zavarovalnica je zavarovala 1000 oseb proti nezgodi. Verjetnost nezgode je 0,15%. Odškodnina je 1 mio SIT. Poštena zavarovalna premija je v tem primeru enaka 0,15% * 1mio = 1500 SIT. Zaradi tega, ker mora zavarovalnica tudi nekaj zaslužiti, postavimo premijo na 3000 SIT. Kakšna je verjetnost, da bo zavarovalnica poslovala z zgubo v primeru take premije?

Ker je tako prihodek enak 3 milijone SIT, nas sedaj zanima, kakšna je verjetnost, da se ponesrečijo več kot trije zavarovanci. Ta verjetnost je enaka:

$$P = 1 - P(noben) - P(na\tan ko1) - P(na\tan ko2) - P(na\tan ko3\,je) =$$

$$= 1 - 0{,}9985^{1000} - \binom{1000}{1} \cdot 0{,}0015 \cdot 0{,}9985^{999} - \binom{1000}{2} \cdot 0{,}0015^2 \cdot 0{,}9985^{998} - \binom{1000}{3} \cdot 0{,}0015^3 \cdot 0{,}9985^{997}$$

Ker pa je to preveč za računati, si lahko omislimo numerično stabilnejši izračun:

$$P=\binom{1000}{4}\cdot 0{,}0015^{4}\cdot 0{,}9985^{996}+\binom{1000}{5}\cdot 0{,}0015^{5}\cdot 0{,}9985^{995}+\ldots$$

Ker pa gre za zelo majhna števila pa lahko iz tega že v prvem koraku naredimo približek, ki znaša 0,047.

24.) 7x vržemo pošteno kocko.

a) **kakšna je verjetnost, da 6 pade natanko trikrat, pogojno da je padla prvič**

Ta verjetnost je enaka verjetnosti, da je 6 padla v dveh metih od šestih:

$$P=\binom{6}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{2}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{4}=\ldots$$

b) **kakšna je verjetnost, da je 6 padla prvič, pogojno da pade natanko 3x**

Ta verjetnost je enaka verjetnosti, da je:
P1 = padla prvič, v ostalih šestih metih pa še 2x
P2 = padla natanko 3x
Kar lahko zapišemo:

$$P=\frac{P1}{P2}=\frac{\binom{6}{2}}{\binom{7}{3}}=\frac{3}{7}$$

25.) Dana je posoda v kateri so:

- **1 kovanec za 10 SIT**
- **5 kovancev za 2 SIT**
- **4 kovanci po 1 SIT**

Iz posode potegnemo 5x kovanec <u>z vračanjem</u>. Kolikšna je verjetnost, da smo potegnili več kot 7 SIT?

Verjetnost, da smo potegnili več kot 7 SIT je enaka seštevku verjetnosti:
P1 = vsaj enkrat smo potegnili kovanec za 10 SIT
P2 = kovanca za 10SIT nismo potegnili, a smo vsaj 3x potegnili kovanec za 2 SIT (3x2=6, v preostalih dveh potegih pa je vseeno tudi če potegnemo kovanec za 1 SIT, saj je seštevek že večji od 7)

$$P1=1-\left(\frac{9}{10}\right)^{5}$$

$$P2=\binom{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\left(\frac{4}{10}\right)^{2}+5\left(\frac{1}{2}\right)^{4}\frac{4}{10}+\left(\frac{1}{2}\right)^{5}=\ldots$$

To lahko rešimo tudi s pomočjo nasprotnega dogodka – torej predpostavimo, da smo potegnili manj ali enako kot 7 SIT (P3).

$$P=1-P3=1-(5x1sit)-P(4x1sit,1x2sit)-P(3x1sit,2x2sit)=$$

$$=1-\left(\frac{4}{10}\right)^{5}-5\left(\frac{4}{10}\right)^{4}\cdot\frac{1}{2}-\binom{5}{2}\left(\frac{4}{10}\right)^{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2}=\ldots$$

SLUČAJNE SPREMENLJIVKE

$P(x=a_1)=p_1$
$P(x=a_2)=p_2$

Porazdelitvena shema:

$$x\approx\begin{pmatrix} a_1 & a_2\ldots \\ p_1 & p_2\ldots \end{pmatrix}$$

Matematično upanje:

$$E(x) = a_1 \cdot p_1 + a_2 \cdot p_2 + \ldots$$
$$E[f(x)] = f(a_1)p_1 + f(a_2)p_2 + \ldots$$

26.) Dana je posoda s kovanci:

- **1 za 5 SIT**
- **2 po 2 SIT**
- **3 po 1 SIT**

a) Najprej izvlečemo en kovanec in njegovo vrednost označimo z X. Napiši porazdelitveno shemo te spremenljivke in izračunaj matematično upanje!

Porazdelitvena shema:

$$x \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Matematično upanje:

$$E(x) = 1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{3} + 5\frac{1}{6} = 2$$

Matematično upanje pa lahko izračunamo tudi po drugi poti:
Vemo, da je skupna vrednost vseh kovancev 12 SIT, izvlečemo 1/6 vseh kovancev, torej 12/6, kar je 2 SIT.

b) izvlečemo 2 kovanca brez vračanja. S je pri tem skupna vrednost obeh. Kako je porazdeljen S? Kakšno je matematično upanje od S?

Matematično upanje tudi tu lahko kar uganemo in sicer izvlečemo 2/6 kovancev z vrednostjo 12 SIT, torej je E(S)=2*12/6=4
Porazdelitveno shemo pa moramo izračunati:

$$P(S=2) = \frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5} = \frac{1}{5}$$
$$P(S=3) = \frac{2}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot 2 = \frac{2}{5}$$
$$P(S=4) = \frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{5}$$
$$P(S=6) = \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot 2 = \frac{1}{5}$$
$$P(S=7) = \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot 2 = \frac{2}{15}$$

Iz tega sedaj lahko izgradimo shemo: $S \approx \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 6 & 7 \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{15} & \frac{1}{5} & \frac{2}{15} \end{pmatrix}$

Če iz teh podatkov izračunamo matematično upanje po formuli, pa prav tako dobimo 4.

c) Kako bi hitro, a vendar eksaktno izračunali E(s)?

S=X+Y
X ... vrednost 1. kovanca
Y ... vrednost 2. kovanca

X in Y sta izmenljivi
Če vemo, da velja E(X)=2 (naloga a), potem je tudi E(X)=E(Y)=2
Iz tega vemo, da velja tudi
E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 4.

27.) Koliko bi morala biti vredna sedmica, da bi bila igra poštena?
Pravila igre:
Cena kombinacije = 50 SIT
Na voljo je 39 številk
7 jih prekrižamo
Recimo, da je v igri samo sedmica.

Uvedemo slučajne spremenljivke:

X:= znesek, ki ga loterija izplača
S:= vrednost sedmice

$$X \approx \begin{pmatrix} 0 & S \\ 1-\frac{1}{\binom{39}{7}} & \frac{1}{\binom{39}{7}} \end{pmatrix}$$

X ima samo dve slučajni vrednosti, zato je dihotomna.

$$E(X) = \frac{5}{\binom{39}{7}} = 50SIT$$

$$S = \binom{39}{7} \cdot 50SIT = 769.046.850SIT$$

28.) Kovanec mečemo dokler ne pade cifra, vendar največ petkrat. Pri tem uvedemo slučajno spremenljivko X, ki nam predstavlja število metov. Kako je X porazdeljen in kakšno je njegovo matematično upanje?

Možne variante zapišemo v obliki tabele:

IZID	VERJETNOST	X
C	½	1
GC	¼	2
GGC	1/8	3
GGGC	1/16	4
GGGG_	1/16	5

$$X \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}$$

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{1}{16} + 5 \cdot \frac{1}{16} = \frac{31}{16}$$

DISPERZIJA ALI VARIANCA

Pri disperziji ali varianci ugotavljamo, za koliko X ostopa od povprečja:

$$\boxed{D(X) = \mathrm{var}(X) = E\left[(X - E(X))^2\right] = E\left[X^2 - 2XE(X) + [E(X)]^2\right] = E(X^2) - [E(X)]^2}$$

STANDARDNI ODKLON

Standardni odklon računamo zato, ker disperzija ni neposredno primerljiva z verjetnostjo ($m \neq m^2$ **)**
Izračunamo ga po formuli:

$$\boxed{\sigma(X) = \sigma_X = \sqrt{D(X)}}$$

29.) Podano imamo naslednjo porazdelitveno shemo:

$$X \approx \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}2 & a \end{pmatrix}$$

a) **določi parameter a**
b) **določi E(X)**

c) definiramo novo spremenljivko $Y=X^2$. Kako je porazdeljen Y? Kakšno je matematično upanje od Y?
d) Določi disperzijo oziroma varianco ter standardni odklon za X.

a) Parameter a določimo tako, da odštejemo ostale verjetnosti od 1 (seštevek verjetnosti v spodnji vrstici mora biti natanko 1) – torej 1 – (0,5 + 0,2 + 0,1) = 1 – 0,8 = 0,2

b) $E(X) = (-1\cdot 0{,}1) + (0\cdot 0{,}5) + (1\cdot 0{,}2) + (2\cdot 0{,}2) = 0{,}5$

c) Porazdelitvena shema:

$$Y \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \end{pmatrix}$$

Do te porazdelitvene sheme pridemo tako, da kvadriramo zgornje vrednosti – ker se število 1 pojavi dvakrat (1^2 ter -1^2), ju lahko združimo. Verjetnosti se ne kvadrirajo temveč se pri enakih vrednostih med seboj seštevajo.

Matematično upanje za Y je tako:

$$E(Y) = 1\cdot 0{,}3 + 4\cdot 0{,}2 = 1{,}1 = E(X^2)$$

($E(X^2)$ bomo rabili za naslednjo točko)

d) Disperzija oz. Varianca:

$$\boxed{D(X) = \mathrm{var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 1{,}1 - (0{,}5)^2 = 1{,}1 - 0{,}25 = 0{,}85}$$

Standardni odklon:

$$\boxed{\sigma(X) = \sigma_X = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0{,}85} = 0{,}92}$$

30.) Dani sta dve neodvisni slučajni spremenljivki s porazdelitvijo:

$$X \approx \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \qquad Y \approx \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

a) Izračunaj matematično upanje in disperzijo teh dveh spremenljivk
b) Predpostavimo, da sta neodvisni. Izračunaj porazdelitveno shemo za S:=X+Y
c) Kakšno je matematično upanje od S ter disperzija?

a)

$$E(X) = -\frac{3}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = -\frac{5}{3}$$

$$E(Y) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{3}{6} = \frac{1}{3}$$

$$E(X^2) = \frac{9}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 5$$

$$E(Y^2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{9}{6} = \frac{7}{3}$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 5 - \left(-\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{20}{9}$$

$$D(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \frac{7}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{20}{9}$$

b)

Vidimo, da lahko X+Y~ dosegata vrednosti: -3-1=-4, -3+1=-1-1=-2, 1-1=-1+1=-3+3=3-3=0, 1+1=-1+3=2 ter 1+3=4, zato lahko zapišemo v porazdelitveno shemo zgornjo vrstico: $S \approx \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ - & - & - & - & - \end{pmatrix}$, spodnje vrednosti (verjetnosti) pa moramo izračunati:

$P(S=-4)=P(X=-3)P(Y=-1)=\frac{1}{4}$

$P(S=-2)=[P(X=-3)P(Y=-1)]+[P(X=-1)P(Y=3)]=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$

$P(S=0)=[P(X=1)P(Y=-1)]+[P(X=-1)P(Y=1)]+[P(X=3)P(Y=-3)]+[P(X=-3)P(Y=3)]=\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}=\frac{5}{18}$

$P(S=2)=[P(X=1)P(Y=1)]+[P(X=1)P(Y=3)]=\frac{1}{9}$

$P(S=4)=P(X=1)P(Y=3)=\frac{1}{36}$

Sedaj te izračunane vrednosti vnesemo v porazdelitveno shemo za S:

$$S \approx \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{5}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}$$

c)

$E(S)=E(X)+E(Y)=-\frac{5}{3}+\frac{1}{3}=-\frac{4}{3}$

Za izračun D(S) potrebujemo najprej izračunati E(S²): $E(S^2)=(-4)^2\frac{1}{4}+(-2)^2\frac{1}{3}+0^2\frac{5}{8}+2^2\frac{1}{9}+4^2\frac{1}{36}=\frac{56}{9}$

To vstavimo v formulo: $D(S)=E(S^2)-[E(S)]^2=\frac{56}{9}-\frac{16}{9}=\frac{40}{9}$

Iz tega lahko zaključimo, da če sta slučajni spremenljivki X in Y resnično neodvisni zanju velja:

$\boxed{D(X+Y)=D(X)+D(Y)}$

Pravilo:

$D(\alpha X)=\alpha^2 D(X) \Rightarrow D(X+X)=D(2X)=4D(X)$

Ker sta X in X v splošnem med seboj odvisni zanju **NE** velja odvisnost D(X+X)=D(X)+D(X)

Zgled: imamo kovance:

- **1 za 5 SIT**
- **2 za 2 SIT**
- **3 za 1 SIT**

ter slučajne spremenljivke:

$$X,Y \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \qquad S \approx \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 6 & 7 \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{15} & \frac{1}{5} & \frac{2}{15} \end{pmatrix}$$

Izberemo dva kovanca – torej X in Y – pri tem je S vsota vrednosti obeh kovancev.

Najprej izračunamo matematičo upanje:

$E(X)=E(Y)=2$

$E(S)=E(X)+E(Y)=4$

Sedaj izračunamo disperzijo:

$$D(X)=D(Y)=\left[1^2\frac{1}{2}+2^2\frac{1}{3}+5^2\frac{1}{6}\right]-\left[2^2\right]=2$$

$$D(S)=2^2\frac{1}{5}+3^2\frac{2}{5}+4^2\frac{1}{15}+6^2\frac{1}{5}+7^2\frac{2}{15}=\frac{16}{5}$$

Iz tega vidimo, da sta spremenljivki neodvisni, saj 2² ni enako 16/5...

31.) V posodi imamo 3 rdeče, 2 modri ter 1 belo kroglico. Iz posode potegnemo dve kroglici brez vračanja. S slučajnima spremenljivkama R in M označimo število rdečih oziroma število modrih kroglic med tema dvema kroglicama, ki smo jih potegnili.
a) Izračunaj navzkrižno porazdelitev, matematično upanje ter disperzijo spremenljivk R in M!
b) Definiramo dve naključni spremenljivki: $W = R + 2M\,; S = R + M$. Kako sta ti dve spremenljivki porazdeljeni, kakšno je matematično upanje in disperzija?

a)
Navzkrižna porazdelitev z robnimi vrednostmi:

1/5

	M=0	M=1	M=2
R=0	0	$\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot 2=\frac{2}{15}$	$\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{15}$
R=1	$\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot 2=\frac{1}{5}$	$\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot 2=\frac{2}{5}$	0
R=2	$\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$	0	0

3/5

1/5

4/6*3/5=**2/5** 2/6*4/5=**8/15** **1/15**

Iz tega lahko razberemo porazdelitveno shemo:

$R \approx \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \qquad M \approx \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{2}{5} & \frac{8}{15} & \frac{1}{15} \end{pmatrix}$

Na podlagi te razporeditvene sheme izračunamo matematično upanje:

$$E(R) = 0\cdot\frac{1}{5} + 1\cdot\frac{3}{5} + 2\cdot\frac{1}{5} = 1$$

$$E(M) = 0\cdot\frac{2}{5} + 1\cdot\frac{8}{15} + 2\cdot\frac{1}{15} = \frac{2}{3}$$

S pomočjo matematičnega upanja pa sedaj lahko izračunamo tudi disperzijo:

$$D(R) = E(R^2) - [E(R)]^2 = (0^2\cdot\frac{1}{5} + 1^2\cdot\frac{3}{5} + 2^2\cdot\frac{1}{5}) - 1^2 = \frac{2}{5}$$

$$D(M) = E(M^2) - [E(M)]^2 = \frac{8}{15} + \frac{4}{15} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{16}{45}$$

b)
Za začetek izračunamo novo navzkrižno porazdelitev, da dobimo možne porazdelitve W in S:

	M=0	M=1	M=2
R=0	0 W=0; S=0	$\frac{2}{15}$ W=2; S=1	$\frac{1}{15}$ W=4; S=2
R=1	$\frac{1}{5}$ W=1; S=1	$\frac{2}{5}$ W=3; S=2	0 W=5; S=2
R=2	$\frac{1}{5}$ W=2; S=2	0 W=4; S=3	0 W=6; S=4

Podatke za zgornjo tabelo smo dobili tako, da smo vstavili vrednosti R in M v dejanski formuli za W in S. Vidimo, da W lahko zavzame vrednosti 1, 2, 3 ali 4 (vrednosti 0, 5 in 6 v nobenem primeru niso možne, saj je verjetnost enaka 0), kar lahko zapišemo s porazdelitveno shemo: $W \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \_ & \_ & \_ & \_ \end{pmatrix}$

Sedaj izračunamo spodnjo kolono (verjetnosti za posamezno vrednost W):

$$P(W=0) = P(R=0, M=0) = 0$$

$$P(W=1) = P(R=1, M=0) = \frac{1}{5}$$

$$P(W=2) = P(R=0, M=1) + P(R=2, M=0) = \frac{2}{15} + \frac{1}{5} = \frac{1}{3}$$

$$P(W=3) = P(R=1, M=1) = \frac{2}{5}$$

$$P(W=4) = P(R=0, M=2) = \frac{1}{15}$$

Sedaj lahko dopolnimo porazdelitveno shemo: $W \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & \frac{2}{5} & \frac{1}{15} \end{pmatrix}$

Iz teh izračunov lahko izračunamo še matematično upanje:

$$E(W) = 1\cdot\frac{1}{5} + 2\cdot\frac{1}{3} + 3\cdot\frac{2}{5} + 4\cdot\frac{1}{15} = \frac{35}{15} = \frac{7}{3}$$

Za S ne bomo računali, saj je isti postopek...

Sicer pa se da ta del naloge izračunati tudi na drug, krajši način:

Ker vemo, da velja W=R+2M, lahko to vstavimo v formulo za odvisne spremenljivke in dobimo:

$$E(W) = E(R) + 2E(M) = 1 + 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{7}{3}$$

Vendar pa za izračun disperzije še vedno potrebujemo razporeditveno shemo od W:

$$E(W^2) = 1^2 \cdot \frac{1}{5} + 2^2 \cdot \frac{1}{3} + 3^2 \cdot \frac{2}{5} + 4^2 \cdot \frac{1}{15} = \frac{93}{15} = \frac{31}{5}$$

$$D(W) = E(W^2) - [E(W)]^2 = \frac{31}{5} - \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{31}{5} - \frac{49}{9} = \frac{34}{45}$$

32.) Podana je navzkrižna porazdelitev:

	Y=1	Y=2	Y=3
X=-1	0,11	0,22	?
X=-2	0,03	?	?
X=-3	0,06	?	?

Dopolni tabelo tako, da bosta X in Y neodvisni spremenljivki. Poleg tega izračunaj še E(X+Y) ter D(X+Y)

Najprej moramo izračunati robne verjetnosti:

1.) ker imamo stolpec pri Y=1 že podan, lahko robno verjetnost pri Y=1 izračunamo tako, da seštejemo vse številke, torej: 0,11+0,03+0,06=0,2
2.) ker naloga zahteva, da sta X in Y neodvisni spremenljivki, zanju velja $P(X=-1, Y=1) = P(X=-1) \cdot P(Y=1)$ in ker smo v prejšnji točki izračunali, da je P(Y=1) = 0,2, lahko to zapišemo v formuli: $P(X=-1) = \frac{P(X=-1, Y=1)}{P(Y=1)} = \frac{0{,}11}{0{,}2} = 0{,}55$ kar nam predstavlja robno verjetnost pri X=-1
3.) Iz tega lahko sedaj izračunamo verjetnost za P(X=-1,Y=3) in sicer tako, da od 0,55 odštejemo P(X=-1,Y=1) ter P(X=-1,Y=2) => P(X=-1,Y=3) = 0,55-(0,22+0,11)=0,22
4.) Ker sta spremenljivki neodvisni, zanju velja tudi, da je $P(X=-1, Y=2) = P(X=-1) \cdot P(Y=2)$ iz česar lahko izračunamo robno verjetnost pri Y=2 => $P(Y=2) = \frac{P(X=-1, Y=2)}{P(X=-1)} = \frac{0{,}22}{0{,}55} = 0{,}4$
5.) Enako naredimo tudi, da dobimo robno verjetnost za X=-2, X=-3 ter Y=3:
$$P(X=-2) = \frac{P(X=-2, Y=1)}{P(Y=1)} = \frac{0{,}03}{0{,}2} = 0{,}15$$
$$P(X=-3) = \frac{P(X=-3, Y=1)}{P(Y=1)} = \frac{0{,}06}{0{,}2} = 0{,}3$$
$$P(Y=3) = \frac{P(X=-1, Y=3)}{P(X=-1)} = \frac{0{,}22}{0{,}55} = 0{,}4$$
6.) Sedaj lahko vse izračunane vrednosti vpišemo v tabelo zaradi boljše preglednosti:

	Y=1	Y=2	Y=3	
X=-1	0,11	0,22	*0,22*	0,55
X=-2	0,03	?	?	0,15
X=-3	0,06	?	?	0,3
	0,2	0,4	0,4	

7.) S pomočjo izračunanih robnih verjetnosti lahko sedaj izračunamo še preostale neznane podatke:
$$P(X=-2, Y=2) = P(X=-2) \cdot P(Y=2) = 0{,}15 \cdot 0{,}4 = 0{,}06$$
$$P(X=-3, Y=2) = P(X=-3) \cdot P(Y=2) = 0{,}3 \cdot 0{,}4 = 0{,}12$$
$$P(X=-2, Y=3) = P(X=-2) \cdot P(Y=3) = 0{,}15 \cdot 0{,}4 = 0{,}06$$
$$P(X=-3, Y=3) = P(X=-3) \cdot P(Y=3) = 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}12$$

8.) Sedaj lahko dokončno izpolnimo tabelo navzkrižnih porazdelitev:

	Y=1	Y=2	Y=3	
X=-1	0,11	0,22	0,22	**0,55**
X=-2	0,03	0,06	0,06	**0,15**
X=-3	0,06	0,12	0,12	**0,3**
	0,2	**0,4**	**0,4**	

Drugi del naloge (računanje E(X+Y) ter D(X+Y)) lahko rešimo na dva načina – en način bi bil, da zapišemo porazdelitveno shemo od X+Y, drug način pa je, da izračunamo matematično upanje ter disperzijo od X in Y in ker sta neodvisna lahko rezultate med seboj preprosto seštevamo:

$$\left.\begin{aligned} E(X) &= -1\cdot 0{,}55 - 2\cdot 0{,}15 - 3\cdot 0{,}3 = -1{,}75 \\ E(Y) &= 1\cdot 0{,}2 + 2\cdot 0{,}4 + 3\cdot 0{,}4 = 2{,}2 \end{aligned}\right\} E(X+Y) = E(X) + E(Y) = -1{,}75 + 2{,}2 = 0{,}45$$

$$E(X^2) = 0{,}55 + 0{,}6 + 2{,}7 = 3{,}85$$
$$E(Y^2) = 0{,}2 + 1{,}6 + 3{,}6 = 5{,}4$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 3{,}85 - 3{,}0625 = 0{,}7875$$
$$D(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 5{,}4 - 4{,}84 = 0{,}56$$

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y) = 0{,}7875 + 0{,}56 = 1{,}3475$$

33.) Naj bodo neodvisne spremenljivke X_1, X_2, X_3, ..., X_{10} porazdeljene s shemo:

$$X_i \approx \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$$

Naključna spremenljivka S nam pove vsoto teh spremenljivk:

$$S = X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_{10}$$

Kakšna je verjetnost, da bo vrednost S enaka matematičnemu upanju od S?

Najprej izračunamo kakšno je matematično upanje od S:

$$E(S) = E(X\ \ ) + E(X_2) + \ldots + E(X_{10}) = [0\cdot 0{,}4 + 1\cdot 0{,}6] + [0\cdot 0{,}4 + 1\cdot 0{,}6] \ldots = 10\cdot 0{,}6 = 6$$

Sedaj definiramo novo spremenljivko »k«, ki ima vrednosti:
k={0,1,2,...,10}

Na podlagi tega vemo, da bo veljalo P(S=k) natanko takrat, ko bo natanko k X-ov enakih 1, ostalih (10-k) pa enakih 0. To lahko zapišemo:

$$P(S=k) = \binom{10}{k} \cdot 0{,}6^k \cdot 0{,}4^{10-k}$$

na podlagi te formule pa lahko izračunamo tudi kakšna je verjetnost, da bo P(S=E(S)):

$$P(S=6) = \binom{10}{6} \cdot 0{,}6^6 \cdot 0{,}4^4 = 210 \cdot 0{,}047 \cdot 0{,}0256 = 0{,}253$$

To nalogo lahko zapišemo tudi s pomočjo binomske porazdelitve**:**

$$S \approx B(10{,}0'6)$$

Splošna formula pa je:

$$\boxed{P(S=k) = \binom{n}{k} \cdot P^k \cdot (1-P)^{n-k}}$$