

1. V posodi imamo dve igralni kocki. Prva ima 2 lici pobarvani z rdečo, 2 z modro in 2 z zeleno. Druga pa ima 3 lica pobarvana z rdečo, 2 z modro in 1 z zeleno. Iz posode naključno izberemo kocko, jo vržemo in pogledamo, kakšna je barva zgornjega lica.
- (a) Poišči verjetnosti, da bo zgornje lice rdeče, modre oz. zelene barve.
(Odgovor: $P(R) = \frac{5}{12}, P(M) = \frac{1}{3}, P(Z) = \frac{1}{4}$.)
- (b) Vemo, da je zgornje lice zelene barve. Kakšna je verjetnost, da smo iz posode izbrali drugo kocko.
(Odgovor: $p = \frac{1}{3}$.)
- (c) Naj bo A dogodek, da izberemo prvo kocko, R pa dogodek, da je zgornje lice rdeče. Ali sta dogodka A in R neodvisna?
(Odgovor: NE.)
- (d) Naj bo A dogodek, da izberemo prvo kocko, M pa dogodek, da je zgornje lice modro. Ali sta dogodka A in M neodvisna?
(Odgovor: DA.)
2. Pri igri na srečo računalnik izbere naključno število med 1 in 6, število k je izbrano z verjetnostjo $\frac{c}{k}$. Prvi igralec vloži 1€, njegov dobiček pa je ostanek izbranega števila pri deljenju s 3. Drugi igralec pa vloži 1€ in njegov dobiček je 3€, če je izbrano število 5 ali 6.
- (a) Določi konstanto c .
(Odgovor: $c = \frac{20}{49}$.)
- (b) Določi porazdelitev dobička vsakega od igralcev. Kolikšen dobiček pričakujeta v povprečju?
(Odgovor: $X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{10}{49} & \frac{25}{49} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}, Y \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ \frac{125}{147} & \frac{22}{147} \end{pmatrix}, E(X) = \frac{4}{49}, E(Y) = -\frac{27}{49}$.)
- (c) Kolikšna je verjetnost, da bo pri posamezni igri prvi igralec dobil vsaj toliko denarja, kot ga je vložil?
(Odgovor: $p = \frac{39}{49}$.)
- (d) Ali sta dobitka igralcev med seboj neodvisna? Poišči njuno korelacijo.
(Odgovor: Dobitka nista neodvisna. $K(X, Y) = \frac{10}{2401}$.)
3. V knjižnici so vseh 21 knjig Pet prijateljev na eni polici. Mama sinu, ki je že prebral prvih 6 delov, naključno z police izbere 5 knjig.
- (a) Koliko je verjetnost, da je prebral manj kot tri?
(Odgovor: $p = \frac{286}{323}$.)

- (b) Kolikšna je verjetnost, da je sin prebral že vsaj štiri izmed knjig, ki mu jih je prinesla mama?

(Odgovor: $p = \frac{11}{969}$.)

4. Cesto pred vrtcem v poprečju prevozi 100 avtomobilov na uro.

- (a) Kolikšna je verjetnost, da bosta v treh minutah cesto prevozila manj kot 2 avtomobila.

(Odgovor: $p=0.04042768$.)

- (b) Kolikšna je verjetnost, da v treh minutah cesto prevozi več kot 5 avtomobilov.

(Odgovor: $p=0.3840393$.)

- (c) Skupina iz vrtca potrebuje 1 minuto, da prečka cesto. Kolikšna je verjetnost, da v času, ko ta skupina prečka cesto, mimo ne pripelje noben avto?

(Odgovor: $p=0.1888756$.)

5. Slučajni spremenljivki sta podani s porazdelitveno shemo

$x \setminus Y$	0	1	2
0	0.1	0.1	0.05
1	0.2	0	0.1
2	c	0.15	0

- (a) Določi konstanto c . (Odgovor: $c = 0.3$.)

- (b) Določi porazdelitvi slučajnih spremenljivk X in Y . Ali sta slučajni spremenljivki neodvisni?

(Odgovor: $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.25 & 0.3 & 0.45 \end{pmatrix}$, $Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.6 & 0.25 & 0.15 \end{pmatrix}$, X in Y nista neodvisni saj $E(XY) = 0.5 \neq E(X)E(Y) = 0.66$.)

- (c) Izračunaj korelacijski koeficient $r(X, Y)$. (Odgovor: $r(X, Y) = -0.266168$.)

6. Odpira se poštena igralnica. Njen cilj je narediti igre na srečo kar čimbolj poštene. Zato si želijo sestaviti takšne igre na srečo, pri katerih bi bil njen pričakovano dobiček enak 0. Ena izmed takšnih iger je met igralne kocke. Pri njej igralec vloži 1€ in vrže igralno kocko. Igralec pri tej igri zmaga, če je število pik pri metu deljivo s 3. Če zmaga, mu igralnica izplača 2€.

- (a) Ali je ta igra poštena? Odgovor utemelji. (Odgovor: Ne, saj $E(X) = -1/3$.)

- (b) Igralna kocka v praksi ni nikoli čisto poštena. Igralnica je eksperimentirala z različnimi obtežitvami in so ugotovili, da lahko izdelajo kocko, za katero velja

$$P(X = k) = \begin{cases} \frac{5a \cdot k}{3} & \text{če } k \text{ lih;} \\ \frac{b \cdot k}{6} & \text{če } k \text{ sod.} \end{cases}$$

Določite parametra a in b tako, da bo zgornja igra s to kocko poštena.
(Odgovor: $a = 0$, $b = 1/2$.)

7. Prodajalci računalniške opreme vedo, da je pri naročanju trdih diskov potrebno biti previden. Kar velikokrat se namreč zgodi, da je nekaj izdelkov defektnih. Še prav posebej pri pošiljkah velikosti 10, kjer so lahko defektni kar do trije diski. Iz izkušenj vedo, da je $P(\text{defektnih je } k \text{ diskov}) = \frac{k}{6}$, za $k \in \{0, 1, 2, 3\}$. Kolikšna je verjetnost, da bo pri nakupu 5 naključnih diskov iz takšne pošiljke kupec dobil vsaj en defekten disk?
(Odgovor: $P(A) = \frac{173}{216} \doteq 0.8$.)
8. Na knjižni polici so 3 kriminalke, 4 romani in 5 potopisov. Izmed knjig na polici naključno izberemo 3. Kolikšno je pričakovano število izbranih romanov?
(Odgovor: $E(X) = 1$.)
9. Bankomat pred blokom je deloma pokvarjen, zato pravilno PIN kodo sprejme le v $\frac{3}{4}$ primerov. Če zaradi te napake pravilno pin kodo zavrne 3-krat, potem kartico zadrži. Seveda uporabniki glede tega niso preveč srečni in se pritožijo na okencu bližnje banke. Predpostavi, da na dan bankomat uporabi 10 ljudi in da vsi vtipkajo pravilno PIN kodo.
- (a) Koliko pritožb lahko pričakujejo na banki vsak dan?
(Odgovor: $\frac{5}{32} \doteq 0.16$ - to je pričakovano število pritožb.)
- (b) Kako verjetno je, da bodo dobili natanko dve pritožbi?
(Odgovor: 0.009685837.)
10. Za izpit je pripravljenih 30 vprašanj v treh skupinah po 10. Kandidat naključno izbere po eno vprašanje iz vsake od treh skupin. Da opravi izpit, mora kandidat uspešno odgovoriti vsaj na dve izmed treh izbranih vprašanj.
Kakšna je verjetnost, da kandidat opravi izpit, če obvlada iz prve skupine 8 vprašanj, iz druge skupine 5 vprašanj in iz tretje skupine 2 vprašanja?
(Odgovor: $\frac{1}{2}$)
11. Iz žare, v kateri je 5 belih in 4 črne krogel, na slepo izberemo dve krogli in ju prestavimo v drugo žaro, v kateri sta že 2 beli in 5 rdečih krogel. Nato krogel v drugi žari premešamo in izvlečemo tri krogel.
Kakšna je verjetnost, da so te izvlečene krogel treh različnih barv?
(Odgovor: $\frac{5}{36}$)
12. Dva strelca streljata na tarčo z verjetnostma zadetka 0.5 in 0.9.

- (a) Oba strelca ustrelita enkrat. Tarčo zadene en sam strel. Kakšna je verjetnost, da je zadel prvi strelec (tisti z manjšo verjetnostjo zadetka)?
- (b) Strelca ustrelita vsak dvakrat. Kakšna je verjetnost, da tarčo zadanejo natančno trije izstrelki?

(Odgovor: (a) $\frac{1}{10}$ (b) 0.45)

13. Med dvajsetimi izdelki v zaboju je pet pokvarjenih. Iz zaboja naključno izbiramo izdelke, dokler ne izberemo delujočega. Pri tem početju izbranih izdelkov ne vračamo nazaj v zaboj. Označimo z X število potrebnih izbiranj, dokler v rokah ne držimo izpravnega izdelka.

Zapiši porazdelitveno shemo slučajne spremenljivke X . Kolikokrat lahko pričakujemo, da bomo morali seči v zaboj?

(Odgovor: $E(X) = \frac{21}{16}$)

14. Vržemo dve igralni kocki. Naj bo X_1 število pik na prvi kocki in X_2 število pik na drugi kocki. Označimo z Y maksimalno videno število pik na posamezni kocki, torej $Y = \max\{X_1, X_2\}$.

- a) Izračunaj matematično upanje in disperzijo slučajne spremenljivke Y .
- b) Kocki mečemo, dokler vsaj na eni ne pade šestica. Izračunaj pričakovano število metov.

(Odgovor: a) $E(Y) = \frac{161}{36}$, $D(Y) = \frac{2555}{1296}$ b) $\frac{36}{11}$)

15. Verjetnost, da je otrok levičar je enaka $1/2$, če sta oba starša levičarja; $1/6$, če je le eden od staršev levičar; in $1/16$, če sta oba starša desničarja. Privzemimo, da sta v 2% primerov oba starša levičarja, v 20% primerov le eden od staršev, v ostalih primerih pa sta oba starša desničarja. Kolikšna je verjetnost, da je naključno izbran otrok levičar?

(Odgovor: 0.092083 ali 9.2083%.)

16. Iz tovarniške proizvodne linije pride 20% izdelkov z napako. Inšpektor za nadzor kakovosti preverja naključno izbrane izdelke. Naj bo X število izdelkov, ki so izbrani do in vključno s prvim izdelkom z napako. Kolikšne so verjetnosti, da:

- (a) ima že prvi izbran izdelek napako, tj. $P(X = 1)$? (Odgovor: 0.2.)
- (b) je prvi izdelek z napako tisti, ki je izbran peti? (Odgovor: 0.08192.)
- (c) je X med 4 in 7, tj. $4 \leq X \leq 7$? (Odgovor: $P(4 \leq X \leq 7) = 0.3022848$.)
- (d) so prvi trije izbrani izdelki brez napake? (Odgovor: $P(X \geq 4) = 0.512$.)

17. Med pripravo knjige za tisk so pri pregledu prvih štirih poglavij našli v povprečju 1.6 tiskarskih napak na stran. Naj bo X število napak na neki izbrani strani v knjigi. Kolikšna je verjetnost, da

- (a) na tej strani ni napak? (Odgovor: 0.20190.)
- (b) sta na tej strani dve napaki? (Odgovor: 0.25843.)
- (c) so na strani več kot 4 napake? (Odgovor: $P(X \geq 4) = 0.078813$.)
- (d) je na treh zaporednih straneh skupaj 5 napak? (Odgovor: 0.17475.)

Namig: Privzemi, da je število napak na stran slučajna spremenljivka s Poissonovo porazdelitvijo.

18. Organizatorji vaške veselice so poskrbeli tudi za srečelov. Izdali so 1000 srečk po ceni 2€, v nagradnem skladu pa je ena nagrada v vrednosti 100€, 6 nagrad v vrednosti 75€, 8 nagrad v vrednosti 50€ in 8 nagrad v vrednosti 25€. Ostale srečke niso dobitne.

- (a) Kolikšen izkupiček si lahko organizatorji obetajo od igre, če bodo prodali vse srečke? (Odgovor: 850€.)
- (b) Naj slučajna spremenljivka X označuje dobiček kupca ene srečke pri tej igri. Zapiši porazdelitveno shemo za X !
(Odgovor: $X \sim \begin{pmatrix} -2 & 23 & 48 & 73 & 98 \\ 0.977 & 0.008 & 0.008 & 0.006 & 0.001 \end{pmatrix}$.)
- (c) Izračunaj še $E(X)$. (Odgovor: $E(X) = -0.85$.)

19. Tiskano vezje vsebuje 20 čipov, od tega so 4 pokvarjeni. Če naključno izberemo 3 čipe, kolikšna je verjetnost, da so vsi trije pokvarjeni?
(Odgovor: 0.00350877)

20. Imamo komplet, v katerem je 52 kart. V igri so Pob, Dama, Kralj vredni 10 pik, As 1 piko, ostale karte pa so vredne kolikor je število na karti. Naključno povlečemo dve karti:

- (a) Kolikšna je verjetnost, da bo seštevek pik 7 ali manj, če vemo, da smo povlekli najmanj enega asa? (Odgovor: 0.434343)
- (b) Ena izmed povlečenih kart je srčeva dama. Kolikšna je verjetnost, da bo seštevek nad 18? (Odgovor: 0.62745)

21. Prodajalec življenskih polic v povprečju proda 3 police na teden (5 delovnih dni). Kolikšna je verjetnost, da bo v enem tednu (5 dneh) prodal:

- (a) vsaj eno polico? (Odgovor: 0.950213)
- (b) dve do pet polic? (Odgovor: 0.7169338)

22. Pilot želi zavarovati svoj avion, ki je vreden 200,000€. Zavarovalnica predvidi, da je verjetnost, da bo morala povrniti celotno vrednost aviona 0.002, polovico vrednosti aviona z verjetnostjo 0.01 in četrtno vrednosti aviona z verjetnostjo 0.1. Koliko naj zavarovalnica letno računa pilotu, če želi imeti v povprečju vsako leto 5000€ dobička?

(Odgovor: 11,400€)

23. V trgovini imajo na voljo hitro srečko A , ki stane 1€ in hitro srečko B , ki stane 2€. Pri hitri srečki A , vsaka tisoča srečka zadane 100€, vsaka peta pa 1€. Pri hitri srečki B pa vsaka dvestota zadane 200€, vsaka deseta pa 2€.

(a) Katero srečko se bolj splača kupiti? (Odgovor: $E(A) = -0.499$, $E(B) = -0.59$, torej srečko A .)

(b) Kupimo eno srečko tipa A in eno srečko tipa B . Kolikšna je pričakovana skupna vrednost dobitka? (Odgovor: $E(A + B) = -1.089$.)

24. V igralnici igramo igro, pri kateri zadanemo z verjetnostjo $\frac{1}{2}$. Če igro dobimo, nam igralnica izplača dvojni vložek.

Stavimo vse dokler

(a) ne izgubimo ali

(b) ne dobimo trikrat zapored.

Slučajna spremenljivka X označuje naš izplen po koncu igre, slučajna spremenljivka Y pa število stav.

(a) Določi porazdelitvi slučajnih spremenljivk X in Y ter porazdelitveno shemo za slučajni spremenljivki X in Y . Ali sta slučajni spremenljivki neodvisni?

(Odgovor:
$$\begin{array}{c|ccc} X \setminus Y & 1 & 2 & 3 \\ \hline -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 7 & 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{array}, X \sim \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ \frac{7}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}, Y \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, X \text{ in } Y \text{ sta odvisni.}$$

(b) Določi kovarianco $K(X, Y)$. (Odgovor: $K(X, Y) = \frac{7}{8}$.)

25. V vreči imamo dva kovanca. Prvi je pošten, verjetnost da pade grb je $\frac{1}{2}$. Na drugem pa pade grb z verjetnostjo $\frac{1}{3}$. Iz vreče naključno izberemo kovanec in ga dvakrat vržemo. Naj bo K slučajna spremenljivka, ki pove, kateri kovanec smo izbrali in X število grbov, ki smo jih videli.

(a) Določi porazdelitve slučajnih spremenljivk K in X ter porazdelitveno shemo za slučajni spremenljivki K in X . Ali sta slučajni spremenljivki neodvisni?

(Odgovor:
$$\begin{array}{c|ccc} K \setminus X & 0 & 1 & 2 \\ \hline 1 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 2 & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{18} \end{array}, K \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{25}{72} & \frac{17}{36} & \frac{13}{72} \end{pmatrix}. K \text{ in } X \text{ sta odvisni,}$$

saj $E(KX) - E(K)E(X) = -\frac{1}{12}$.)

(b) Izračunaj korelacijski koeficient $r(K, X)$. (Odgovor: $r(K, X) = -\frac{1}{3\sqrt{2}} \doteq -0.235702$.)