VAJE IZ VERJETNOSTI IN STATISTIKE

(42 ur)

1. Osnove kombinatorike

Pravilo vsote, pravilo produkta. Variacije, kombinacije in permutacije. (2 uri)

1. Na koliko načinov lahko opremimo dnevno sobo, če imamo na voljo 4 vrste parketa, 3 vrste nelesnih talnih oblog in 5 vrst pohištva?

2. Koliko je:

   a) vseh trimestnih števil?
   b) vseh sodih trimestnih števil?
   c) vseh trimestnih števil s sodo prvo števko?
   d) vseh trimestnih števil s samimi enakimi števkami?
   e) vseh trimestnih števil s samimi različnimi števkami?
   f) vseh trimestnih števil, ki so palindromi?

3. Na koliko načinov lahko iz škatle s petimi različnimi kroglicami vzamemo:

   a) eno kroglico
   b) dve kroglici
   c) tri kroglice

   Pri tem ločite primer, ko kroglice vračamo, in primer, ko jih ne vračamo. Poleg tega ločite primer, ko je vrstni red jemanja pomemben, in primer, ko ni pomemben.

   Pri različici, ko kroglic ne vračamo in vrstni red jemanja ni pomemben, primerjajte rezultata iz točk b) in c).

4. Na koliko načinov lahko na ravno polico razporedimo 3 begonije in 4 fuksije? Pri tem ločite primer, ko razločujemo vse cvetlice, in primer, ko cvetlic iste vrste med seboj ne razločujemo.

Splošneje: iz škatle z n različnimi kroglicami lahko izvlečemo k kroglic na naslednje število načinov:

	vrstni red vlečenja	
	pomemben	ni pomemben
vračamo	${}^{(\mathrm{p})}V_n^k = n^k$	${}^{(\mathrm{p})}C_n^k = \binom{n+k-1}{k}$
ne vračamo	$V_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1)$	$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{V_n^k}{k!}$

Velja še $V_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ *in* $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!} = \dbinom{n}{n-k}$.

5. V posodi je 6 rdečih in 4 modre kroglice, vse kroglice so različne. Na koliko načinov lahko iz posode brez vračanja vzamemo (vrstni red ni pomemben):

   a) 4 rdeče in 2 modri kroglici?

   b) 4 kroglice, a od tega vsaj eno rdečo in vsaj eno modro?

6. Na koliko načinov lahko v ravno vrsto položimo tri brezove, dve leskovi in štiri vrbove šibe, če:

   a) vse šibe razločujemo in ni omejitev?

   b) vse šibe razločujemo ter morajo priti najprej brezove, nato leskove in nazadnje vrbove?

   c) vse šibe razločujemo in morajo biti šibe posamezne vrste skupaj?

   d) šib iste vrste med seboj ne razločujemo in ni omejitev?

7. Na koliko načinov lahko razvrstimo šest otrok (ki jih razločujemo) na vrtiljak s šestimi sedeži (ki jih ločimo le glede na njihovo medsebojno lego)? Kaj pa na vrtiljak z desetimi sedeži? Na vsak sedež gre največ en otrok.

2. Elementarna verjetnost

Diskretni pogled na verjetnost v povezavi s kombinatoriko, geometrijski pogled na verjetnost. Računanje z dogodki, osnovni pojmi o neodvisnosti. (3 ure)

Če so vsi izidi enako verjetni, velja:

$$P = \frac{\textit{število ugodnih izidov}}{\textit{število vseh izidov}}$$

1. Vržemo dve kocki, vsi izidi so enako verjetni. Kolikšna je verjetnost, da je vsota pik enaka 8?

2. Petkrat vržemo kocko. Kolikšna je verjetnost, da šestica pade:

   a) vsaj enkrat?

   b) natanko enkrat?

   c) natanko dvakrat?

   Po potrebi z uporabo simbolov 6 in $\cancel{6}$ zapišite vse možnosti!

Splošneje: če izvedemo n neodvisnih poskusov, od katerih vsak uspe z verjetnostjo p, je verjetnost, da uspe natanko k poskusov, enaka:

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Zgornji obrazec imenujemo **Bernoullijeva formula**.

3. Zakonca načrtujeta štiri otroke. Kaj je verjetneje: da bosta oba spola enako zastopana ali da bodo trije enega, eden pa nasprotnega spola? Vse razporeditve spolov so enako verjetne.

4. V posodi je 5 belih, 4 črne in 3 rdeče kroglice. Iz posode potegnemo tri kroglice. Kolikšna je verjetnost, da bo med njimi po ena kroglica vsake barve, če:

   a) kroglice vračamo?

   b) kroglic ne vračamo?

5. Kolikšna je verjetnost, da imata v skupini n ljudi dva rojstni dan na isti dan? Prestopna leta zanemarite.

6. Dan je dobro premešan kup 16 kart, med katerimi so štirje piki. Kolikšna je verjetnost, da sta med prvimi osmimi kartami natanko dva pika?

7. Med 100 izdelki v seriji je 10 defektnih. Iz serije izberemo 10 izdelkov in jo zavrnemo, če je med njimi več kot en defekten. Kolikšna je verjetnost, da bo serija zavrnjena?

8. V posodi je 8 belih, 4 črne in 2 rdeči kroglici. Iz posode brez vračanja potegnemo sedem kroglic. Kolikšna je verjetnost, da bo razmerje barv enako kot v posodi?

9. Janez in Peter igrata namizni tenis. V vsaki rundi nekdo zmaga in oba sta enakovredna (ne glede na zgodovino), igrata pa, dokler eden od njiju ne dobi šest rund. Trenutni izid je 4:2 za Janeza. Kolikšna je verjetnost, da bo Janez na koncu tudi zmagal?

   Kaj pa, če Janez vselej zmaga z verjetnostjo 1/3 in igrata na dve točki razlike (trenutni izid je 0:0)?

   Namig: Rekurzivna formula

Računanje z dogodki:

$$
\begin{aligned}
A \cup B &= B \cup A & A \cap B &= B \cap A \\
A \cup (B \cup C) &= (A \cup B) \cup C & A \cap (B \cap C) &= (A \cap B) \cap C \\
A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) & A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \\
A \cup G &= G & A \cap G &= A \\
A \cup N &= A & A \cap N &= N \\
\overline{A \cup B} &= \bar{A} \cap \bar{B} & \overline{A \cap B} &= \bar{A} \cup \bar{B} \\
A \cup \bar{A} &= G & A \cap \bar{A} &= N \\
\overline{\bar{A}} &= A
\end{aligned}
$$

10. Poenostavite naslednji izraz z dogodki:

$$(B \cup C) \cap (B \cup \overline{C}) \cap (\overline{B} \cup C)$$

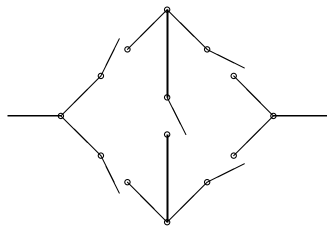
11. Dani so dogodki A, B in C. Matematično zapišite:

    a) dogodek, da se ne zgodi niti A niti B niti C;
    b) dogodek, da se zgodi natanko eden od teh treh dogodkov;
    c) dogodek, da se zgodita vsaj dva od teh treh dogodkov.

    Izračunajte še verjetnosti zgornjih dogodkov, če veste, da je $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.45$, $P(C) = 0.6$, $P(A \cap B) = 0.2$, $P(A \cap C) = 0.2$, $P(B \cap C) = 0.3$ in $P(A \cap B \cap C) = 0.1$.

    Opomba. Dogodki pod a), b) in c) tvorijo popoln sistem dogodkov.

12. V vezju, ki ga prikazuje spodnja skica, so vse možne kombinacije stanj stikal enako verjetne. Kolikšna je verjetnost, da vezje prepušča električni tok?



Načelo vključitev in izključitev:

$$\begin{aligned}
P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) &= P(A_1) + \cdots + P(A_n) - \\
&- P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - \cdots - P(A_{n-1} \cap A_n) + \\
&\cdots \\
&+ (-1)^{n+1} P(A_1 \cap \cdots \cap A_n)
\end{aligned}$$

13. Mama napiše pet različnih pisem in pripravi pet kuvert za ta pisma s samimi različnimi naslovi. Mimo pride navihani Petrček in povsem slučajno vtakne pisma v kuverte, v vsako kuverto po eno pismo. Kolikšna je verjetnost, da je vsaj eno pismo v pravi kuverti?

Geometrijska verjetnost:

$$P = \frac{\textit{mera ugodnih izidov}}{\textit{mera vseh izidov}}$$

Pri tem je mera lahko dolžina, ploščina itd.

14. Do šole je štiri minute hoda, vmes pa je semafor, na katerem dve minuti gori zelena, dve minuti pa rdeča luč. Od doma se odpravim pet minut pred začetkom pouka. Kolikšna je verjetnost, da pridem še pravočasno, če se držim predpisov? Kaj pa, če sta na poti dva semaforja?

15. Avtobus se ustavi na postaji med 6:55 in 7:05, in sicer z enakomerno porazdelitvijo. Sam pa sem nagnjen k zamujanju in pridem na postajo med 7:00 in 7:07, tudi z enakomerno porazdelitvijo in neodvisno od avtobusa.

    a) Kolikšna je verjetnost, da ujamem ta avtobus?

    b) Avtobus vozi do postaje, na kateri izstopim, še 55 minut, sam pa potem potrebujem še tri minute, da pridem do predavalnice. Predavanje se začne ob 8:00. Kolikšna je verjetnost, da pridem še pravočasno na predavanje? Če tega avtobusa ne ujamem, seveda zamudim.

16. *Buffonova igla.* Na list papirja z ravnimi vzporednimi črtami, razmaknjenimi za a, vržemo iglo dolžine b. Kolikšna je verjetnost, da igla seka katero od črt?

3. Pogojna verjetnost

Računanje pogojne verjetnosti po definiciji, izrek o popolni verjetnosti. Zapletenejši primeri pogojne verjetnosti, Bayesova formula. Neodvisnost. (4 ure)

Definicija pogojne verjetnosti:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Slika!

1. Iz množice $\{1, 2, \ldots 21\}$ na slepo izberemo eno število. Kolikšna je pogojna verjetnost, da je sodo, če vemo, da je deljivo s tri?

2. *Bertrandov paradoks*. Dane so tri škatle. V eni sta dva zlata kovanca, v drugi en zlat in en srebrn, v tretji pa dva srebrna. Dovoljeno nam je, da na slepo izberemo en kovanec (t. j. vseh šest z enako verjetnostjo). Če uganemo, kakšen je drugi kovanec v škatli, ki smo jo izbrali, dobimo kovanec. Kolikšna je verjetnost, da dobimo kovanec?

   Razmislek: Recimo, da je kovanec zlat. Potem vemo, da je prišel ali iz škatle z dvema zlatima kovancema ali pa iz škatle z enim zlatim in enim srebrnim kovancem. Ker sta obe škatli enako verjetni, je verjetnost, da bomo uganili, enaka 1/2, ne glede na to, kaj rečemo.

   Je s tem razmislekom kaj narobe?

3. *Monty–Hallov paradoks*. Dana so tri vrata, za enimi je skrit porsche, za dvema pa koza. Najprej izberemo ena vrata, ne da bi jih odprli, nakar vodja igre odpre ena izmed vrat, za katerima je koza in ki jih nismo izbrali. Nato nam ponudi, da se pri izbiri vrat premislimo. Kaj je bolje, premisliti se ali ne? Privzamemo, da so vse možnosti za vrata, za katerimi stoji porsche, enako verjetne.

Dogodka A in B sta neodvisna, če velja:

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$$

(t. j. $P(A \mid B) = P(A)$). Splošneje, dogodki $A_1, A_2, \ldots A_n$ so neodvisni, če za poljubne $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_n \le n$ velja:

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_n}) = P(A_{i_1})\, P(A_{i_2}) \ldots P(A_{i_n})$$

4. Na kupu so štiri karte: pikov kralj, pikova dama, srčev kralj in srčeva dama. Na

slepo izvlečemo eno izmed kart. Definirajmo naslednje dogodke:

$$\begin{aligned} A &:= [\text{izvlekli smo pika}] \\ B &:= [\text{izvlekli smo damo}] \\ C &:= [\text{izvlekli smo srčevega kralja ali pikovo damo}] \end{aligned}$$

Sta dogodka A in B neodvisna? Kaj pa A in C? Kaj pa B in C? Kako pa je z dogodki A, B in C, so neodvisni?

5. Danih je osem kart: as, kralj, dama, fant, 10, 9, 8 in 7. Slučajno potegnemo eno karto. Definirajmo naslednje dogodke:

$$\begin{aligned} A &:= [\text{karta je as, kralj, dama ali fant}] \\ B &:= [\text{karta je as, 9, 8 ali 7}] \\ C &:= [\text{karta je as, kralj, dama ali 10}] \end{aligned}$$

So dogodki A, B in C neodvisni?

6. Vržemo tri kovance. Meti so med seboj neodvisni, verjetnosti, da pade grb, pa niso nujno enake. Naj bo A dogodek, da se na prvem kovancu pojavi grb, B pa dogodek, da se grb pojavi na natanko dveh kovancih.

   a) Recimo, da so vsi trije kovanci pošteni, se pravi, da je verjetnost za grb pri vseh kovancih enaka $1/2$. Sta dogodka A in B neodvisna?

   b) Recimo, da je prvi kovanec pošten, druga dva pa ne: na vsakem od njiju se grb pojavi z verjetnostjo p. Pri katerih p sta A in B neodvisna?

7. Janez, Francelj in Tone gredo streljat zajce. Janez zadene z verjetnostjo $0{\cdot}1$, Francelj z verjetnostjo $0{\cdot}2$, Tone pa z verjetnostjo $0{\cdot}3$, neodvisno drug od drugega.

   a) Vsi pomerijo, ustrelijo in zajec je zadet. Kolikšna je pogojna verjetnost, da ga je Janez zadel?

   b) Ko pridejo do zajca, se izkaže, da ga je zadel natanko eden. Kolikšna je pogojna verjetnost, da je bil to Janez?

8. Andraž, Bojan, Cilka in Darja streljajo v tarčo. Andraž in Bojan streljata z modrimi, Cilka in Darja pa z rdečimi puščicami. Andraž zadene z verjetnostjo $0{\cdot}6$, Bojan z verjetnostjo $0{\cdot}7$, Cilka z verjetnostjo $0{\cdot}5$, Darja pa z verjetnostjo $0{\cdot}9$. Vsi hkrati pomerijo in ustrelijo, neodvisno drug od drugega. V tarči se znajdeta ena modra in ena rdeča puščica. Kolikšna je pogojna verjetnost, da sta to Bojanova in Darjina?

Izrek o popolni verjetnosti. *Če $H_1, H_2, \dots H_n$ tvorijo popoln sistem dogodkov (t. j. vedno se zgodi natanko eden izmed njih), velja:*

$$P(A) = P(H_1)\,P(A \mid H_1) + P(H_2)\,P(A \mid H_2) + \ldots + P(H_n)\,P(A \mid H_n)$$

9. V prvi posodi je 5 belih, 3 rdeče in 2 črni kroglici, v drugi posodi pa so tri bele in tri črne kroglice. Iz prve posode v drugo na slepo premestimo eno kroglico, nato pa iz druge potegnemo dve kroglici (brez vračanja). Kolikšna je verjetnost, da je med njima ena bela in ena črna?

10. Študent se od 50 izpitnih vprašanj nauči le 30. Za vsako vprašanje, ki se ga nauči, je potem še 30% verjetnosti, da pozabi odgovor, za vsako vprašanje, ki se ga ne nauči, pa je še 10% verjetnosti, da odgovor ugane. Na izpitu na slepo izbere tri vprašanja in izpit naredi, če pravilno odgovori na vsaj dve vprašanji. Kolikšna je verjetnost, da bo naredil izpit?

Bayesova formula. *Če $H_1, H_2, \dots H_n$ tvorijo popoln sistem dogodkov, velja:*

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i)\,P(A \mid H_i)}{P(H_1)\,P(A \mid H_1) + \ldots + P(H_n)\,P(A \mid H_n)}$$

11. Žena pošlja moža na trg po solato, ki jo prodajata dve branjevki, Francka in Micka. Verjetnost, da mož kupi solato pri Francki, je 40%, verjetnost, da kupi pri Micki, pa 60%. Francka ima 10%, Micka pa 20% nagnite solate. Mož prinese domov nagnito glavo solate in žena ga nahruli: "Drugič raje glej solato, ne pa Micke!" Kolikšna je verjetnost, da je mož res kupil solato pri Micki?

12. Matičnemu podjetju dobavljajo trije kooperanti: kooperant Alfa Deli dobavlja 20%, kooperant Bobo Deli 50%, kooperant Centro Deli pa 30% vseh delov. Kooperant Alfa Deli ima 5%, Bobo Deli 1%, Centro Deli pa 2% defektnih delov. Kontrolor v matičnem podjetju testira na slepo izbran del in izkaže se, da je defekten, zato zavzdihne: "Oh, že spet ti Alfa Deli!" Kolikšna je verjetnost, da je bil del dobavil kooperant Alfa Deli?

13. V prvi posodi je 6 belih in 4 rdeče kroglice, v drugi pa ena bela in ena rdeča. Najprej na slepo premestimo 3 kroglice iz prve posode v drugo, nato pa iz druge posode potegnemo dve kroglici (brez vračanja). Obe sta rdeči. Kolikšna je pogojna verjetnost, da so bile vse tri premeščene kroglice rdeče?

14. Miha se odpravi na obisk k vinogradnikom Janezu, Ivanu in Štefanu. Vsak mu ponudi kozarec vina. Janez mu ponudi šmarnico z verjetnostjo 60 %, Ivan z verjetnostjo 40 %, Štefan pa z verjetnostjo 10 %. Verjetnost, da Miho boli glava, ne da bi pil šmarnico, je 10 %, verjetnost, da ga boli po kozarcu šmarnice (ne glede

na to, čigavem), 40 %, po dveh kozarcih (ne glede na to, čigavih) 70 % in po treh kozarcih 100 %. Naslednji dan Miho boli glava in prijatelj Tone mu pravi: “Janez in Ivan sta ti gotovo dala šmarnico!” Kolikšna je pogojna verjetnost, da ima prav? Privzamemo, da vinogradniki izberejo vrsto vina neodvisno drug od drugega.

4. Slučajne spremenljivke

Pojem porazdelitve, porazdelitvena funkcija, porazdelitvena shema diskretno porazdeljene slučajne spremenljivke, porazdelitvena gostota zvezno porazdeljene slučajne spremenljivke. Ugotavljanje in prepoznavanje porazdelitev. Približni obrazci za binomsko porazdelitev. Transformacije (funkcije) slučajnih spremenljivk. Slučajni vektorji. Robne porazdelitve. Neodvisnost slučajnih spremenljivk. Transformacije slučajnih vektorjev. Pogojne porazdelitve. (12 ur)

Porazdelitev diskretne slučajne spremenljivke (t. j. take, ki svoje vrednosti zavzema le na končni ali števno neskončni množici) lahko opišemo s porazdelitveno shemo:

$$X \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots \end{pmatrix}$$

ki pomeni $P(X = a_1) = p_1$, $P(X = a_2) = p_2$ itd.
Porazdelitev vsake realne slučajne spremenljivke lahko opišemo s porazdelitveno funkcijo:

$$F_X(x) = P(X < x)$$

1. Vržemo standardno kocko in število pik, ki padejo, označimo z X. Zapišite in poimenujte porazdelitev te slučajne spremenljivke ter narišite graf njene porazdelitvene funkcije.

2. Neodvisno vržemo dva poštena kovanca in standardno kocko. Za vsako piko dobimo en tolar, za vsako cifro, ki pade, pa dva tolarja. Slučajna spremenljivka S naj predstavlja skupen znesek, ki ga dobimo. Zapišite njeno porazdelitev.

Porazdelitev zvezne slučajne spremenljivke lahko opišemo s poradelitveno gostoto p_X, za katero velja:

$$P(a < X < b) = P(a \le X \le b) = \int_a^b p_X(x)\,\mathrm{d}x$$

Tako velja:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x p_X(t)\,\mathrm{d}t$$

in za skoraj vsak x velja $p_X(x) = F'_X(x)$.
Kakor pri diskretnih slučajnih spremenljivkah velja:

$$p_1 + p_2 + \ldots = 1$$

tudi pri zveznih velja:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

3. Recimo, da hitro zavrtimo povsem simetrično kolo z označeno točko na obodu. Kolo se zelo počasi ustavlja. Slučajna spremenljivka X naj predstavlja kot, pri katerem se je ustavila označena točka (kot merimo od 0 do 2π). Zapišite porazdelitveno funkcijo te slučajne spremenljivke, poimenujte porazdelitev in zapišite še njeno gostoto.

4. Rok in Simona se zmenita na določenem mestu točno ob 18:00, prideta pa enkrat med 18:00 in 18:10, in sicer z enakomerno porazdelitvijo in neodvisno drug od drugega. Ljubosumni Maks vse od 18:00 opreza za vogalom in čaka, dokler ne prideta obadva. Slučajna spremenljivka M naj predstavlja, koliko časa je čakal Maks. Zapišite porazdelitveno funkcijo in gostoto te slučajne spremenljivke.

5. Naj bo X število šestic, ki padejo v desetih neodvisnih metih standardne kocke. Zapišite in poimenujte porazdelitev te slučajne spremenljivke.

Naj bo $X \sim \mathrm{B}(n, p)$ in n velik. Če je p majhen (recimo manjši od $1/\sqrt{n}$), velja Poissonov obrazec:

$$P(X = k) \approx \frac{(np)^k e^{-np}}{k!}$$

Če pa je p dovolj stran od 0 in 1 (recimo med $1/\sqrt{n}$ in $1 - 1/\sqrt{n}$) in k blizu np, velja Laplaceova lokalna formula:

$$P(X = k) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\, e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}$$

6. Naj bo X spet število šestic, ki padejo v desetih neodvisnih metih standardne kocke. Preverite, kako natančna sta Poissonov obrazec in Laplaceova lokalna formula pri izračunu $P(X=1)$.

7. Naj bo $X \sim \mathrm{B}(50, 0{\dot{}}4)$. Izračunajte $P(X=20)$. Točen rezultat primerjajte z rezultatoma, dobljenima po Poissonovem obrazcu in po Laplaceovi lokalni formuli.

8. Naj bo $X \sim \mathrm{B}(1000, 0{\dot{}}99)$. Izračunajte $P(X=990)$.

Če je $X \sim \mathrm{B}(n,p)$, $a < b$ in so izpolnjeni pogoji za uporabo Laplaceove lokalne formule, a in b, pa nista preblizu, velja Laplaceova integralska formula:

$$P(a < X < b) \approx P(a \le X \le b) \approx \Phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{npq}}\right)$$

Tu je $q = 1-p$, Φ pa je funkcija napake:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2}\,\mathrm{d}t$$

ki je liha, velja pa še $\lim_{x\to\infty} \Phi(x) = 1/2$ (graf!). V literaturi so definicije funkcije Φ različne, zato je treba paziti! Za a in b je v povprečju najugodneje jemati števila, ki so na polovici med dvema zaporednima celima številoma (tako npr. $2 < X \le 7$ interpretiramo kot $2{\dot{}}5 < X < 7{\dot{}}5$)

9. V tovarni vsak dan proizvedejo 1600 izdelkov. Za vsakega je verjetnost, da bo okvarjen, enaka 10%.

   a) Kolikšna je verjetnost, da bo okvarjenih natanko 160 izdelkov? Kolikšna pa je verjetnost, da bo okvarjenih natanko 175 izdelkov?

   b) Kolikšna je verjetnost, da bo okvarjenih več kot 175 izdelkov? Kaj pa, da bo okvarjenih manj kot 150 izdelkov?

   c) okvarjene izdelke spravijo v skladišče, kjer jih popravijo in ki se dnevno prazni. Najmanj kako veliko mora biti skladišče, če naj bo verjetnost, da bo premajhno, največ $0{\dot{}}05$?

10. Zavarovalnica je proti nezgodi zavarovala 1000 oseb. Vsako od njih doleti nezgoda z verjetnostjo $0{\dot{}}0015$ in osebe so med seboj neodvisne. Kolikšna je verjetnost, da se noben zavarovanec ne ponesreči? Kolikšna pa je verjetnost, da se ponesrečita več kot dva? Točen rezultat primerjajte z rezultati, dobljenimi po Poissonovem obrazcu, Laplaceovi lokalni in Laplaceovi integralski formuli.

11. Verjetnost, da je izdelek prvovrsten, je 60%. Najmanj koliko izdelkov moramo naročiti, če naj bo v pošiljki z verjetnostjo najmanj $0{\dot{}}99$ vsaj 59% izdelkov prvovrstnih?

12. Verjetnost, da je izdelek prvovrsten, je 10%. Najmanj koliko izdelkov moramo naročiti, če naj bo v pošiljki z verjetnostjo najmanj 0˙95 vsaj 100 izdelkov prvovrstnih?

13. Naj bo X število metov standardne kocke, ki jo mečemo, dokler ne pade šestica. Meti so med seboj neodvisni. Zapišite in poimenujte porazdelitev slučajne spremenljivke X.

14. Naj bo X število metov standardne kocke, ki jo mečemo, dokler šestica ne pade desetkrat. Meti so med seboj neodvisni. Zapišite in poimenujte porazdelitev slučajne spremenljivke X.

15. Naj bo X število metov poštenega kovanca, ki ga mečemo, dokler ne pade cifra, takoj za njo pa še grb. Meti so med seboj neodvisni. Zapišite in poimenujte porazdelitev slučajne spremenljivke X.

16. Naj bo X število metov poštenega kovanca, ki ga mečemo, dokler ne pade tako cifra kot tudi grb. Meti so med seboj neodvisni. Zapišite porazdelitev slučajne spremenljivke X. Je le-ta kaj povezana s kako znano porazdelitvijo?

17. Med 16 kartami so štirje piki. Na slepo in brez vračanja izvlečemo sedem kart. Naj bo X število pikov med njimi. Zapišite in poimenujte porazdelitev slučajne spremenljivke X.

18. Danih je 12 praznih škatel. Mimo pride Janezek, slučajno izbere tri škatle in v vsako vrže po eno kroglico. Mimo pride še Marička, slučajno in neodvisno od Janezka izbere štiri škatle in prav tako v vsako vrže po eno kroglico. Naj bo X število škatel, v katerih sta dve kroglici. Zapišite in poimenujte porazdelitev te slučajne spremenljivke.

19. Slučajna spremenljivka X ima diskretno porazdelitev, podano po predpisu:

$$P(X = k) = ck \quad k = 1, 2, \ldots 10$$

Izračunajte konstanto c.

20. Naj bo $a < b$. Slučajna spremenljivka X je porazdeljena zvezno z gostoto:

$$p_X(x) = \begin{cases} c & , \quad a < x < b \\ 0 & , \quad \text{sicer} \end{cases}$$

Izračunajte konstanto c, poimenujte porazdelitev in določite porazdelitveno funkcijo $F_X(x)$.

21. Naj bo $\lambda > 0$. Slučajna spremenljivka X je porazdeljena zvezno z gostoto:

$$p_X(x) = \begin{cases} ce^{-\lambda x} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad \text{sicer} \end{cases}$$

Izračunajte konstanto c, poimenujte porazdelitev in določite porazdelitveno funkcijo $F_X(x)$. Izračunajte še $P(1 < X < 2)$.

22. Slučajna spremenljivka X je porazdeljena diskretno po naslednji shemi:

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0\dot{}1 & 0\dot{}3 & 0\dot{}2 & 0\dot{}4 \end{pmatrix}$$

Zapišite porazdelitev slučajne spremenljivke $Y = X^2$.

23. Slučajna spremenljivka X je porazdeljena geometrijsko $\mathrm{G}(p)$. Zapišite porazdelitev slučajne spremenljivke $Y := \sin(\pi X/2)$.

24. Na razpolago imamo generator slučajnih števil, ki generira enakomerno porazdelitev $\mathrm{E}[0, 1]$. Kako bi generirali porazdelitev slučajne spremenljivke X iz 22. naloge? Kaj pa eksponentno porazdelitev $\mathrm{Exp}(\lambda)$?

Normalna (Gaussova) porazdelitev $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$ *je porazdelitev z gostoto:*

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Standardizirana normalna porazdelitev $\mathrm{N}(0, 1)$ *ima potemtakem gostoto:*

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

in porazdelitveno funkcijo $F(x) = \frac{1}{2} + \Phi(x)$.

25. Slučajna spremenljivka Z je porazdeljena standardizirano normalno. Izračunajte $P(Z < 1\dot{}5)$.

Naj bo X *zvezno porazdeljena slučajna spremenljivka z zalogo vredosti na* (a, b) *in gostoto* p_X. *Nadalje naj bo* $f\colon (a, b) \to (c, d)$ *bijektivna zvezno odvedljiva preslikava, katere odvod ni nikjer enak* 0. *Tedaj ima slučajna spremenljivka* $Y := f(X)$ *gostoto:*

$$p_Y(y) = p_X\big(f^{-1}(y)\big)\big|(f^{-1})'(y)\big|$$

26. Slučajna spremenljivka X je porazdeljena normalno $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$. Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka $Y := aX + b$?

Če je $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma)$, velja:

$$P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

Laplaceova integralska formula tako ne pomeni nič drugega kot to, da za velike n in p, ki ni preblizu 0 ali 1, velja:

$$\mathrm{B}(n, p) \approx \mathrm{N}\big(np, \sqrt{npq}\big)$$

kjer je $q = 1 - p$.

27. Slučajna spremenljivka X je porazdeljena normalno $\mathrm{N}(9, 5)$. Izračunajte $P(X < 0)$.

28. Slučajna spremenljivka Z je porazdeljena standardizirano normalno. Poiščite porazdelitvi slučajnih spremenljivk $X = e^Z$ in $Y = Z^2$. Poimenujte porazdelitev slučajne spremenljivke Y.

Robne porazdelitve:

$$P(X = x) = \sum_y P(X = x, Y = y)$$

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x, y)\,\mathrm{d}y$$

29. Iz posode, v kateri so 3 rdeče, 2 modri in 5 belih kroglic, na slepo in brez vračanja izvlečemo tri kroglice. Naj bo R število rdečih, M pa število modrih med njimi. Zapišite porazdelitev slučajnega vektorja (R, M) ter določite in poimenujte še robni porazdelitvi. Sta slučajni spremenljivki R in M neodvisni? Zapišite in poimenujte še porazdelitev slučajne spremenljivke $R + M$.

30. Slučajni vektor (X, Y) je porazdeljen po naslednji shemi:

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$
$X = -1$	0˙05	0˙1	
$X = 0$	0˙1		
$X = 1$	0˙05		

Dopolnite tabelo tako, da bosta slučajni spremenljivki X in Y neodvisni. Poiščite še robni porazdelitvi in porazdelitev razlike $Y - X$.

31. Dane so neodvisne slučajne spremenljivke $X_1 \sim \mathrm{Be}(p_1)$, $X_2 \sim \mathrm{Be}(p_2)$ in $X_3 \sim \mathrm{Be}(p_3)$. Kako je porazdeljena njihova vsota $S := X_1 + X_2 + X_3$? Poimenujte njeno porazdelitev za primer, ko je $p_1 = p_2 = p_3$.

Splošneje, naj bodo $X_1, \ldots X_n \sim \mathrm{Be}(p)$ neodvisne slučajne spremenljivke. Kako je porazdeljena vsota $S := X_1 + \ldots + X_n$?

32. Naj bosta $S_1 \sim \mathrm{B}(n_1, p)$ in $S_2 \sim \mathrm{B}(n_2, p)$ neodvisni slučajni spremenljivki. Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka $S := S_1 + S_2$?

33. Naj bosta $S_1 \sim \mathrm{P}(\lambda_1)$ in $S_2 \sim \mathrm{P}(\lambda_2)$ neodvisni slučajni spremenljivki. Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka $S := S_1 + S_2$?

34. Naj bodo $X_1, \ldots X_n \sim \mathrm{G}(p)$ neodvisne slučajne spremenljivke. Kako je porazdeljena vsota $S := X_1 + \ldots + X_n$?

35. Naj bosta $S_1 \sim \mathrm{P}(n_1, p)$ in $S_2 \sim \mathrm{P}(n_2, p)$ neodvisni slučajni spremenljivki. Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka $S := S_1 + S_2$?

36. Določeni pojavi, ki se pojavljajo v času (npr. telefonski klici, nesreče, radioaktivni razpadi), tvorijo *Poissonov proces* z intenziteto λ, če je število pojavov, ki se zgodijo v katerem koli časovnem intervalu dolžine t, porazdeljeno po Poissonu $\mathrm{P}(\lambda t)$, in če za poljubna disjunktna časovna intervala velja, da je število pojavov, ki se zgodijo v prvem, neodvisno od števila pojavov, ki se zgodijo v drugem časovnem intervalu. Naj bo T_n slučajna spremenljivka, ki pove čas, ki mine od izbranega trenutka do n-tega pojava, ki se zgodi po izbranem trenutku. Kako je porazdeljena ta slučajna spremenljivka? Kako za $n = 1$ še imenujemo to porazdelitev?

37. Naj bodo $X_1, \ldots X_n \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ neodvisne slučajne spremenljivke. Kako je porazdeljena vsota $S := X_1 + \ldots + X_n$?

38. Naj bo $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ ter naj bosta $S_1 \sim \mathrm{Gama}(n_1, \lambda)$ in $S_2 \sim \mathrm{Gama}(n_2, \lambda)$ neodvisni slučajni spremenljivki. Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka $S := S_1 + S_2$?

39. Slučajni vektor (X, Y) je porazdeljen zvezno z naslednjo gostoto:

$$p_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} c\,e^{-x} & , x > y > 0 \\ 0 & , \text{sicer} \end{cases}$$

Poiščite konstanto c ter robni gostoti p_X in p_Y. Sta slučajni spremenljivki X in Y neodvisni? Izračunajte še $P(2 < Y < 3)$, $P(Y < X)$ in $P(2Y < X)$.

Dan naj bo slučajni vektor (X, Y) s porazdelitveno gostoto $p_{X,Y}$. Iščemo porazdelitev slučajne spremenljivke Z, ki se deterministično izraža z X in Y. Če je ta zveza oblike:

$$Y = g(X, Z)$$

kjer je $g(x, z)$ za vsak x naraščajoča in zvezno odvedljiva v z, lahko zapišemo:

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{g(x,z)} p_{X,Y}(x, y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

Z odvajanjem pod integralskim znakom dobimo:

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{X,Y}\big(x, g(x, z)\big)\,\frac{\partial g}{\partial z}(x, z)\,\mathrm{d}x$$

Splošneje se da izpeljati:

> *Če velja $Y = g(X, Z)$ in je g dovolj lepa funkcija, velja:*
>
> $$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{X,Y}\big(x, g(x,z)\big) \left|\frac{\partial g}{\partial z}(x,z)\right| \, \mathrm{d}x$$

40. Slučajni vektor (X, Y) je porazdeljen zvezno z naslednjo gostoto:

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} e^{-x} & , \; x > y > 0 \\ 0 & , \; \text{sicer} \end{cases}$$

Zapišite porazdelitev slučajne spremenljivke $Z := X + Y$.

41. Naj bosta $S_1 \sim \text{Gama}(a_1, \lambda)$ in $S_2 \sim \text{Gama}(a_2, \lambda)$ neodvisni slučajni spremenljivki. Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka $S := S_1 + S_2$?

42. Naj bodo $Z_1, \ldots Z_n$ neodvisne slučajne spremenljivke, porazdeljene standardizirano normalno. Kako je porazdeljena vsota $Z_1^2 + \ldots + Z_n^2$?

43. Naj bosta $X_1 \sim \mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1)$ in $X_2 \sim \mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2)$ neodvisni slučajni spremenljivki. Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka $X := X_1 + X_2$?

44. Avtobus pride na postajo ob času, ki je porazdeljen normalno $\mathrm{N}(7{:}00, 3\,\mathrm{min})$, sam pa sem nagnjen k zamujanju in pridem na postajo ob času, ki je porazdeljen normalno $\mathrm{N}(7{:}01, 4\,\mathrm{min})$. Kolikšna je verjetnost, da še ujamem avtobus?

45. Slučajni vektor (X, Y) je porazdeljen zvezno z gostoto:

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{c}{(1+x+y)^3} & , \; x, y > 0 \\ 0 & , \; \text{sicer} \end{cases}$$

Zapišite porazdelitev slučajne spremenljivke $Z := Y/X$ in izračunajte konstanto c. Izračunajte še $P(X < 2Y)$.

46. Slučajni spremenljivki X in Y sta neodvisni in porazdeljeni enakomerno na intervalu $[0, 1]$. Zapišite porazdelitveno funkcijo slučajne spremenljivke $Z := XY$.

47. Slučajni vektor (X, Y) ima naslednjo porazdelitveno gostoto:

$$p_{X,Y}(x,y) = \frac{Cx^2y^2}{(1+x^2+y^2)(x^2+y^2)^{5/2}}$$

Izračunajte porazdelitveno gostoto slučajne spremenljivke $Z := X^2+Y^2$ (s konstanto vred).

48. Ministrstvo dobi vsak dan na mizo slučajno število prošenj, ki je porazdeljeno po Poissonovem zakonu $\mathrm{P}(\lambda)$. Dnevi so med seboj neodvisni. Ministrstvo vsak dan razreši eno prošnjo, če jo seveda ima, morebitne preostale pa pusti za kasneje. Kolikšna je verjetnost, da ministrstvu po dveh dneh dela preostaneta vsaj še dve nerazrešeni prošnji?

49. V avtobusu, ki ima 32 sedežev, je 30 potnikov. Vsak potnik bo z verjetnostjo 1/30 na naslednji postaji izstopil, neodvisno od drugih potnikov. Število potnikov, ki bodo na naslednji postaji vstopili, pa je porazdeljeno po Poissonu P(1) in seveda neodvisno od izstopnih namer trenutnih potnikov. Približno izračunajte verjetnost, da ne bodo mogli vsi potniki sedeti, ko bo avtobus speljal s postaje.

   Namig: Dogodek, da izstopita več kot dva potnika in vseeno ne bo dovolj sedežev za vse, je tako malo verjeten, da ga lahko zanemarimo.

50. Porazdelitev slučajnega vektorja (X, Y) je podana z naslednjo tabelo:

	$Y=0$	$Y=1$	$Y=2$
$X=-1$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{6}$
$X=0$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	0
$X=1$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

   Določite pogojno porazdelitev slučajne spremenljivke X glede na $Y=0$ in Y glede na $X=-1$.

51. Dani sta neodvisni slučajni spremenljivki $X \sim \mathrm{P}(\lambda)$ in $Y \sim \mathrm{P}(\mu)$. Določite pogojno porazdelitev slučajne spremenljivke X glede na $Z := X + Y$.

Zvezne pogojne porazdelitve:

$$p_X(x \mid Y = y) = \frac{p_{X,Y}(x, y)}{p_Y(y)}$$

52. Slučajni vektor (X, Y) je porazdeljen zvezno z naslednjo gostoto:

$$p_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} e^{-x} & , x > y > 0 \\ 0 & , \text{sicer} \end{cases}$$

   Določite pogojno porazdelitev slučajne spremenljivke X glede na Y in Y glede na X.

5. Številske karakteristike

Matematično upanje, disperzija, pogojno matematično upanje. Neposreden izračun matematičnega upanja (metoda indikatorjev). Kovarianca, kovariančna matrika, Pearsonov korelacijski koeficient. Višji momenti, asimetrija, sploščenost. Vrstilne karakteristike. (6 ur)

Matematično upanje:

$$E(X) = \sum_x x\,P(X=x) \qquad E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,p_X(x)\,\mathrm{d}x$$

$$E\big(f(X)\big) = \sum_x f(x)\,P(X=x) \qquad E\big(f(X)\big) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,p_X(x)\,\mathrm{d}x$$

Disperzija (varianca):

$$D(X) = E\big((X-E(X))^2\big) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$$

U-metoda:

$$\begin{aligned} E(X) &= u + E(X-u) \\ D(X) &= D(X-u) = E\big((X-u)^2\big) - \big(E(X-u)\big)^2 \end{aligned}$$

Standardni odklon: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

1. Slučajna spremenljivka X je porazdeljena diskretno po naslednji shemi:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0\dot{}1 & 0\dot{}3 & 0\dot{}1 & 0\dot{}1 & 0\dot{}4 \end{pmatrix}$$

   Izračunajte $E(X)$, $D(X)$ in $\sigma(X)$.

2. Slučajna spremenljivka X je porazdeljena eksponentno $\mathrm{Exp}(\lambda)$. Izračunajte $E(X)$, $D(X)$ in $E(e^{-X})$.

$$\begin{aligned} E(aX+b) &= aE(X) + b \\ E(X+Y) &= E(X) + E(Y) \end{aligned}$$

3. Slučajna spremenljivka X je porazdeljena zvezno z naslednjo gostoto:

$$p_X(x) = \frac{2}{\pi(1+x^2)^2}$$

   Izračunajte $E(1+X^2)$ in $D(X)$.

$$E\big(f(X,Y)\big) = \sum_x \sum_y f(x,y)\, P(X=x, Y=y)$$
$$E\big(f(X,Y)\big) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, p_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

4. Slučajni vektor (X,Y) je porazdeljen zvezno z naslednjo gostoto:

$$p_{X,Y}(x,y) = \frac{c}{(1+x^2+y^2)^3}$$

   Izračunajte konstanto c ter še $E(X)$, $E(Y)$, $E(X^2)$, $E(Y^2)$ in $E(X^2+Y^2)$.

5. Slučajna spremenljivka Z naj bo porazdeljena standardizirano normalno. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ izračunajte $E(Z^n)$. *Namig: indukcija.*

Velja:

$$D(aX+b) = a^2 D(X)$$

Če sta X in Y neodvisni, velja:

$$E(XY) = E(X)\,E(Y)$$
$$D(X+Y) = D(X) + D(Y)$$

Pozor! *Zakaj ne velja:*

$$D(X+X) = D(X) + D(X) = 2D(X)$$

6. *Matematično upanje in disperzija binomske porazdelitve.*

7. *Matematično upanje in disperzija porazdelitve gama.*

8. Dani sta neodvisni slučajni spremenljivki $X \sim \chi^2(3)$ in $Y \sim \chi^2(5)$. Izračunajte $D(3X-Y)$ in $E\big((X+2Y)^2\big)$.

9. Za okroglo mizo sedi 8 gostov, ki igrajo karte. Vsak ima v rokah eno karto, razdeljeno z dobro premešanega kupa standardnih 52 kart. Vsak lahko vidi svojo karto ter karti svojih sosedov na levi in na desni. Posamezen igralec stavi svojo ženo, če ima asa in hkrati nobeden od njegovih sosedov nima asa. Označimo z S število igralcev, ki stavijo svojo svojo ženo. Izračunajte $E(S)$ in $D(S)$.

10. *Matematično upanje in disperzija geometrijske in Pascalove porazdelitve.*

11. *Izračun matematičnega upanja hipergeometrijske porazdelitve z indikatorji.*

12. Diskretna porazdelitev slučajnega vektorja (X, Y) je podana z naslednjo tabelo:

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 3$
$X = 0$	0˙05	0˙1	0˙2
$X = 1$	0˙15	0	0˙15
$X = 4$	0˙2	0˙1	0˙05

Izračunajte $E(XY^2)$, $E(Y \mid X = 4)$, $E(Y^2 \mid X = 4)$ in $E(XY^2 \mid X = 4)$.

13. Slučajni vektor (X, Y) je porazdeljen zvezno z naslednjo gostoto:

$$p_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 3(x^2y + xy^2) & , \quad 0 \le x, y \le 1 \\ 0 & , \quad \text{sicer} \end{cases}$$

Izračunajte $E(Y \mid X = x)$ in $E(XY \mid X = x)$.

Kovarianca:

$$K(X, Y) := E\big((X - E(X))\,(Y - E(Y))\big) = \\ = E(XY) - E(X)\,E(Y)$$

Velja $K(X, X) = D(X)$ in $K(X, Y) = K(Y, X)$. Če je $K(X, Y) = 0$, pravimo, da sta slučajni spremenljivki X in Y nekorelirani. Poljubni neodvisni slučajni spremenljivki sta nekorelirani, nekoreliranost pa še ne pomeni neodvisnosti.

Korelacijski koeficient:

$$r(X, Y) = \frac{K(X, Y)}{\sigma(X)\,\sigma(Y)}$$

Velja $-1 \le r(X, Y) \le 1$.

14. Diskretna porazdelitev slučajnega vektorja (X, Y) je podana z naslednjo tabelo:

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 3$
$X = 0$	0˙05	0˙1	0˙2
$X = 1$	0˙15	0	0˙15
$X = 4$	0˙2	0˙1	0˙05

Izračunajte $K(X, Y)$ in $r(X, Y)$.

15. Diskretna porazdelitev slučajnega vektorja (X, Y) je podana z naslednjo tabelo:

	$Y = -1$	$Y = 0$	$Y = 1$
$X = -1$	0˙1	0	0˙1
$X = 0$	0	0˙6	0
$X = 1$	0˙1	0	0˙1

Dokažite, da sta slučajni spremenljivki X in Y nekorelirani. Sta tudi neodvisni?

16. Slučajni vektor (X, Y) je porazdeljen zvezno z naslednjo gostoto:

$$p_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 3(x^2y + xy^2) & , \quad 0 \le x, y \le 1 \\ 0 & , \quad \text{sicer} \end{cases}$$

Izračunajte $K(X, Y)$ in $r(X, Y)$.

Za slučajna vektorja $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_m \end{bmatrix}$ *in* $\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}$ *definiramo* **kovariančno matriko***:*

$$K(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) := \begin{bmatrix} K(X_1, Y_1) & \cdots & K(X_1, Y_n) \\ \vdots & & \vdots \\ K(X_m, Y_1) & \cdots & K(X_m, Y_n) \end{bmatrix} = E(\mathbf{X}\mathbf{Y}^T) - E(\mathbf{X})\, E(\mathbf{Y})^T$$

Za en sam slučajni vektor definirajmo $K(\mathbf{X}) := K(\mathbf{X}, \mathbf{X})$.
Za poljubni deterministični matriki A *in* B *velja* $K(A\mathbf{X}, B\mathbf{Y}) = A\, K(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\, B^T$.

17. Slučajni vektor (X, Y, Z) ima naslednjo kovariančno matriko:

$$K = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Določite parameter a tako, da bosta slučajni spremenljivki $U := aX + 2Y + Z$ in $V := X - Y + aZ$ nekorelirani.

Asimetrija:

$$A(X) = \frac{E\big((X - E(X))^3\big)}{\big(D(X)\big)^{3/2}}$$

Sploščenost (kurtozis)*:*

$$K(X) = \frac{E\big((X - E(X))^4\big)}{\big(D(X)\big)^2} - 3$$

Normalno porazdeljena slučajna spremenljivka ima sploščenost nič. Skica porazdelitev z različno predznačenimi asimetrijami in sploščenostmi.

18. Slučajna spremenljivka X je porazdeljena eksponentno $\mathrm{Exp}(\lambda)$. Izračunajte njeno asimetrijo $A(X)$ in sploščenost $K(X)$.

Število q_α je α-ti **kvantil**, *če velja:*

$$P(X < q_\alpha) < \alpha,\ \ P(X > q_\alpha) > 1 - \alpha$$

Pri zveznih porazdelitvah pa velja:

$$F_X(q_\alpha) = \alpha$$

Mediana $m = q_{1/2}$ je nadomestek za matematično upanje, semiinterkvartilni razmik:

$$s = \frac{q_{3/4} - q_{1/4}}{2}$$

pa za varianco. Pozor: porazdelitvi:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \quad \textit{in} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

imata enaki mediani, ne pa tudi matematičnih upanj.

19. Slučajna spremenljivka X je porazdeljena zvezno z naslednjo gostoto:

$$p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1+x)^2} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad \text{sicer} \end{cases}$$

Pokažite, da $E(X)$ ne obstaja, ter izračunajte njeno mediano in semiinterkvartilni razmik.

6. Karakteristične funkcije

Osnove, inverzna formula, konvolucijski izrek. (3 ure)

1. Izračunajte karakteristično funkcijo slučajne spremenljivke, ki je porazdeljena geometrijsko $\mathrm{G}(p)$.
2. Izračunajte karakteristično funkcijo slučajne spremenljivke, ki je porazdeljena eksponentno $\mathrm{Exp}(\lambda)$.
3. Izračunajte karakteristično funkcijo slučajne spremenljivke, ki je porazdeljena zvezno z gostoto $p_X(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$.

Če sta X in Y neodvisni, je $\phi_{X+Y} = \phi_X \phi_Y$.

4. Karakteristična funkcija binomske porazdelitve.
5. Karakteristična funkcija Pascalove porazdelitve.
6. Karakteristična funkcija porazdelitve gama.

Inverzna formula. *Če je slučajna spremenljivka X porazdeljena zvezno z gostoto p, ki je v dani točki x odvedljiva, velja formula:*

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) e^{-itx} \, \mathrm{d}t$$

kjer je ϕ karakteristična funkcija slučajne spremenljivke X (pod pogojem, da zgornji integral obstaja).

7. Slučajna spremenljivka X ima naslednjo karakteristično funkcijo:

$$\phi_X(t) = \begin{cases} 1 - |x| & ; \ |x| \le 1 \\ 0 & ; \ \text{sicer} \end{cases}$$

   Rekonstruirajte njeno porazdelitev.

8. Rekonstruirajte porazdelitev slučajne spremenljivke s karakteristično funkcijo $\phi_X(t) = e^{-|t|}$.
9. Rekonstruirajte porazdelitev slučajne spremenljivke s karakteristično funkcijo:

$$\phi_X(t) = \frac{\cos t + 2\cos^2 t + 2i \sin t \cos t}{3}$$

10. Neodvisne slučajne spremenljivke $X_1, \ldots X_n$ imajo *Cauchyjevo porazdelitev*, t. j. zvezno porazdelitev z gostoto:

$$p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

Določite porazdelitev slučajne spremenljivke:

$$\overline{X} := \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$$

7. Limitni izreki

Šibki in krepki zakon velikih števil. Centralni limitni izrek. (2 uri)

1. *Standardni slučajni sprehod* je zaporedje slučajnih spremenljivk $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, kjer so $X_1, X_2, \ldots$ neodvisne in:

$$X_i \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

   Ali zaporedje S_n/n konvergira proti nič v verjetnosti? Kaj pa skoraj gotovo?

2. Naj bo spet S_n standardni slučajni sprehod. Pokažite, da se le-ta skoraj gotovo vrne v izhodišče, t. j. da z verjetnostjo 1 obstaja tak $n \in \mathbb{N}$, da je $S_n = 0$.

3. Naj bo spet S_n standardni slučajni sprehod. Definirajmo slučajne spremenljivke T_n po predpisu:

$$T_n = \begin{cases} \dfrac{S_n}{n} & ; S_n \neq 0 \\ 2 & ; S_n = 0 \end{cases}$$

   Pokažite, da zaporedje T_n konvergira proti nič v verjetnosti, vendar pa je skoraj gotovo divergentno.

Centralni limitni izrek. *Če je S vsota veliko neodvisnih slučajnih spremenljivk z dovolj lepimi porazdelitvami, od katerih nobena posebej ne izstopa, je približno $S \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma)$, kjer je $\mu = E(S)$ in $\sigma^2 = D(S)$. Če je torej:*

$$S = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

velja:

$$\mu = E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n)$$
$$\sigma^2 = D(X_1) + D(X_2) + \ldots + D(X_n)$$

4. Slučajne spremenljivke $X_1, \ldots X_{100}$ so neodvisne in porazdeljene diskretno po naslednji shemi:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0\text{'}5 & 0\text{'}1 & 0\text{'}3 & 0\text{'}1 \end{pmatrix}$$

   Ocenite $P(170 < X_1 + \ldots + X_{100} < 210)$ in utemeljite odgovor.

5. Slučajna spremenljivka X ima porazdelitev hi kvadrat s 100 prostostnimi stopnjami. Približno izračunajte $P(X > 110)$ in $P(90 < X < 110)$. Odgovor utemeljite!

6. Potapljač se potaplja, dokler ne nabere 80 biserov. Pri vsakem potopu nabere največ en biser, pa še tega le z verjetnostjo 20%. Potopi so med seboj neodvisni.

a) Kolikšno je pričakovano število potopov (matematično upanje)?

b) Ocenite verjetnost, da se bo moral potopiti več kot 450-krat. Odgovor utemeljite (možni sta dve uporabi centralnega limitnega izreka)!

8. Točkasto ocenjevanje parametrov

Doslednost in nepristranskost. Srednji kvadratni odmik. Pridobivanje cenilk: metoda momentov in metoda maksimalne zanesljivosti. (3 ure)

Cenilka $\hat{\zeta}$ parametra ζ je nepristranska, če je $E(\hat{\zeta}) = \zeta$. Pristranskost cenilke $\hat{\zeta}$ definiramo kot:

$$B(\hat{\zeta}) := E(\hat{\zeta}) - \zeta$$

Cenilka je dosledna, če za vsak $\varepsilon > 0$ velja:

$$\lim_{n\to\infty} P(|\hat{\zeta} - \zeta| < \varepsilon) = 1$$

Zadosten pogoj za doslednost je, da velja $\lim_{n\to\infty} q(\hat{\zeta}) = 0$, kjer je $q(\hat{\zeta})$ srednji kvadratni odmik, definiran po predpisu:

$$q(\hat{\zeta}) := E\big[(\hat{\zeta} - \zeta)^2\big] = D(\hat{\zeta}) + \big(B(\hat{\zeta})\big)^2$$

Manjši kot je srednji kvadratni odmik, učinkovitejša je cenilka.

1. Je vzorčno povprečje dosledna cenilka parametra a pri zvezni porazdelitvi z gostoto:

$$p(x) = \frac{1}{\pi\big(1 + (x-a)^2\big)}$$

2. Populacija je porazdeljena po Poissonu $\mathrm{P}(\lambda)$. Dokažite, da sta $\overline{X}$ in S^2 obe nepristranski cenilki za λ. Katera ima manjšo disperzijo?

Metoda momentov temelji na tem, da za cenilke populacijskih momentov $z_k = E(X^k)$ vzamemo:

$$\hat{z}_k = \frac{X_1^k + X_2^k + \ldots + X_n^k}{n}$$

Tako neznane parametre $\zeta_1, \ldots \zeta_r$ najprej izrazimo z $z_1, \ldots z_r$; na isti način se potem cenilke $\hat{\zeta}_1, \ldots \hat{\zeta}_r$ izražajo z $\hat{z}_1, \ldots \hat{z}_r$. Cenilke $\hat{z}_k$ so nepristranske in dosledne, zato so tudi cenilke $\hat{\zeta}_k$, dobljene po metodi momentov, vedno dosledne. Niso pa nujno nepristranske.

3. Populacija X je porazdeljena eksponentno $\mathrm{Exp}(1/\alpha)$, kjer je $\alpha > 0$ neznan parameter. Po metodi momentov poiščite cenilko za α. Je cenilka nepristranska? Je dosledna?

4. Populacija X je porazdeljena diskretno po naslednji shemi:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1-2a-b & a & b & a \end{pmatrix}$$

Po metodi momentov poiščite cenilki za parametra a in b. Ocenite ju iz naslednjega vzorca:

$$-1, 0, 1, 1, 0, 0, -1, 2, 1, 2$$

5. Populacija X je porazdeljena zvezno z naslednjo gostoto:

$$p_X(x) = \frac{1}{2\alpha} \exp\left(-\frac{|x|}{\alpha}\right)$$

Po metodi momentov poiščite cenilko za neznani parameter α.

Naj bo $p(x, \zeta)$ verjetnostna funkcija ali gostota (splošno, verjetje) neke porazdelitve z neznanim parametrom ζ. Metoda maksimalne zanesljivosti (največjega verjetja) išče cenilko $\hat{\zeta}$ za ζ tam, kjer je vrednost $p(X, \hat{\zeta})$ maksimalna. Če imamo dan enostavni slučajni vzorec, se verjetje izraža na naslednji način:

$$L = p(x_1, \zeta)p(x_2, \zeta) \ldots p(x_n, \zeta)$$

Za iskanje maksimuma navadno rešujemo enačbo:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \zeta} = 0$$

6. Populacija X je porazdeljena eksponentno $\mathrm{Exp}(1/\alpha)$, kjer je $\alpha > 0$ neznan parameter. Po metodi maksimalne zanesljivosti poiščite cenilko za α. Dobimo isto cenilko kot po metodi momentov?

7. Populacija X je porazdeljena diskretno po naslednji shemi:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1-2a-b & a & b & a \end{pmatrix}$$

Po metodi maksimalne zanesljivosti iz vzorca:

$$-1, 0, 1, 1, 0, 0, -1, 2, 1, 2$$

ocenite parametra a in b. Dobimo isto oceno kot po metodi momentov?

8. Dana je enakomerna porazdelitev $\mathrm{E}[0, a]$. Naj bo A cenilka za a, dobljena po metodi momentov. M pa cenilka, dobljena po metodi maksimalne zanesljivosti. Katera od cenilk je nepristranska? Katera je učinkovitejša?

   Naj bo še $M' = kM$, kjer je k izbran tako, da je cenilka M' nepristranska. Izračunajte k. Katera od cenilk je zdaj učinkovitejša?

9. Intervali zaupanja

Bernoullijevo zaporedje poskusov. Normalna porazdelitev z znanim σ. Normalna porazdelitev z obema neznanima parametroma, iščemo μ ali σ. (2 uri)

Interval zaupanja $[\zeta_{\min}, \zeta_{\max}]$ za ζ pri stopnji zaupanja β je določen z enačbo:

$$\inf P\big(\zeta_{\min} \le \zeta \le \zeta_{\max}\big) = \beta$$

pri čemer gre infimum po vseh možnih vrednostih parametra ζ in ostalih neznanih parametrov. Tipično vzamemo $\beta = 0˙90$, $0˙95$ ali $0˙99$.

Interval zaupanja za verjetnost uspeha poskusa. *Recimo, da je med n neodvisnimi poskusi ($n > 30$) k uspelih. Izračunamo:*

$$\hat{p} = \frac{k}{n}$$

kar je najučinkovitejša cenilka za p. Nato poiščemo c, za katerega velja:

$$\Phi(c) = \frac{\beta}{2} \quad \textit{oz.} \quad c = t_{(1+\beta)/2} \ \textit{pri} \ \textit{df} = \infty$$

Nadalje izračunamo:

$$\Delta = c\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

Interval zaupanja je potem $\hat{p} - \Delta \le p \le \hat{p} + \Delta$.

1. Izmed 100 poskusov jih je uspelo 20. Določite 95-% interval zaupanja za verjetnost, da poskus uspe.
2. Pri 10000 metih kovanca je padlo 5048 grbov. Določite 90-% interval zaupanja za verjetnost, da pade grb.

Ocenjujemo parameter μ pri porazdelitvi $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$, kjer je σ znan. Izračunamo:

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$$
$$c = t_{(1+\beta)/2} \ \textit{pri} \ \textit{df} = \infty$$
$$\Delta = \frac{c\sigma}{\sqrt{n}}$$

Interval zaupanja: $\bar{X} - \Delta \le \mu \le \bar{X} + \Delta$.

3. Iz populacije, porazdeljene normalno $\mathrm{N}(\mu, 5)$, vzamemo enostavni slučajni vzorec. Dobimo:

101, 91, 93, 103, 91, 101, 103, 95, 95

Določite 95-% interval zaupanja za μ.

Ocenjujemo parameter μ pri porazdelitvi $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$, *kjer σ ni znan. Izračunamo:*

$$\begin{aligned}
\bar{X} &= \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \\
c &= t_{(1+\beta)/2} \text{ pri } df = n - 1 \\
\hat{\sigma} &= \sqrt{\frac{(X_1 - \bar{X})^2 + \ldots + (X_n - \bar{X})^2}{n - 1}} \\
\Delta &= \frac{c\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}
\end{aligned}$$

Interval zaupanja: $\bar{X} - \Delta \leq \mu \leq \bar{X} + \Delta$.

4. Isto kot prejšnja naloga, le da σ zdaj ni znan.

Ocenjujemo parameter σ pri porazdelitvi $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$, *kjer μ ni znan. Izračunamo:*

$$\begin{aligned}
\bar{X} &= \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \\
c_1 &= \chi^2_{(1-\beta)/2} \text{ pri } df = n - 1 \\
c_2 &= \chi^2_{(1+\beta)/2} \text{ pri } df = n - 1 \\
\hat{\sigma}^2 &= \frac{(X_1 - \bar{X})^2 + \ldots + (X_n - \bar{X})^2}{n - 1}
\end{aligned}$$

Interval zaupanja:

$$\hat{\sigma}\sqrt{\frac{n-1}{c_2}} \leq \sigma \leq \hat{\sigma}\sqrt{\frac{n-1}{c_1}}$$

oziroma:

$$\sqrt{\frac{1}{c_2}\sum_{k=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2} \leq \sigma \leq \sqrt{\frac{1}{c_1}\sum_{k=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}$$

5. Iz populacije, porazdeljene normalno $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$, vzamemo enostavni slučajni vzorec. Dobimo:

$$124,\ 129,\ 126,\ 122,\ 124$$

Ocenite σ po občutku. Ali pride v 90-% interval zaupanja?

10. Testiranje hipotez

Z-test. T-test sredine in razlike sredin. Testiranje disperzije. Pearsonov test hi kvadrat. Kontingenčni test. (4 ure)

1. Loterija za neko vrsto srečke trdi, da jih je več kot pol dobitnih. Kupili smo osem srečk in le dve sta bili dobitni. Lahko začnemo sumiti, da loterija laže?

Želeli bi testirati, ali so podatki v vzorcu v skladu z ničelno hipotezo H_0 o porazdelitvi populacije ali pa so morda bolj v skladu z alternativno hipotezo H_1. Pri testih značilnosti bodisi zavrnemo ničelno hipotezo bodisi pravimo, da odstopanja niso dovolj značilna, da bi jo zavrnili.
Postopku, po katerem se odločimo, ali bomo ničelno hipotezo zavrnili ali ne, pravimo test. Stopnja značilnosti testa je:

$$\alpha = \sup P(H_0 \text{ zavrnemo})$$

pri čemer supremum teče po vseh porazdelitvah, pri katerih velja H_0.

2. Pri 10000 metih kovanca je padlo 4875 grbov. Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0{\dot{}}05$ testirajte hipotezo, da je verjetnost, da pade grb, enaka 1/2, proti alternativni hipotezi, da je različna od 1/2. Kaj pa, če bi vzeli $\alpha = 0{\dot{}}01$?

3. Prireditelj neke igre na srečo navaja, da je verjetnost, da bo v posamezni igri izžreban glavni dobitek, enaka 1/50. Recimo, da po 100 igrah glavni dobitek še vedno ni bil izžreban. Ali pri stopnji značilnosti $\alpha = 0{\dot{}}1$ lahko začnemo sumiti prireditelja, da goljufa?

Navadno test poteka tako, da izračunamo testno statistiko T in H_0 zavrnemo, če T pade v kritično območje K_α. Tipična ničelna hipoteza je $\zeta = \zeta_0$, kjer je ζ kak parameter porazdelitve, tipične alternativne hipoteze pa so $\zeta \neq \zeta_0$ (dvostranski test) ali $\zeta < \zeta_0$ oz. $\zeta > \zeta_0$ (enostranski test).
Če ničelno hipotezo zavrnemo pri $\alpha = 0{\dot{}}05$, pravimo, da so odstopanja statistično značilna, če jo zavrnemo tudi pri $\alpha = 0{\dot{}}01$, pa pravimo, da so statistično zelo značilna.

Testiranje verjetnosti, da poskus uspe. *Naredimo n neodvisnih poskusov ($n > 30$), od katerih jih k uspe. Testiramo ničelno hipotezo $H_0\colon\ p = p_0$. Ker pri veljavnosti H_0 približno velja:*

$$Z := \sqrt{\frac{n}{p_0(1-p_0)}}\left(\frac{k}{n} - p_0\right) \sim \mathrm{N}(0,1)$$

glede na H_1 postavimo:

$$\begin{array}{ll} H_1\colon\ p \neq p_0 : & K_\alpha = (-\infty, -t_{1-\alpha/2}) \cup (t_{1-\alpha/2}, \infty) \\ H_1\colon\ p < p_0 : & K_\alpha = (-\infty, -t_{1-\alpha}) \\ H_1\colon\ p > p_0 : & K_\alpha = (t_{1-\alpha}, \infty) \end{array}$$

pri $df = \infty$.

4. Tovarna jamči, da je delež izdelkov z napako enak 20%. V vzorcu 100 izdelkov pa jih je 23 z napako. Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0\text{˙}05$ testirajte hipotezo, da je verjetnost, da ima izdelek napako, enaka $0\text{˙}2$, proti alternativni hipotezi, da je večja od $0\text{˙}2$. Kaj pa, če bi imelo napako 230 izdelkov izmed 300?

Testiranje parametra μ pri normalni porazdelitvi z znanim σ. *Testiramo ničelno hipotezo $H_0\colon\ \mu = \mu_0$, na voljo pa imamo enostavni slučajni vzorec velikosti n. Ker pri H_0 velja:*

$$Z := \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} \sim \mathrm{N}(0,1)$$

glede na H_1 spet postavimo:

$$\begin{array}{ll} H_1\colon\ \mu \neq \mu_0 : & K_\alpha = (-\infty, -t_{1-\alpha/2}) \cup (t_{1-\alpha/2}, \infty) \\ H_1\colon\ \mu < \mu_0 : & K_\alpha = (-\infty, -t_{1-\alpha}) \\ H_1\colon\ \mu > \mu_0 : & K_\alpha = (t_{1-\alpha}, \infty) \end{array}$$

pri $df = \infty$.

5. Meritve neke količine, porazdeljene normalno $\mathrm{N}(\mu, 5)$, dajo naslednje vrednosti:

   101, 91, 93, 103, 91, 101, 103, 95, 95

   Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0\text{˙}05$ testirajte ničelno hipotezo, da je $\mu = 100$, proti alternativni hipotezi, da je $\mu \neq 100$. Kaj pa, če bi za alternativno hipotezo vzeli $\mu < 100$ ali $\mu > 100$?

Testiranje parametra μ pri normalni porazdelitvi z neznanim σ. *Testiramo ničelno hipotezo H_0: $\mu = \mu_0$, na voljo pa imamo enostavni slučajni vzorec velikosti n. Ker pri H_0 velja:*

$$T := \frac{\bar{X} - \mu_0}{\hat{\sigma}} \sqrt{n} \sim \mathrm{S}(n-1)$$

glede na H_1 tokrat spet postavimo:

$$\begin{array}{ll} H_1\colon \ \mu \neq \mu_0 : & K_\alpha = (-\infty, -t_{1-\alpha/2}) \cup (t_{1-\alpha/2}, \infty) \\ H_1\colon \ \mu < \mu_0 : & K_\alpha = (-\infty, -t_{1-\alpha}) \\ H_1\colon \ \mu > \mu_0 : & K_\alpha = (t_{1-\alpha}, \infty) \end{array}$$

le da vzamemo $df = n - 1$.

6. Meritve neke količine, porazdeljene normalno $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$, dajo naslednje vrednosti:

   109, 107, 95, 121, 107, 97, 111, 121, 95

   Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0{\dot{}}05$ testirajte ničelno hipotezo, da je $\mu = 100$, proti alternativni hipotezi, da je $\mu \neq 100$. Kaj pa, če bi vedeli, da je $\sigma = 10$?

7. Meritve neke količine, porazdeljene normalno $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$, dajo naslednje vrednosti:

   46, 51, 48, 46, 52, 47, 51, 44, 47, 48

   Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0{\dot{}}05$ testirajte ničelno hipotezo, da je $\mu = 50$, proti alternativni hipotezi, da je $\mu \neq 50$. Kaj pa, če bi za alternativno hipotezo vzeli, da je $\mu < 50$?

Testiranje razlike. *Dani sta dve populaciji, porazdeljeni* $\mathrm{N}(\mu_1, \sigma)$ *in* $\mathrm{N}(\mu_2, \sigma)$. *Iz prve vzamemo enostavni slučajni vzorec* $X_1, \ldots X_m$*, iz druge pa vzorec* $Y_1, \ldots Y_n$*, pri čemer sta vzorca med seboj neodvisna. Testiramo hipotezo* $H_0\colon\ \mu_1 = \mu_2$. *Ker pri* H_0 *velja:*

$$T := \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\hat{\sigma}} \sqrt{\frac{mn}{m+n}} \sim \mathrm{S}(m+n-2)$$

kjer je:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{(X_1 - \bar{X})^2 + \ldots + (X_m - \bar{X})^2 + (Y_1 - \bar{Y})^2 + \ldots + (Y_n - \bar{Y})^2}{m+n-2}}$$

glede na H_1 *tokrat postavimo:*

$$\begin{array}{ll} H_1\colon\ \mu_1 \neq \mu_2 : & K_\alpha = (-\infty, -t_{1-\alpha/2}) \cup (t_{1-\alpha/2}, \infty) \\ H_1\colon\ \mu_1 < \mu_2 : & K_\alpha = (-\infty, -t_{1-\alpha}) \\ H_1\colon\ \mu_1 > \mu_2 : & K_\alpha = (t_{1-\alpha}, \infty) \end{array}$$

pri $df = m + n - 2$.

8. Vzorec iz prve populacije, porazdeljene normalno $\mathrm{N}(\mu_1, \sigma)$, pride:

   25, 16, 23, 17, 22, 18, 18, 21, 20

   iz druge populacije, porazdeljene normalno $\mathrm{N}(\mu_2, \sigma)$, pa pride:

   20, 22, 24, 22, 26, 22, 25

   Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0'05$ testirajte hipotezo, da je $\mu_1 = \mu_2$, proti alternativni hipotezi, da je $\mu_1 \neq \mu_2$.

9. Vzorec iz prve populacije, porazdeljene normalno $\mathrm{N}(\mu_1, \sigma)$, pride:

   102, 96, 103, 98, 105, 97, 103, 98, 100, 98, 99, 101

   iz druge populacije, porazdeljene normalno $\mathrm{N}(\mu_2, \sigma)$, pa pride:

   95, 97, 95, 99, 95, 95

   Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0'01$ testirajte hipotezo, da je $\mu_1 = \mu_2$, proti alternativni hipotezi, da je $\mu_1 > \mu_2$.

Testiranje parametra σ pri normalni porazdelitvi z neznanim μ. *Testiramo ničelno hipotezo $H_0\colon\ \sigma = \sigma_0$, na voljo pa imamo enostavni slučajni vzorec velikosti n. Ker pri H_0 velja:*

$$\chi^2 := (n-1)\,\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2} = \frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1)$$

glede na H_1 postavimo:

$$\begin{array}{ll} H_1\colon\ \sigma \neq \sigma_0 : & K_\alpha = [0, \chi^2_{\alpha/2}) \cup (\chi^2_{1-\alpha/2}, \infty) \\ H_1\colon\ \sigma < \sigma_0 : & K_\alpha = [0, \chi^2_{\alpha}) \\ H_1\colon\ \sigma > \sigma_0 : & K_\alpha = (\chi^2_{1-\alpha}, \infty) \end{array}$$

pri $df = n-1$.

10. Meritve neke količine, porazdeljene normalno $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$, dajo naslednje vrednosti:

    99, 90, 108, 111, 97, 93, 90, 106, 104, 102

    Pri $\alpha = 0\text{˙}05$ testirajte:

    a) ničelno hipotezo, da je $\sigma = 5$, proti alternativni hipotezi, da je $\sigma \neq 5$;
    b) ničelno hipotezo, da je $\sigma = 10$, proti alternativni hipotezi, da je $\sigma < 10$.

Testiranje čisto določene porazdelitve. *Testiramo, ali je porazdelitev populacije enaka:*

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_r \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_r \end{pmatrix}$$

Pri tem so $a_1, \ldots a_r$ lahko dejanske vrednosti spremenljivke ali pa le razredi, v katere pade. Vzorec velikosti n pa ima frekvenčno porazdelitev:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_r \\ N_1 & N_2 & \ldots & N_r \end{pmatrix}$$

Naj bo še $np_k \geq 5$ za vsak k (sicer razrede združimo). Ker tedaj pri veljavnosti ničelne hipoteze približno velja:

$$\chi^2 := \sum_{k=1}^{r} \frac{(N_k - np_k)^2}{np_k} \sim \chi^2(r-1)$$

postavimo:

$$K_\alpha = (\chi^2_{1-\alpha}, \infty)$$

pri $df = r-1$.

11. V vzorcu je 20 osebkov tipa RR, 45 tipa Rr in 35 tipa rr. Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0\text{'}05$ testirajte hipotezo, da je v populaciji 25% osebkov tipa RR, 50% tipa Rr in 25% tipa rr. Kaj pa, če bi bilo v vzorcu 200 osebkov tipa RR, 450 tipa Rr in 350 tipa rr?

12. Pri kvizu Lepo je biti milijonar od 22. novembra do 28. decembra 2003 je bil 21-krat pravilen odgovor A, 42-krat B, 77-krat C in 116-krat D. Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0\text{'}01$ testirajte ničelno hipotezo, da so odgovori enakomerno porazdeljeni, proti alternativni hipotezi, da niso.

    Če izvzamemo prvih pet vprašanj, je bil A pravilen 21-krat, B 37-krat, C 53-krat in D 25-krat. Naredite isti test.

13. Podatki imajo naslednjo frekvenčno porazdelitev:

pod 10	10–20	20–30	30–40	nad 40
5	20	35	25	15

    Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0\text{'}05$ testirajte hipotezo, da podatki izhajajo iz populacije, porazdeljene normalno $\mathrm{N}(25, 10)$.

Kontingenčni test neodvisnosti. *Testiramo, ali sta spremenljivki X in Y, definirani na isti populaciji, neodvisni, pri čemer v vzorcu kombinacija $X = a_i, Y = b_j$ nastopa N_{ij}-krat ($i = 1, \dots r$, $j = 1, \dots s$). Ker pri neodvisnosti približno velja:*

$$\chi^2 = n \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \frac{\left(N_{ij} - \frac{N_{i.}N_{.j}}{n}\right)^2}{N_{i.}N_{.j}} \sim \chi^2\big((r-1)(s-1)\big)$$

kjer je:

$$N_{i.} = \sum_{j=1}^{s} N_{ij}\ , \quad N_{.j} = \sum_{i=1}^{r} N_{ij}\ , \quad n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} N_{ij}$$

postavimo:

$$K_\alpha = (\chi^2_{1-\alpha}, \infty)$$

pri $df = (r-1)(s-1)$.

14. Na vzorcu 100 oseb dobimo naslednjo navzkrižno frekvenčno porazdelitev barve oči in las:

lasje \ oči	modre	zelene	rjave
blond	15	8	2
rdeči	5	2	3
rjavi	3	30	7
črni	2	10	13

Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0{\cdot}05$ testirajte hipotezo, da sta barva las in barva oči neodvisni.

15. Na neki internetni strani je 1990 ljudi glasovalo, kateri film bo najverjetneje dobil oskarja. Anketirance so razdelili v tri razrede glede na starost. Rezultati ankete so naslednji:

	do 20	od 20 do 40	nad 40
Gospodar prstanov	350	250	180
Skrivnostna reka	80	100	100
Seabiscuit	70	90	130
Zgubljeno s prevodom	50	80	110
Gospodar in bojevnik	200	150	50

S testom hi kvadrat preizkusite domnevo, da je mnenje o oskarjih neodvisno od starosti. Stopnja značilnosti naj bo $0{\cdot}05$.

Mann–Whitneyev test. *Testiramo, ali sta dve populaciji enako porazdeljeni. Iz njiju vzamemo neodvisna vzorca, iz prve velikosti m, iz druge pa velikosti n. Elemente obeh vzorcev skupaj uredimo po velikosti. Naj bodo $R_1, \ldots R_m$ mesta (rangi) elementov prvega vzorca. Če sta obe populaciji porazdeljeni enako in vzorca dovolj velika, približno velja:*

$$Z := \sqrt{\frac{3}{mn(m+n+1)}}\left(2\sum_{i=1}^{m} R_i - m(m+n+1)\right) \sim \mathrm{N}(0,1)$$

Navadno alternativna hipoteza trdi, da sta populaciji porazdeljeni različno. V tem primeru postavimo:

$$K_\alpha := (-\infty, -t_{1-\alpha/2}) \cup (t_{1-\alpha/2}, \infty)$$

pri $df = \infty$.
Alternativna hipoteza pa lahko trdi tudi, da ima prva populacija "večje vrednosti" od druge (t. j. $P(X < w) \leq P(Y < w)$ za vsak w). V tem primeru postavimo $K_\alpha := (t_{1-\alpha}, \infty)$. Podobno, če H_1 trdi, da ima prva populacija "manjše vrednosti", postavimo $K_\alpha := (-\infty, -t_{1-\alpha})$.

16. Tekmovalci dveh ekip, "rdečih" in "modrih", so se pomerili v teku. Vrstni red tekmovalcev je naslednji:

$$R,\ R,\ M,\ R,\ R,\ M,\ R,\ R,\ M,\ R,\ M,\ M,\ M,\ R,\ M,\ M,\ M,\ M,\ R,\ M$$

(t. j. prvi, ki je prispel na cilj, je bil član "rdečih", drugi prav tako, tretji je bil član "modrih" itd.). Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0{\cdot}05$ testirajte hipotezo, da so rdeči enako dobri od modrih, proti alternativni hipotezi, da je med njimi razlika.

11. Linearna regresija

(1 ura)

Spremenljivki X in Y zadoščata zvezi:

$$Y = a + bX + U$$

kjer je $U \sim \mathrm{N}(0, \sigma)$ neodvisna od X in kjer so a, b in σ neznani parametri. Želeli bi točkasto oceniti a in b (t. j. potegniti premico skozi podatke), poleg tega pa še točkasto in intervalsko oceniti ter testirati vrednost Y pri $X = x_0$. Cenilki za a in b sta:

$$\hat{b} = \frac{C_{xy}}{C_x^2}\,, \quad \hat{a} = \bar{Y} - \hat{b}\bar{X}$$

kjer je:

$$C_x^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2$$

$$C_{xy} = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) = \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - n\bar{X}\bar{Y}$$

Cenilka za Y pri $X = x_0$ je:

$$\hat{Y} = \hat{a} + \hat{b}x_0$$

Interval zaupanja:

$$\hat{Y} - \Delta \le Y \le \hat{Y} + \Delta$$

kjer je:

$$\Delta = t_{(1+\beta)/2} S \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{X})^2}{C_x^2}}$$

$$S^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{a} - \hat{b}X_i)^2$$

pri $df = n - 2$.

1. Meritve dajo naslednje vrednosti:

X_i	1	2	3	4	5
Y_i	2	6	7	10	10

Potegnite premico, napovejte rezultat pri $x_0 = 10$ in poiščite 95% interval zaupanja.

REŠITVE

1. Osnove kombinatorike

1. $(4+3) \cdot 5 = 35$.

2. a) 900, b) 450, c) 400, d) 9, e) 648, f) 90.

3. Označimo s k število kroglic, ki jih vzamemo iz posode. Tedaj so rezultati zbrani v naslednji tabeli:

k	vrstni red vlečenja			
	pomemben		ni pomemben	
	vračamo	ne vračamo	vračamo	ne vračamo
1	5	5	5	5
2	25	20	15	10
3	125	60	35	10

Pri različici, ko kroglic ne vračamo in vrstni red ni pomemben, sta rezultata za $k = 2$ in $k = 3$ enaka, ker lahko namesto tega, katere kroglice smo vzeli, gledamo, katere kroglice so ostale v posodi.

Različico, ko vrstni red ni pomemben, kroglice pa vračamo, v splošnem primeru, ko iz posode z n kroglicami vzamemo k kroglic, izračunamo tako, da jemanja ponazorimo z razporeditvijo $n-1$ rdečih in k modrih puščic v vrsto, pri čemer puščice ločimo le po barvi. Vsaka rdeča puščica predstavlja pregrajo med dvema kroglicama v škatli in vsaka modra puščica predstavlja jemanje ustrezne kroglice. Tako npr. razporeditev $MRRMMRR$ pomeni, da iz posode s 5 kroglicami vzamemo tri kroglice, in sicer prvo kroglico enkrat, tretjo dvakrat, ostalih pa ne vzamemo. Vsaka razporeditev puščic ustreza natanko enemu jemanju kroglic. Tako dobimo, da je vseh jemanj $\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$ (glej naslednjo nalogo).

4. Če vse razločujemo: $(3+4)! = 5040$.
Če cvetlic iste vrste ne razločujemo: $\displaystyle\binom{7}{3} = 35$.

5. a) $\displaystyle\binom{6}{4}\binom{4}{2} = 90$,

b) $\displaystyle\binom{6}{1}\binom{4}{3} + \binom{6}{2}\binom{4}{2} + \binom{6}{3}\binom{4}{1} = \binom{10}{4} - \binom{6}{4} - \binom{4}{4} = 194$.

6. a) $9! = 362880$, b) $3!\,2!\,4! = 288$, c) $288 \cdot 3! = 1728$, d) $\dfrac{9!}{3!\,2!\,4!} = 1260$.

7. $5! = 120$; $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15120$.

2. Elementarna verjetnost

1. $\dfrac{5}{36} \doteq 0˙139.$

2. a) $\left(\dfrac{5}{6}\right)^5 \doteq 0˙598$, b) $5 \cdot \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{5}{6}\right)^4 \doteq 0˙402$, c) $10\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\left(\dfrac{5}{6}\right)^3 \doteq 0˙161.$

3. Verjetneje je, da so trije enega, eden pa nasprotnega spola: verjetnost tega dogodka je $8/16 = 0˙5$, verjetnost enake zastopanosti pa je $6/16 = 0˙375$.

4. a) $\dfrac{5}{12} \cdot \dfrac{4}{12} \cdot \dfrac{3}{12} \cdot 6 \doteq 0˙208$, b) $\dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3}{\binom{12}{3}} \doteq 0˙273.$

5. $1 - \dfrac{364 \cdot 363 \cdot \cdots \cdot (366-n)}{365^{n-1}}$. Tabela prvih nekaj verjetnosti:

n	P	n	P
1	0	36	0˙832
2	0˙00274	37	0˙849
3	0˙0082	38	0˙864
4	0˙0164	39	0˙878
5	0˙0271	40	0˙891
6	0˙0405	41	0˙903
7	0˙0562	42	0˙914
8	0˙0743	43	0˙924
9	0˙0946	44	0˙933
10	0˙117	45	0˙941
11	0˙141	46	0˙948
12	0˙167	47	0˙955
13	0˙194	48	0˙961
14	0˙223	49	0˙966
15	0˙253	50	0˙97
16	0˙284	51	0˙974
17	0˙315	52	0˙978
18	0˙347	53	0˙981
19	0˙379	54	0˙984
20	0˙411	55	0˙986
21	0˙444	56	0˙988
22	0˙476	57	0˙99
23	0˙507	58	0˙992
24	0˙538	59	0˙993
25	0˙569	60	0˙994
26	0˙598	61	0˙995
27	0˙627	62	0˙996
28	0˙654	63	0˙997
29	0˙681	64	0˙997
30	0˙706	65	0˙998
31	0˙73	66	0˙998
32	0˙753	67	0˙998
33	0˙775	68	0˙999
34	0˙795	69	0˙999
35	0˙814	70	0˙999

6. $\dfrac{\binom{4}{2}\binom{12}{6}}{\binom{16}{8}} = \dfrac{\left[\binom{8}{2}\right]^2}{\binom{16}{4}} \doteq 0˙431.$

7. $1 - \dfrac{\binom{90}{10} + \binom{10}{1}\binom{90}{9}}{\binom{100}{10}} \doteq 0˙262.$

8. $\dfrac{\binom{8}{4}\binom{4}{2}\binom{2}{1}}{\binom{14}{7}} \doteq 0{\dot{}}245.$

9. *Prvi primer*: Končni izid je lahko 6 : 2, 6 : 3, 6 : 4 ali 6 : 5, zato je verjetnost enaka $13/16 \doteq 0{\dot{}}822$. Še hitreje pridemo do rezultata, če vzamemo nasprotni dogodek.

Drugi primer: Označimo s p verjetnost, da Janez zmaga. Po dveh igrah je rezultat lahko 2 : 0, 1 : 1 ali 0 : 2 za Janeza. Od tod dobimo zvezo $p = \dfrac{1}{9} + \dfrac{4p}{9}$, kar da $p = 0{\dot{}}2$.

10. $B \cap C$

11. a) $P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = 0{\dot{}}25$,
b) $P\big((A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C)\big) = 0{\dot{}}25$,
c) $P\big((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)\big) = 0{\dot{}}5$.

12. $0{\dot{}}5$.

13. 76/120. V splošnem, ko je kuvert n, je rezultat:

$$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!} = 1 - \frac{1}{n!}\left\langle \frac{n!}{e} \right\rangle = \frac{1}{n!}\left\langle n!\left(1 - \frac{1}{e}\right)\right\rangle$$

14. $\dfrac{3}{4} = 0{\dot{}}75, \quad \dfrac{9}{16} - \dfrac{1}{32} \doteq 0{\dot{}}531.$

15. a) $\dfrac{5^2}{2 \cdot 10 \cdot 5} \doteq 0{\dot{}}179$, b) $\dfrac{2^2}{2 \cdot 10 \cdot 5} \doteq 0{\dot{}}0286$.

16. Označimo s h razdaljo med točko na najbolj spodnjem delu igle in prvo črto, ki je nad to točko ($0 \le h < a$). Nadalje naj bo φ kot med iglo in pravokotnico na črte ($0 \le \varphi \le \pi/2$). Tedaj igla seka katero izmed črt natanko tedaj, ko je $h \le b\cos\varphi$, zato je:

$$P = \frac{2}{\pi a}\int_0^{\pi/2} \min\{a, b\cos\varphi\}\,\mathrm{d}\varphi = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\left[\arccos\dfrac{a}{b} + \dfrac{b - \sqrt{b^2 - a^2}}{a}\right] & ;\ a \le b \\ \dfrac{2b}{\pi a} & ;\ a \ge b \end{cases}$$

3. Pogojna verjetnost

1. $3/7 \doteq 0{\cdot}429$.

2. Razmislek je napačen: brezpogojni verjetnosti sta enaki, ne pa tudi pogojni verjetnosti glede na dogodek, da smo izvlekli zlat kovanec.

3. Bolje se je premisliti. Če s črko P označimo porscheja, s črko K pa kozo in s polkrepko črko vrata, ki smo jih prvotno izbrali, bi na prvi pogled lahko sklepali, da sta možnosti **P**K in **K**P enako verjetni (odprta vrata smo izpustili). Vendar pa temu ni tako. Če pišemo tudi odprta vrata, ki jih označimo z malo črko, imamo štiri možnosti: **P**kK, **P**Kk, **K**Pk in **K**kP. Le-te niso enako verjetne: prvi dve imata verjetnost 1/6, zadnji dve pa 1/3, saj moramo najprej gledati, kje je porsche, šele nato pa tudi, katera vrata je voditelj odprl.

4. Da, da, ne, ne.

5. Ne (čeprav je $P(A \cap B \cap C) = P(A)\,P(B)\,P(C)$).

6. a) Ne. b) Pri $p = 0$ in $p = 2/3$.

7. a) $\dfrac{0{\cdot}1}{1 - 0{\cdot}9 \cdot 0{\cdot}8 \cdot 0{\cdot}7} \doteq 0{\cdot}202$,

b) $\dfrac{0{\cdot}1 \cdot 0{\cdot}8 \cdot 0{\cdot}7}{0{\cdot}1 \cdot 0{\cdot}8 \cdot 0{\cdot}7 + 0{\cdot}9 \cdot 0{\cdot}2 \cdot 0{\cdot}7 + 0{\cdot}9 \cdot 0{\cdot}8 \cdot 0{\cdot}3} \doteq 0{\cdot}141$.

8. $\dfrac{0{\cdot}4 \cdot 0{\cdot}7 \cdot 0{\cdot}5 \cdot 0{\cdot}9}{(0{\cdot}6 \cdot 0{\cdot}3 + 0{\cdot}4 \cdot 0{\cdot}7) \cdot (0{\cdot}5 \cdot 0{\cdot}1 + 0{\cdot}5 \cdot 0{\cdot}9)} \doteq 0{\cdot}548$.

9. $\dfrac{7}{10} \cdot \dfrac{4 \cdot 3}{\binom{7}{2}} + \dfrac{3}{10} \cdot \dfrac{3 \cdot 3}{\binom{7}{2}} \doteq 0{\cdot}529$.

10.
$$\frac{\binom{20}{3}}{\binom{50}{3}}\big((3 \cdot 0{\cdot}1^2 \cdot 0{\cdot}9 + 0{\cdot}1^3\big) + \frac{\binom{30}{1}\binom{20}{2}}{\binom{50}{3}}\big(0{\cdot}1^2 + 2 \cdot 0{\cdot}1 \cdot 0{\cdot}9 \cdot 0{\cdot}7\big) +$$
$$+ \frac{\binom{30}{2}\binom{20}{1}}{\binom{50}{3}}\big(0{\cdot}7^2 + 2 \cdot 0{\cdot}7 \cdot 0{\cdot}3 \cdot 0{\cdot}1\big) + \frac{\binom{30}{3}}{\binom{50}{3}}\big(3 \cdot 0{\cdot}7^2 \cdot 0{\cdot}3 + 0{\cdot}7^3\big) \doteq 0{\cdot}440.$$

11. $\dfrac{0{\cdot}2 \cdot 0{\cdot}6}{0{\cdot}2 \cdot 0{\cdot}6 + 0{\cdot}1 \cdot 0{\cdot}4} = 0{\cdot}75$.

12. $\dfrac{0{\cdot}2 \cdot 0{\cdot}05}{0{\cdot}2 \cdot 0{\cdot}05 + 0{\cdot}5 \cdot 0{\cdot}01 + 0{\cdot}3 \cdot 0{\cdot}02} \doteq 0{\cdot}476$.

13.
$$\frac{\dfrac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}} \cdot \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{3}{4}}{\dfrac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}} \cdot \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{3}{4} + \dfrac{\binom{4}{2}\binom{6}{1}}{\binom{10}{3}} \cdot \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{2}{4} + \dfrac{\binom{4}{1}\binom{6}{2}}{\binom{10}{3}} \cdot \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{1}{4}} = 0{\cdot}125.$$

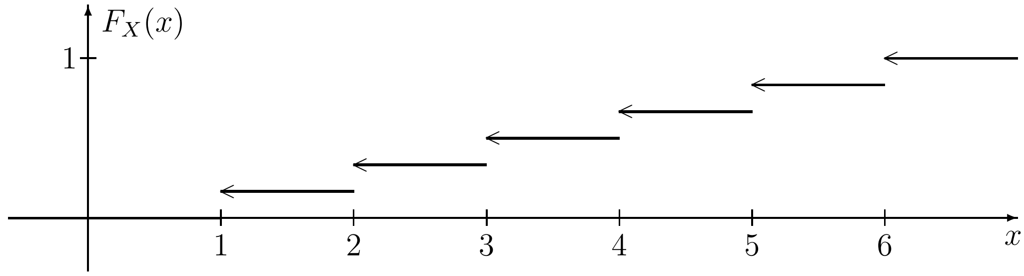
14. $\dfrac{1}{g}\big(0\text{˙}6\cdot 0\text{˙}4\cdot 0\text{˙}9\cdot 0\text{˙}7+0\text{˙}6\cdot 0\text{˙}4\cdot 0\text{˙}1\cdot 1\big)\doteq 0\text{˙}407$, kjer je:

$$g=0\text{˙}4\cdot 0\text{˙}6\cdot 0\text{˙}9\cdot 0\text{˙}1+\big(0\text{˙}6\cdot 0\text{˙}6\cdot 0\text{˙}9+0\text{˙}4\cdot 0\text{˙}4\cdot 0\text{˙}9+0\text{˙}4\cdot 0\text{˙}6\cdot 0\text{˙}1\big)\cdot 0\text{˙}4+$$
$$+\big(0\text{˙}6\cdot 0\text{˙}4\cdot 0\text{˙}9+0\text{˙}6\cdot 0\text{˙}6\cdot 0\text{˙}1+0\text{˙}4\cdot 0\text{˙}4\cdot 0\text{˙}1\big)\cdot 0\text{˙}7+0\text{˙}6\cdot 0\text{˙}4\cdot 0\text{˙}1\cdot 1$$

4. Slučajne spremenljivke

1. $X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

Porazdelitev je diskretna enakomerna $\mathrm{E}\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.



2. $S \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{24} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{24} & \frac{1}{24} \end{pmatrix}$

3. Gre za zvezno enakomerno porazdelitev: $X \sim \mathrm{E}[0, 2\pi]$,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & ; x \leq 0 \\ \dfrac{x}{2\pi} & ; 0 \leq x \leq 2\pi \\ 1 & ; x \geq 2\pi \end{cases}, \qquad p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} & ; 0 < x < 2\pi \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}$$

4. $$F_M(t) = \begin{cases} 0 & ; t \leq 0 \\ \dfrac{t^2}{100} & ; 0 \leq t \leq 10 \\ 1 & ; t \geq 10 \end{cases}, \qquad p_M(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{50} & ; 0 < t < 10 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}$$

5. Gre za binomsko porazdelitev: $X \sim \mathrm{B}(10, 1/6)$, t. j.

$$P(X = k) = \binom{10}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{10-k}.$$

Približno velja:

k	$P(X = k)$
0	0˙162
1	0˙323
2	0˙291
3	0˙155
4	0˙0543
5	0˙0130
6	0˙00217
7	$2˙48 \cdot 10^{-4}$
8	$1˙86 \cdot 10^{-5}$
9	$8˙27 \cdot 10^{-7}$
10	$1˙65 \cdot 10^{-8}$

6. Poisson: 0˙315, Laplace: 0˙289.
Točen rezultat: 0˙323.

7. Poisson: 0˙0888, Laplace: 0˙1152.
Točen rezultat: 0˙1146.

8. Poisson: 0˙12511, točen rezultat: 0˙12574.

9. a) Laplace: 0˙033245, točen rezultat: 0˙033227.
b) Laplace: 0˙09824, točen rezultat: 0˙9944.
c) Laplace: 0˙19079, točen rezultat: 0˙19147.
d) Po Laplaceovi integralski formuli dobimo, da mora skladišče sprejeti vsaj 180 izdelkov. Dejansko je verjetnost, da bo pokvarjenih izdelkov (strogo) več kot 179, enaka 0˙0539, da jih bo več kot 180, pa 0˙0457.

10. Verjetnost, da se nobeden ne ponesreči:
Poisson: 0˙22313, Laplaceova lokalna formula: 0˙15381, točen rezultat: 0˙22288.

Verjetost, da se ponesrečita več kot dva:
Poisson: 0˙19115, Laplaceova integralska formula: 0˙20693, točen rezultat: 0˙19106.

11. Po Laplaceovi integralski formuli dobimo, da mora biti v pošiljki najmanj 13030 izdelkov.
V resnici zadošča že 13000 izdelkov: če je izdelkov 12999, dobimo, da je verjetnost, da bo prvovrstnih vsaj 7670, enaka 0˙98991, če jih je 13000, pa je verjetnost, da bo prvovrstnih prav tako vsaj 7670, enaka 0˙99020 .

12. Po Laplaceovi integralski formuli dobimo, da je treba naročiti najmanj 1159 izdelkov. V resnici je potrebno naročiti vsaj 1161 izdelkov: verjetnost, da je prvovrstnih vsaj 100, pride pri 1160 izdelkih 0˙9493, pri 1161 izdelkih pa 0˙9502.

13. Geometrijska $\mathrm{G}(1/6)$.

14. Pascalova (negativna binomska) $\mathrm{P}(10, 1/6)$.

15. $P(X = k) = (k-1)\,2^{-k}$ za $k = 2, 3, \ldots$. Porazdelitev je Pascalova $\mathrm{P}(2, 1/2)$.
Verjetnostna razlaga: če takoj za prvo cifro vse cifre zamenjamo z grbi, grbe pa s ciframi, se problem iz naloge prevede na čakanje, dokler ne padeta dve cifri.

16. $P(X = k) = 2^{-(k-1)}$ za $k = 2, 3, \ldots$, $X - 1 \sim \mathrm{G}(1/2)$.
Verjetnostna razlaga: če prvič pade cifra, pri nadaljnjih metih cifre zamenjamo z grbi, grbe pa s ciframi. Tako se problem prevede na čakanje na cifro (od drugega meta dalje).

17. Slučajna spremenljivka X je porazdeljena hipergeometrijsko $\mathrm{H}(7, 4, 16) =$
$= \mathrm{H}(4, 7, 16)$. Velja:

$$P(X = k) = \frac{\binom{4}{k}\binom{12}{7-k}}{\binom{16}{7}} = \frac{\binom{7}{k}\binom{9}{4-k}}{\binom{16}{4}}$$

Približno velja $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0\text{'}0692 & 0\text{'}3231 & 0\text{'}4154 & 0\text{'}1731 & 0\text{'}0192 \end{pmatrix}$.

18. $X \sim H(4,3,12) = H(3,4,12)$.

$$P(X=k) = \frac{\binom{3}{k}\binom{9}{4-k}}{\binom{12}{4}} = \frac{\binom{4}{k}\binom{8}{3-k}}{\binom{12}{3}}$$

ali približno $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0\text{'}2545 & 0\text{'}5091 & 0\text{'}2182 & 0\text{'}0182 \end{pmatrix}$.

19. $1/55$.

20. To je zvezna enakomerna porazdelitev $\mathrm{E}[a,b]$.

$$c = \frac{1}{b-a}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & ; x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & ; a \le x \le b \\ 1 & ; x \ge b \end{cases}$$

21. $c = \lambda$, X je porazdeljena eksponentno $\mathrm{Exp}(\lambda)$.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & ; x \ge 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & ; x \ge 0 \end{cases}$$

$P(1 < X < 2) = e^{-\lambda} - e^{-2\lambda}$.

22. $Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0\text{'}3 & 0\text{'}3 & 0\text{'}4 \end{pmatrix}$

23. $Y \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \dfrac{(1-p)^2}{(2-p)(2-2p+p^2)} & \dfrac{1-p}{2-p} & \dfrac{1}{(2-p)(2-2p+p^2)} \end{pmatrix}$

24. Naj bo:

$$X := \begin{cases} -1 & ; U < 0\text{'}1 \\ 0 & ; 0\text{'}1 \le U < 0\text{'}4 \\ 1 & ; 0\text{'}4 \le U < 0\text{'}6 \\ 2 & ; U \ge 0\text{'}6 \end{cases} \quad \text{in} \quad Y := -\frac{\ln(1-U)}{\lambda}$$

Tedaj je $X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0\text{'}1 & 0\text{'}3 & 0\text{'}2 & 0\text{'}4 \end{pmatrix}$ in $Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.

Opomba. Definiciji slučajnih spremenljivk X in Y nista edini izbiri: lahko bi npr. definirali tudi $Y = -(\ln U)/\lambda$.

25. $0\text{'}93319$.

26. Normalno $\mathrm{N}(a\mu + b, |a|\sigma)$.

27. $1/2 - \Phi(9/5) \doteq 0\text{'}03593$.

28. $p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x\sqrt{2\pi}}\, e^{-(\ln x)^2/2} & ; x > 0 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}$, $p_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi y}}\, e^{-y/2} & ; y > 0 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}$

Slučajna spremenljivka Y ima porazdelitev $\chi^2(1)$.

29. $P(R = r, M = m) = \dfrac{\binom{3}{r}\binom{2}{m}\binom{5}{3-r-m}}{\binom{10}{3}},$

$$P(R = r) = \frac{\binom{3}{r}\binom{7}{3-r}}{\binom{10}{3}}, \quad P(M = m) = \frac{\binom{2}{m}\binom{8}{3-m}}{\binom{10}{3}},$$

$$P(R + M = k) = \frac{\binom{5}{k}\binom{5}{3-k}}{\binom{10}{3}}.$$

Vse te slučajne spremenljivke so porazdeljene hipergeometrijsko: $R \sim \mathrm{H}(3,3,10)$, $M \sim \mathrm{H}(3,2,10)$, $R + M \sim \mathrm{H}(3,5,10)$.

Slučajni spremenljivki R in M sta odvisni.

30. Porazdelitev slučajnega vektorja (X, Y) z robnima porazdelitvama:

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$	
$X = -1$	0˙05	0˙1	0˙1	0˙25
$X = 0$	0˙1	0˙2	0˙2	0˙5
$X = 1$	0˙05	0˙1	0˙1	0˙25
	0˙2	0˙4	0˙4	1

Velja še $Y - X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0˙05 & 0˙2 & 0˙35 & 0˙3 & 0˙1 \end{pmatrix}$

31. Velja $S \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ q_1q_2q_3 & p_1q_2q_3 + q_1p_2q_3 + q_1q_2p_3 & p_1p_2q_3 + p_1q_2p_3 + q_1p_2p_3 & p_1p_2p_3 \end{pmatrix}$,
kjer je $q = 1 - p$.

Če so $X_1, \ldots X_n$ neodvisne in imajo vse Bernoullijevo porazdelitev $\mathrm{Be}(p)$, je njihova vsota porazdeljena binomsko $\mathrm{B}(n,p)$.

32. $S \sim \mathrm{B}(n_1 + n_2, p)$.

33. $S \sim \mathrm{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

34. $S \sim \mathrm{P}(n,p)$.

35. $S \sim \mathrm{P}(n_1 + n_2, p)$.

36. $T_n \sim \mathrm{Gama}(n, \lambda)$; $\quad \mathrm{Gama}(1, \lambda) = \mathrm{Exp}(\lambda)$.

37. $S \sim \text{Gama}(n, \lambda)$.

38. $S \sim \text{Gama}(n_1 + n_2, \lambda)$.

39. $c = 1, \quad p_X(x) = \begin{cases} x\,e^{-x} & ; x > 0 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}, \quad p_Y(y) = \begin{cases} e^{-y} & ; y > 0 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}.$
Slučajni spremenljivki X in Y sta odvisni.
$P(2 < Y < 3) = e^{-2} - e^{-3}, \quad P(Y < X) = 1, \quad P(2Y < X) = 1/2.$

40. $p_Z(z) = \begin{cases} e^{-z/2} - e^{-z} & ; z > 0 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}$

41. $S \sim \text{Gama}(a_1 + a_2, \lambda)$.

42. Vsota ima porazdelitev $\chi^2(n)$.

43. $X \sim \mathrm{N}\big(\mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\big)$.

44. $1/2 - \Phi(1/5) \doteq 0^{\cdot}42074$.

45. $c = 2, \quad p_Z(z) = \begin{cases} (1+z)^{-2} & ; z > 0 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases},$
$P(X < 2Y) = P(Z > 1/2) = 2/3$.

46. $F_Z(z) = \begin{cases} 0 & ; z \le 0 \\ z(1 - \ln z) & ; 0 \le z \le 1 \\ 1 & ; z \ge 1 \end{cases}$

47. $C = \dfrac{8}{\pi^2}, \quad p_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi(1+z)\sqrt{z}} & ; z > 0 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}$

48. $1 - e^{-2\lambda}\left(1 + 2\lambda + 2\lambda^2 + \dfrac{7\lambda^3}{6}\right)$.

49. $$\left(\frac{29}{30}\right)^{30} \cdot \left[1 - \frac{1}{e}\left(1 + 1 + \frac{1}{2}\right)\right] +$$
$$+ \binom{30}{1} \cdot \frac{1}{30} \cdot \left(\frac{29}{30}\right)^{29} \cdot \left[1 - \frac{1}{e}\left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right)\right] +$$
$$+ \binom{30}{2} \cdot \left(\frac{1}{30}\right)^{2} \cdot \left(\frac{29}{30}\right)^{28} \cdot \left[1 - \frac{1}{e}\left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24}\right)\right] \doteq$$
$\doteq 0^{\cdot}03683$.

50. Pogojno na $Y = 0$ je $X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$.

Pogojno na $X = -1$ je $Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$.

51. $\mathrm{B}\left(Z, \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$.

52. Za $y > 0$ je $p_X(x \mid Y = y) = \begin{cases} e^{-(x-y)} & ; x > y \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}$.

Za $x > 0$ je $p_Y(y \mid X = x) = \begin{cases} 1/x & ; 0 < y < x \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}$.

Pogojno glede na Y ima torej X eksponentno porazdelitev $\mathrm{Exp}(1)$, pomaknjeno za Y v desno.

Pogojno glede na X pa ima Y eksponentno porazdelitev $\mathrm{E}[0, X]$.

5. Številske karakteristike

1. $E(X) = 2, \quad D(X) = 3\text{˙}8, \quad \sigma(X) = 1\text{˙}949.$

2. $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}, \quad D(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}, \quad E(e^{-X}) = \dfrac{\lambda}{\lambda + 1}.$

3. $E(1 + X^2) = 2, \quad D(X) = 1.$

4. $c = \dfrac{2}{\pi}, \quad E(X) = E(Y) = 0, \quad E(X^2) = E(Y^2) = \dfrac{1}{2}, \quad E(X^2 + Y^2) = 1.$

5. Če je n lih, je $E(Z^n) = 0$.
Če je n sod, je $E(Z^n) = 1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (n-1)$.

6. Če je $S \sim \mathrm{B}(n, p)$, je $E(S) = np$ in $D(S) = np(1-p)$.

7. Če je $S \sim \mathrm{Gama}(n, \lambda)$, je $E(S) = n/\lambda$ in $D(S) = n/\lambda^2$.

8. $D(3X - Y) = 64$, $E\big((X + 2Y)^2\big) = 215$.

9. Za $i = 1, \ldots 8$ definirajmo slučajne spremenljivke X_i, kjer naj bo X_i enaka 1, če i-ti igralec stavi svojo ženo, sicer pa 0. Tedaj je očitno:

$$E(X_i) = p_0 := P(i\text{-ti igralec stavi svojo ženo}) = \frac{4}{52} \cdot \frac{48}{51} \cdot \frac{49}{50}$$

Ker je $S = X_1 + \cdots + X_8$, je tudi $E(S) = 8p_0 \doteq 0\text{˙}5676$. Izračunajmo še disperzijo. Najprej bomo izračunali $E(S^2)$, torej bomo morali za poljubna i in j izračunati $E(X_i X_j)$. Očitno je $E(X_i^2) = E(X_i)$. Nadalje opazimo, da sosedna igralca ne moreta oba staviti svoje žene, torej je v tem primeru $E(X_i X_j) = 0$. Če je med i-tim in j-tim igralcem natanko en igralec, je:

$$E(X_i X_j) = p_1 := \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} \cdot \frac{48}{50} \cdot \frac{47}{49} \cdot \frac{46}{48}$$

Končno, če je med i-tim in j-tim igralcem več kot še en igralec, velja:

$$E(X_i X_j) = p_2 := \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} \cdot \frac{48}{50} \cdot \frac{47}{49} \cdot \frac{46}{48} \cdot \frac{45}{47}$$

Torej je $E(S^2) = 8(p_0 + 2p_1 + 3p_2)$ in $D(S) = E(S^2) - \big(E(S)\big)^2 \doteq 0\text{˙}4077$.

10. Če je $X \sim \mathrm{G}(p)$, je $E(X) = 1/p$ in $D(X) = q/p^2$.
Če je $S \sim \mathrm{P}(n, p)$, je $E(X) = n/p$ in $D(X) = nq/p^2$.

11. Če je $S \sim \mathrm{H}(s; r, n)$, je $E(S) = rs/n$.

12. $E(XY^2) = 3\text{˙}55, \quad E(Y \mid X = 4) = 5/7 \doteq 0\text{˙}7143, \quad E(Y^2 \mid X = 4) = 11/7 \doteq 1\text{˙}571,$
$E(XY^2 \mid X = 4) = 4\,E(Y^2 \mid X = 4) = 44/7 \doteq 6.286.$

13. $p_X(x) = \frac{3}{2}x^2 + x$,

$$E(Y \mid X = x) = \frac{4x+3}{6x+4},$$

$$E(XY \mid X = x) = x\,E(Y \mid X = x) = \frac{4x^2+3x}{6x+4}.$$

14. $K(X,Y) = -0{\cdot}93, \quad r(X,Y) \doteq -0{\cdot}3952.$

15. Slučajni spremenljivki X in Y sta odvisni, čeprav sta nekorelirani. To lahko vidimo iz poljubne navzkrižne verjetnosti.

16. $K(X,Y) = -1/576 \doteq 0{\cdot}001736, \quad r(X,Y) = -5/139 \doteq 0{\cdot}03597.$

17. $K(U,V) = a - a^2$, U in V sta nekorelirani pri $a = 0$ in $a = 1$.

18. $A(X) = 2$, $K(X) = 6$.

19. $m = 1$, $s = 4/3$.

6. Karakteristične funkcije

1. $\phi_X(t) = \dfrac{p\,e^{it}}{1-(1-p)e^{it}}$.

2. $\phi_X(t) = \dfrac{\lambda}{\lambda - it}$.

3. $\phi_X(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$.

4. Če je $X \sim \mathrm{B}(n,p)$, je $\phi_X(t) = \big(1-p+p\,e^{it}\big)^n$.

5. Če je $X \sim \mathrm{P}(n,p)$, je $\phi_X(t) = \left(\dfrac{p\,e^{it}}{1-(1-p)e^{it}}\right)^n$.

6. Če je $X \sim \mathrm{Gama}(n,\lambda)$, je $\phi_X(t) = \left(\dfrac{\lambda}{\lambda - it}\right)^n$.

7. $p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{\pi x^2} & ;\ |x| \neq 0 \\ \dfrac{1}{2\pi} & ;\ x = 0 \end{cases}$

8. Slučajna spremenljivka X ima *Cauchyjevo porazdelitev*, t. j.:

$$p_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

9. $X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1/6 & 1/3 & 1/6 & 1/3 \end{pmatrix}$.

10. Slučajna spremenljivka $\overline{X}$ ima prav tako Cauchyjevo porazdelitev.

7. Limitni izreki

1. Zaporedje konvergira tako v verjetnosti kot tudi skoraj gotovo.

2. Za $n \in \mathbb{N}$ označimo s p_n verjetnost, da slučajni sprehod še kdaj pride v izhodišče iz točke n oziroma $-n$ (zaradi simetrije sta verjetnosti očitno enaki). Pokazati moramo, da je $p_1 = 1$.

Če označimo še $p_0 = 1$, iz dinamike slučajnega sprehoda razberemo, da mora za vsak $n \in \mathbb{N}$ veljati $p_n = (p_{n-1} + p_{n+1})/2$ oziroma $p_{n+1} = 2p_n - p_{n-1}$. Tako so vse verjetnosti p_n enolično določene s p_1. Če označimo $\delta := 1 - p_1$, ni težko videti, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $p_n = 1 - n\delta$. Toda ker so p_n verjetnosti in zato $0 \le p_n \le 1$, ni druge možnosti, kot da je $\delta = 0$. Torej je $p_1 = 1$, to pa je bilo potrebno dokazati.

3. Slučajna spremenljivka T_n se razlikuje od S_n le v primeru, ko je $S_n = 0$. Toda po Laplaceovi lokalni formuli je $P(S_n = 0) \sim \sqrt{2/n\pi}$, kar gre proti nič. To pa pomeni, da se mora zaporedje T_n glede konvergence v verjetnosti obnašati enako kot S_n/n.

Po drugi strani pa smo v prejšnji nalogi videli, da se standardni slučajni sprehod skoraj gotovo vrne v izhodišče. To pomeni, da se skoraj gotovo tudi *neskončno mnogokrat* vrne v izhodišče, torej je skoraj gotovo neskončno mnogo slučajnih spremenljivk T_n enakih 2. Toda če je $T_n = 2$, je $S_n = 0$ torej $|S_{n+1}| = 1$ in zato $|T_{n+1}| = 1/(n+1)$. Zaporedje, v katerem se neskončno mnogokrat ponovi ta vzorec, pa ne more nikamor konvergirati.

4. Rezultat, dobljen s pomočjo centralnega limitnega izreka:
$\Phi\left(\frac{9{\cdot}5}{\sqrt{120}}\right) + \Phi\left(\frac{29{\cdot}5}{\sqrt{120}}\right) \doteq 0{\cdot}80355.$
Točen rezultat: 0·80493.

5. Ker ima X enako porazdelitev kot vsota 100 neodvisnih slučajnih spremenljivk, porazdeljenih po hi kvadrat z eno prostostno stopnjo, so izpolnjeni pogoji centralnega limitnega izreka in lahko porazdelitev aproksimiramo z $\mathrm{N}\big(100, \sqrt{200}\big)$.
$P(X > 110)$: CLI: 0·23975, točen rezultat: 0·23220.
$P(90 < X < 110)$: CLI: 0·52050, točen rezultat: 0·52099.

6. a) 400

b) *Prvi način.* Dogodek, da se bo moral potopiti več kot 450-krat, lahko zapišemo kot dogodek, da bo imel po 450 potopih manj kot 80 biserov. Tako, če binomsko porazdelitev $\mathrm{B}(450, 0{\cdot}2)$ aproksimiramo z normalno $\mathrm{N}\big(90, \sqrt{72}\big)$, dobimo približen rezultat 0·10796.

Drugi način. Število potopov je porazdeljeno po Pascalovi porazdelitvi $\mathrm{P}(80, 0{\cdot}2)$, ki jo, ker jo dobimo iz vsote 80 neodvisnih slučajnih spremenljivk, lahko aproksimiramo z normalno $\mathrm{N}(400, 40)$. Tako dobimo približen rezultat 0·10338.

Točen rezultat: 0·10669.

8. Točkasto ocenjevanje parametrov

8. Cenilka A je nepristranska, cenilka M pa je pristranska, saj je $E(M) = (n/(n+1))a$ (je pa *asimptotično nepristranska*). Cenilka M' bo torej nepristranska za $k = (n+1)/n$.

$q(A) = \dfrac{a^2}{3n}, \quad q(M) = \dfrac{2a^2}{(n+1)(n+2)}, \quad q(M') = \dfrac{a^2}{n(n+2)}.$

Pri $n = 1$ so torej vse tri cenilke enako učinkovite.
Pri $n = 2$ sta A in M enako učinkoviti, M' pa je učinkovitejša.
Pri $n \geq 3$ pa je M učinkovitejša od A in M' učinkovitejša od M.

9. Intervali zaupanja

1. $\Delta \doteq 0\dot{}078, \quad 0\dot{}122 \leq p \leq 0\dot{}278.$

2. $\Delta \doteq 0\dot{}0082, \quad 0\dot{}4966 \leq p \leq 0\dot{}5130.$

3. $\bar{X} = 97, \quad \Delta \doteq 3\dot{}27, \quad 93\dot{}73 \leq \mu \leq 100\dot{}27.$

4. $\hat{\sigma} = 5, \quad df = 8, \quad t_{0.975} = 2\dot{}31, \quad \Delta \doteq 3\dot{}85, \quad 93\dot{}15 \leq \mu \leq 100\dot{}85.$

5. $\bar{X} = 125, \quad \hat{\sigma} \doteq 2\dot{}598, \quad df = 4, \quad c_1 \doteq 0\dot{}711, \quad c_2 \doteq 9\dot{}49, \quad 1\dot{}69 \leq \sigma \leq 6\dot{}16.$

10. Testiranje hipotez

1. Če je več kot pol srečk dobitnih, je verjetnost dogodka, da sta med osmimi srečkami dobitni *največ* dve, navzgor omejena z 0˙145, kar s stališča statistike ni zadosten razlog, da bi loterijo sumili goljufije (če kupimo 8 srečk in loterijo osumimo goljufije, brž ko sta dobitni dve srečki ali manj, lahko verjetnost, da jo sumimo po krivici, doseže 0˙145, kar je preveč; verjetnost krivičnega suma sme biti največ 0˙05, če smo še previdnejši, pa največ 0˙01).

4. $n = 100, k = 23$: $\quad Z \doteq 0\dot{}75$, $K_\alpha \doteq (1\dot{}645, \infty)$, hipoteze ne moremo zavrniti.
$n = 1000, k = 230$: $\quad Z \doteq 2\dot{}37$, hipotezo zavrnemo.

5. $\bar{X} = 97, \quad Z = -1\dot{}8.$
Pri alternativni hipotezi $\mu \neq 100$ je $K_\alpha \doteq (-\infty, -1\dot{}96) \cup (1\dot{}96, \infty)$ in hipoteze ne moremo zavrniti.
Pri alternativni hipotezi $\mu < 100$ je $K_\alpha \doteq (-\infty, -1\dot{}645)$ in hipotezo zavrnemo.
Pri alternativni hipotezi $\mu > 100$ pa je $K_\alpha \doteq (1\dot{}645, \infty)$ in hipoteze ne moremo zavrniti.

6. $\bar{X} = 107, \quad \hat{\sigma} = 10, \quad T = 2\dot{}1, \quad df = 8, \quad K_\alpha \doteq (-\infty, -2\dot{}31) \cup (2\dot{}31, \infty).$
Hipoteze ne moremo zavrniti.
Če bi vedeli, da je $\sigma = 10$, pa bi bilo $K_\alpha \doteq (-\infty, -1\dot{}96) \cup (1\dot{}96, \infty)$ in hipotezo bi zavrnili.

9. $\bar{X} = 100, \quad \bar{Y} = 96, \quad \hat{\sigma} = 2\dot{}5, \quad T = 3\dot{}2, \quad df = 16, \quad K_\alpha \doteq (2\dot{}58, \infty).$
Hipotezo zavrnemo.