1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE ZA BIOLOGE
20. december 2005

1. Dana je množica $A = \{n \in \mathbb{N} | n \leq 20\}$. Na množici A imamo podano relacijo $\mathcal{R}$ s predpisom: $m\mathcal{R}n$ natanko tedaj, kadar obstaja tako število $k \in \mathbb{Z}$, da velja $m - n = 4k$.
   (a) Pokaži, da je $\mathcal{R}$ ekvivalenčna relacija,
   (b) Določi ekvivalenčne razrede, na katere $\mathcal{R}$ razbije množico A.
   (c) Kateri elementi n množice A imajo lastnost $n\mathcal{R}6$?

2. Strelca streljata v tarčo. Prvi jo zadene z verjetnostjo $\frac{3}{4}$, drugi pa z verjetnostjo $\frac{5}{8}$. Vsak dvakrat ustreli proti tarči, ki je le enkrat zadeta. Kakšna je verjetnost, da jo je zadel prvi strelec?

3. Določi realno število a, tako da bo naslednji sistem rešljiv in reši sistem:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & y & - & 2z & = & 1 \\ -x & - & 5y & + & 7z & = & a. \end{array}$$

4. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} -11 & -8 & 0 \\ 12 & 9 & 0 \\ 24 & 18 & -1 \end{bmatrix}.$$

   Izračunaj njene lastne vrednosti in lastne vektorje. Ali se da A diagonalizirati?

Rešitve

1. (a) Refleksivnost: za vsak n velja $n - n = 4 \cdot 0$. Zato velja $n\mathcal{R}n$ za vsak $n \in A$.

Simetričnost: denimo, da za neka $m, n \in A$ velja $m\mathcal{R}n$. Torej obstaja tako celo število k, da je $m - n = 4k$. Potem je pa $n - m = 4(-k)$ in zato $n\mathcal{R}m$.

Tranzitivnost: denimo, da za neke $m, n, o \in A$ velja $m\mathcal{R}n$ in $n\mathcal{R}o$. Torej obstajata taki celi števili k in l, da velja $m - n = 4k$ in $n - o = 4l$. Seštejemo ti dve enačbi in dobimo $m - o = 4(k + l)$. Torej velja tudi $m\mathcal{R}o$.

(b) V nekem ekvivalenčnem razredu ležijo natanko vsi elementi množice A, ki so med seboj v relaciji. Ekvivalenčni razredi so torej: $[1] = \{1, 5, 9, 13, 17\}$, $[2] = \{2, 6, 10, 14, 18\}$, $[3] = \{3, 7, 11, 15, 19\}$, $[4] = \{4, 8, 12, 16, 20\}$.

(c) $2, 6, 10, 14, 18$. (To so ravno vsi elementi, ki ležijo v istem ekvivalenčnem razredu kot 6.)

2. Označimo s C dogodek, da je cilj enkrat zadet in z Z_1 dogodek, da prvi strelec v dveh poskusih enkrat zadene cilj. Iščemo torej verjetnost $P(Z_1|C)$. Računamo lahko po formuli za pogojno verjetnost

$$P(Z_1|C) = \frac{P(Z_1 \cap C)}{P(C)}.$$

Dogodek C se lahko zgodi na štiri možne načine: prvi ga lahko zadene v prvem ali drugem poskusu ali pa ga zadene drugi v prvem ali drugem poskusu. Zato je

$$P(C) = 2\frac{3}{4}\frac{1}{4}\left(\frac{3}{8}\right)^2 + 2\frac{5}{8}\frac{3}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{84}{16 \cdot 64}$$

Podobno je

$$P(Z_1 \cap C) = 2\frac{3}{4}\frac{1}{4}\left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{54}{16 \cdot 64}$$

Torej je

$$P(Z_1|C) = \frac{P(Z_1 \cap C)}{P(C)} = \frac{54}{84} = \frac{9}{14}.$$

3. $a = 7$; rešitev sistema:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/3 \\ -5/3 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1/3 \\ 4/3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

4.

$$D = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

2. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE ZA BIOLOGE
23. marec 2006

1. Izračunaj limiti:

   (a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{4x+2}-\sqrt{6x-2}}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$

   (b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x}$

2. Ali sta vrsti konvergentni?

   (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{n^2}$

   (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$

3. Dan je kvadratni list papirja s stranico $a = 1m$. V vsakem vogalu izrežemo kvadrat enake velikosti. Nato sestavimo škatlo brez pokrova. Kakšna mora biti stranica izrezanih kvadratov, da bo prostornina škatle največja?

4. Dana je funkcija
$$y = \frac{\ln x}{x}.$$
Določi definicijsko območje, zalogo vrednosti, ničle, vodoravne in navpične asimptote, ekstreme, intervale naraščanja in padanja ter prevoje. Čim bolj natančno nariši graf.

Rešitve:
1. (a) $-\frac{2}{\sqrt{5}}$, (b) $\frac{1}{2}$.
2. (a) Ne, saj členi vrste ne grejo proti 0. Lahko tudi kvocientni ali korenski kriterij.
(b) Kvocientni kriterij:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n\cdot 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot 2n} \\ &= \frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}{(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot 2n} \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot 2n}{(n+2)\cdot(n+3)\cdot\ldots\cdot 2n\cdot(2n+1)\cdot(2n+2)\cdot 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n} \\ &= \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}. \end{aligned}$$

Zato

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{1}{4} < 1.$$

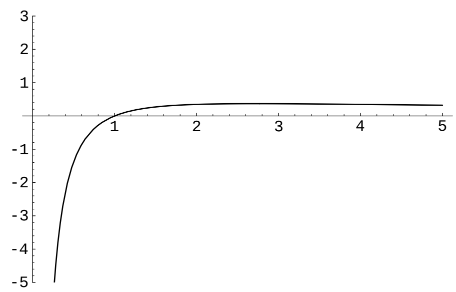
Vrsta je konvergentna.

3. Označimo z x dolžino kvadrata, ki ga izrežemo. Škatla ima za osnovno ploskev kvadrat s stranico $1-2x$ in višino x. Njena prostornina je torej

$$V = (1-2x)^2 x = 4x^3 - 4x^2 + x.$$

Da bo prostornina največja, mora biti $V' = 0$, torej $12x^2 - 8x + 1 = 0$. Dobimo $x_1 = \frac{1}{2}$ in $x_2 = \frac{1}{6}$. Rešitev x_1 ni dobra, saj bi nam dala škatla s prostornino $V = 0$. Največjo prostornino torej dobimo pri $x = \frac{1}{6}$.

4. $D_f = (0, \infty)$, $Z_f = (-\infty, \frac{1}{e})$, ničla pri $x = 1$. Navpična asimptota: $x = 0$. Vodoravna asimptota: $y = 0$. V točki $T(e, \frac{1}{e})$ doseže funkcija maksimum, na intervalu $(0, e)$ narašča, na intervalu (e, ∞) pa pada. Prevoj: pri $x = e^{\frac{3}{2}}$.



3. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE ZA BIOLOGE
18. maj 2006

1. Funkcijo
$$f(x) = \frac{5}{6 + x - x^2}$$
razvij v Taylorjevo vrsto okrog točke 0.

2. Izračunaj ploščino lika med parabolo $y = -x^2 + 2x$ in premico $y = x - 2$.

3. Določi največjo in najmanjšo vrednost funkcije
$$f(x, y) = x^2 - 2x + y^2 - 2y$$
na trikotniku z oglišči $A(0, 0)$, $B(2, 0)$ in $C(0, 2)$.

4. Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe
$$y' + \frac{y}{1 + x} = 3(1 + x).$$

Rešitve:

1. Ulomek najprej razstavimo na parcialne ulomke:
$$f(x) = \frac{1}{3 - x} + \frac{1}{x + 2}.$$
Razvijemo vsak člen posebej:
$$\frac{1}{3 - x} = \frac{1}{3(1 - \frac{x}{3})} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^{n+1}}$$
in
$$\frac{1}{2 + x} = \frac{1}{2(1 - (-\frac{x}{3}))} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^{n+1}}$$
Na koncu seštejemo in dobimo:
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}) x^n$$

2. Najprej izračunamo presečišči: $x = -1$ in $x = 2$. Ploščino računamo po formuli:
$$p = \int_{-1}^{2} (-x^2 + 2x - x + 2) dx = \int_{-1}^{2} (-x^2 + x + 2) dx = \frac{9}{2}.$$

3. V notranjosti izračunamo oba parcialna odvoda in dobimo kandidate za ekstreme kot skupne ničle obeh odvodov. Edini kandidat v notranjosti je $T_1(1,1)$. Vrednost funkcije v tej točki je $f(1,1) = -2$. Na premici $x = 0$ imamo $f(y) = y^2 - 2y$ in stacionarno točko $T_2(0,1)$; $f(0,1) = -1$. Na premici $y = 0$ imamo $f(x) = x^2 - 2x$ in stacionarno točko $T_3(1,0)$; $f(1,0) = -1$. Tretja stranica trikotnika leži na premici $y = 2 - x$. Edina stacionarna točka na tej premici je točka T_1. Vrednost funkcije v ogliščih: $f(0,0) = f(0,2) = f(2,0) = 0$. Kandidati za ekstreme so torej vsa tri oglišča in točke T_1, T_2, T_3. Največjo vrednost doseže funkcija v ogliščih, najmanjšo pa v točki T_1.

4. Rešitev homogene enačbe je $y_H = \frac{C}{1+x}$. Posebno rešitev lahko uganemo: $y_P = 1 + x^2$. Splošna rešitev je torej

$$y = y_H + y_P = \frac{C}{1+x} + (1+x)^2.$$

Če ne uganemo posebne rešitve, delamo variacijo konstante.

PISNI IZPIT IZ MATEMATIKE ZA BIOLOGE
1. junij 2006

1. V posodi so listki, oštevilčeni od 1 do 50. Na slepo potegnemo en listek. Kolikšna je verjetnost, da bo število na listku
   (a) deljivo s 6
   (b) večje od 5 in manjše od 32?

2. Reši enačbo $AX + BX = AB - I$, kjer je
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ in } B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Dana je funkcija
$$f(x) = xe^{-x}.$$
Določi njeno definicijsko območje, zalogo vrednosti, ekstreme, območja naraščanja in padanja ter prevoje. Čimbolj natančno nariši graf.

4. Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe
$$y'' - 2y' + y = \cos x.$$

PISNI IZPIT IZ MATEMATIKE ZA BIOLOGE
22. junij 2006

1. Reši sistem linearnih enačb:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 3y & - & 5z & + & 2u & = & -11 \\ -x & + & 2y & + & 4z & + & u & = & 8 \\ x & + & 4y & - & z & & & = & -24 \\ 2x & - & 5y & - & 3z & - & u & = & 13 \end{array}$$

2. S pomočjo kvocientnega oz. korenskega kriterija ugotovi, ali sta naslednji vrsti konvergentni:

   (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^5}$,

   (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(\ln n)^n}$.

3. Poišči enačbo tangente in normale na krivuljo

$$y = \frac{8}{4+x^2}$$

   pri $x = 2$.

4. Poišči tisto rešitev diferencialne enačbe

$$\sqrt{1-x^2}y' + \sqrt{1-y^2} = 0,$$

   ki zadošča pogoju $y(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = 1$.

Rešitve:

1. $x = 1$, $y = -5$, $z = 5$ in $u = -1$.

2. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 3$; vrsta divergira. b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 0$; vrsta konvergira.

3. (b) $y' = \frac{-16x}{(4+x^2)^2}$, $y'(2) = -\frac{1}{2} = k_T$ in $k_N = 2$. Enačba tangente na krivuljo skozi točko $T(2,1)$ je $y = -\frac{x}{2} + 2$, enačba normale pa $y = 2x - 3$.

   (c) Ploščina je

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{9}{4+x^2}dx = 2\int_0^{\infty} \frac{9}{4+x^2}dx = 16 \text{ arctg } t|_0^{\infty} = 8\pi.$$

4. Enačba ima ločljive spremenljivke. Splošna rešitev je $y = \sin(-\arcsin x + C)$. Pogoj nam da $C = \frac{\pi}{4}$ in posebna rešitev je $y_P = \sin(-\arcsin x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{1-x^2} - x)$.

PISNI IZPIT IZ MATEMATIKE ZA BIOLOGE
24. avgust 2006

1. Dana je matrika
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 8 \end{bmatrix}.$$
Določi njene lastne vrednosti in lastne vektorje. Ali je matrika A diagonalizabilna?

2. Med vsemi pravokotnimi trikotniki s hipotenuzo $c = 1\text{dm}$ določi tistega, ki ima največjo ploščino. (Izračunaj dolžini katet.)

3. Izračunaj
$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + 5x + 6}$$

4. Poišči tisto rešitev diferencialne enačbe
$$xy' - 2y = x^3 \ln x,$$
ki gre skozi točko $T(1, 3)$.

Rešitve:

1. Lastne vrednosti: $0, 2, 7$. Ustrezni lastni vektorji: $[2, -7, 4]^T, [1, -1, 1]^T, [1, 0, 2]^T$.
2. Dobimo enakokraki trikotnik s katetama $a = b = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
3. $\ln \frac{3}{2}$.
4. $y_P = (x(\ln x - 1) + 4)x^2$.