PISNI IZPIT IZ MATEMATIKE ZA BIOLOGE
22. junij 2006

1. Reši sistem linearnih enačb:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 3y & - & 5z & + & 2u & = & -11 \\ -x & + & 2y & + & 4z & + & u & = & 8 \\ x & + & 4y & - & z & & & = & -24 \\ 2x & - & 5y & - & 3z & - & u & = & 13 \end{array}$$

2. S pomočjo kvocientnega oz. korenskega kriterija ugotovi, ali sta naslednji vrsti konvergentni:

   (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^5}$,

   (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(\ln n)^n}$.

3. Poišči enačbo tangente in normale na krivuljo

$$y = \frac{8}{4+x^2}$$

   pri $x = 2$.

4. Poišči tisto rešitev diferencialne enačbe

$$\sqrt{1-x^2}y' + \sqrt{1-y^2} = 0,$$

   ki zadošča pogoju $y(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = 1$.

Rešitve:

1. $x = 1$, $y = -5$, $z = 5$ in $u = -1$.

2. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 3$; vrsta divergira. b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 0$; vrsta konvergira.

3. (b) $y' = \frac{-16x}{(4+x^2)^2}$, $y'(2) = -\frac{1}{2} = k_T$ in $k_N = 2$. Enačba tangente na krivuljo skozi točko $T(2,1)$ je $y = -\frac{x}{2} + 2$, enačba normale pa $y = 2x - 3$.

   (c) Ploščina je

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{9}{4+x^2} dx = 2\int_0^{\infty} \frac{9}{4+x^2} dx = 16 \text{ arctg } t|_0^{\infty} = 8\pi.$$

4. Enačba ima ločljive spremenljivke. Splošna rešitev je $y = \sin(-\arcsin x + C)$. Pogoj nam da $C = \frac{\pi}{4}$ in posebna rešitev je $y_P = \sin(-\arcsin x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{1-x^2} - x)$.