

PISNI IZPIT IZ MATEMATIKE ZA BIOLOGE, 31. 5. 2005

1. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Določi lastne vrednosti in lastne vektorje matrike A . Ali se da diagonalizirati?

2. Dana je funkcija

$$y = \frac{x+1}{x-1}.$$

Nariši njen graf in izračunaj ploščino pod krivuljo na intervalu $[\frac{3}{2}, 4]$.

3. Dana je funkcija

$$z(x, y) = e^y \varphi \left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}} \right).$$

kjer je φ neka funkcija ene spremenljivke. Izračunaj parcialna odvoda $\frac{\partial z}{\partial x}$ in $\frac{\partial z}{\partial y}$ ter pokaži, da funkcija z zadošča enačbi:

$$(x^2 - y^2) \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = xyz.$$

4. Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe

$$y'' - 2y' + y = 4e^{-t}.$$

(*Nasvet:* posebno rešitev poišči z nastavkom $y = Ae^{-t}$.)

Rešitve

1. Lastna vrednost je -1 , matrika ima samo en linearno neodvisen lastni vektor $(-1, -1, 1)$. Zato se ne da diagonalizirati. (Za diagonalizacijo bi rabili bi 3 linearno neodvisne lastne vektorje.)

2. $p = \frac{5}{2} + \ln 6 \approx 6,08$.

3.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^y \varphi' \left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}} \right) x e^{\frac{x^2}{2y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = e^y \varphi \left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}} \right) + e^y \varphi' \left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}} \right) e^{\frac{x^2}{2y^2}} (1 - x^2).$$

Direkten račun pokaže, da parcialna odvoda ustrezata dani enačbi.

4. $y = (c_1 t + c_2) e^t + e^{-t}$.