1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE ZA BIOLOGE
10. december 2004

1. Dani sta preslikavi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ in $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, podani s predpisoma

$$f(x) = (x, 2x) \text{ in } g(x, y) = y$$

   za poljubna $x, y \in \mathbb{R}$.

   (a) Določi obe zalogi vrednosti in pokaži, da je preslikava f injektivna, g pa surjektivna.

   (b) Izračunaj kompozituma $f \circ g$ in $g \circ f$ in ugotovi, kakšne lastnosti imata preslikavi $f \circ g$ in $g \circ f$. Če je katera od njiju bijektivna, poišči njen inverz.

2. Iz kupa 52 kart izberemo 5 kart.

   (a) Na koliko načinov lahko to storimo?

   (b) Kakšna je verjetnost, da so med izbranimi kartami natanko trije kralji?

3. Poišči matriko X, ki zadošča enačbi $AX + B = I$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   in

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

   .

4. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{bmatrix}.$$

   Izračunaj njene lastne vrednosti in lastne vektorje. Ali se da A diagonalizirati?

REŠITVE

1. a) $Z_f = \{(x,y); y = 2x\}$, $Z_g = \mathbb{R}$. Funkcija f je injektivna, saj iz $(x,2x) = (x',2x')$ sledi $x = x'$; ni pa surjektivna, saj denimo urejeni par $(1,3)$ ni slika nobenega x-a. Preslikava g je surjektivna, ker je njena zaloga vrednosti enaka kodomeni (poljuben $y \in$ je slika urejenega para $(1,y)$). g ni injektivna, ker je $g(1,2) = g(2,2) = 2$.

   b) $(f \circ g)(x,y) = (y,2y)$: preslikava je injektivna, ni surjektivna. $(g \circ f)(x) = 2x$: bijektivna preslikava z inverzom $(g \circ f)^{-1}(x) = \frac{x}{2}$.

2. a) $\binom{52}{5} = 2598960$. b) $\dfrac{\binom{4}{3}\binom{48}{2}}{\binom{52}{5}} \doteq 0.0017$. c) $1 - \dfrac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}} \doteq 0.34$.

3. $$X = -A^{-1}B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

4. $$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},\ S = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$