1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE ZA BIOLOGE
20. december 2005

1. Dana je množica $A = \{n \in \mathbb{N} | n \leq 20\}$. Na množici A imamo podano relacijo $\mathcal{R}$ s predpisom: $m\mathcal{R}n$ natanko tedaj, kadar obstaja tako število $k \in \mathbb{Z}$, da velja $m - n = 4k$.
   (a) Pokaži, da je $\mathcal{R}$ ekvivalenčna relacija,
   (b) Določi ekvivalenčne razrede, na katere $\mathcal{R}$ razbije množico A.
   (c) Kateri elementi n množice A imajo lastnost $n\mathcal{R}6$?

2. Strelca streljata v tarčo. Prvi jo zadene z verjetnostjo $\frac{3}{4}$, drugi pa z verjetnostjo $\frac{5}{8}$. Vsak dvakrat ustreli proti tarči, ki je le enkrat zadeta. Kakšna je verjetnost, da jo je zadel prvi strelec?

3. Določi realno število a, tako da bo naslednji sistem rešljiv in reši sistem:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & y & - & 2z & = & 1 \\ -x & - & 5y & + & 7z & = & a. \end{array}$$

4. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} -11 & -8 & 0 \\ 12 & 9 & 0 \\ 24 & 18 & -1 \end{bmatrix}.$$

   Izračunaj njene lastne vrednosti in lastne vektorje. Ali se da A diagonalizirati?

Rešitve

1. (a) Refleksivnost: za vsak n velja $n - n = 4 \cdot 0$. Zato velja $n\mathcal{R}n$ za vsak $n \in A$.

Simetričnost: denimo, da za neka $m, n \in A$ velja $m\mathcal{R}n$. Torej obstaja tako celo število k, da je $m - n = 4k$. Potem je pa $n - m = 4(-k)$ in zato $n\mathcal{R}m$.

Tranzitivnost: denimo, da za neke $m, n, o \in A$ velja $m\mathcal{R}n$ in $n\mathcal{R}o$. Torej obstajata taki celi števili k in l, da velja $m - n = 4k$ in $n - o = 4l$. Seštejemo ti dve enačbi in dobimo $m - o = 4(k + l)$. Torej velja tudi $m\mathcal{R}o$.

(b) V nekem ekvivalenčnem razredu ležijo natanko vsi elementi množice A, ki so med seboj v relaciji. Ekvivalenčni razredi so torej: $[1] = \{1, 5, 9, 13, 17\}$, $[2] = \{2, 6, 10, 14, 18\}$, $[3] = \{3, 7, 11, 15, 19\}$, $[4] = \{4, 8, 12, 16, 20\}$.

(c) $2, 6, 10, 14, 18$. (To so ravno vsi elementi, ki ležijo v istem ekvivalenčnem razredu kot 6.)

2. Označimo s C dogodek, da je cilj enkrat zadet in z Z_1 dogodek, da prvi strelec v dveh poskusih enkrat zadene cilj. Iščemo torej verjetnost $P(Z_1|C)$. Računamo lahko po formuli za pogojno verjetnost

$$P(Z_1|C) = \frac{P(Z_1 \cap C)}{P(C)}.$$

Dogodek C se lahko zgodi na štiri možne načine: prvi ga lahko zadene v prvem ali drugem poskusu ali pa ga zadene drugi v prvem ali drugem poskusu. Zato je

$$P(C) = 2\frac{3}{4}\frac{1}{4}\left(\frac{3}{8}\right)^2 + 2\frac{5}{8}\frac{3}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{84}{16 \cdot 64}$$

Podobno je

$$P(Z_1 \cap C) = 2\frac{3}{4}\frac{1}{4}\left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{54}{16 \cdot 64}$$

Torej je

$$P(Z_1|C) = \frac{P(Z_1 \cap C)}{P(C)} = \frac{54}{84} = \frac{9}{14}.$$

3. $a = 7$; rešitev sistema:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/3 \\ -5/3 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1/3 \\ 4/3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

4.

$$D = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$