

2. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE ZA BIOLOGE
23. marec 2006

1. Izračunaj limiti:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+2} - \sqrt{6x-2}}{\sqrt{x} - \sqrt{2}}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x - x + 1}{(x-1) \ln x}$$

2. Ali sta vrsti konvergentni?

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

3. Dan je kvadratni list papirja s stranico $a = 1m$. V vsakem vogalu izrežemo kvadrat enake velikosti. Nato sestavimo škatlo brez pokrova. Kakšna mora biti stranica izrezanih kvadratov, da bo prostornina škatle največja?

4. Dana je funkcija

$$y = \frac{\ln x}{x}.$$

Določi definicijsko območje, zalogo vrednosti, ničle, vodoravne in navpične asimptote, ekstreme, intervale naraščanja in padanja ter prevoje. Čim bolj natančno nariši graf.

Rešitve:

1. (a) $-\frac{2}{\sqrt{5}}$, (b) $\frac{1}{2}$.

2. (a) Ne, saj členi vrste ne gredo proti 0. Lahko tudi kvocientni ali korenski kriterij.

(b) Kvocientni kriterij:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot \dots \cdot 2n} \\ &= \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}{(n+1) \cdot (n+2) \cdot \dots \cdot 2n} \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot \dots \cdot 2n}{(n+2) \cdot (n+3) \cdot \dots \cdot 2n \cdot (2n+1) \cdot (2n+2) \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} \\ &= \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}. \end{aligned}$$

Zato

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{1}{4} < 1.$$

Vrsta je konvergentna.

3. Označimo z x dolžino kvadrata, ki ga izrežemo. Škatla ima za osnovno ploskev kvadrat s stranico $1 - 2x$ in višino x . Njena prostornina je torej

$$V = (1 - 2x)^2 x = 4x^3 - 4x^2 + x.$$

Da bo prostornina največja, mora biti $V' = 0$, torej $12x^2 - 8x + 1 = 0$. Dobimo $x_1 = \frac{1}{2}$ in $x_2 = \frac{1}{6}$. Rešitev x_1 ni dobra, saj bi nam dala škatla s prostornino $V = 0$. Največjo prostornino torej dobimo pri $x = \frac{1}{6}$.

4. $D_f = (0, \infty)$, $Z_f = (-\infty, \frac{1}{e})$, ničla pri $x = 1$. Navpična asimptota: $x = 0$. Vodoravna asimptota: $y = 0$. V točki $T(e, \frac{1}{e})$ doseže funkcija maksimum, na intervalu $(0, e)$ narašča, na intervalu (e, ∞) pa pada. Prevoj: pri $x = e^{\frac{3}{2}}$.

