3. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE ZA BIOLOGE
18. maj 2006

1. Funkcijo
$$f(x) = \frac{5}{6 + x - x^2}$$
razvij v Taylorjevo vrsto okrog točke 0.

2. Izračunaj ploščino lika med parabolo $y = -x^2 + 2x$ in premico $y = x - 2$.

3. Določi največjo in najmanjšo vrednost funkcije
$$f(x, y) = x^2 - 2x + y^2 - 2y$$
na trikotniku z oglišči $A(0, 0)$, $B(2, 0)$ in $C(0, 2)$.

4. Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe
$$y' + \frac{y}{1 + x} = 3(1 + x).$$

Rešitve:

1. Ulomek najprej razstavimo na parcialne ulomke:
$$f(x) = \frac{1}{3 - x} + \frac{1}{x + 2}.$$
Razvijemo vsak člen posebej:
$$\frac{1}{3 - x} = \frac{1}{3(1 - \frac{x}{3})} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^{n+1}}$$
in
$$\frac{1}{2 + x} = \frac{1}{2(1 - (-\frac{x}{3}))} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^{n+1}}$$
Na koncu seštejemo in dobimo:
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}) x^n$$

2. Najprej izračunamo presečišči: $x = -1$ in $x = 2$. Ploščino računamo po formuli:
$$p = \int_{-1}^{2} (-x^2 + 2x - x + 2) dx = \int_{-1}^{2} (-x^2 + x + 2) dx = \frac{9}{2}.$$

3. V notranjosti izračunamo oba parcialna odvoda in dobimo kandidate za ekstreme kot skupne ničle obeh odvodov. Edini kandidat v notranjosti je $T_1(1,1)$. Vrednost funkcije v tej točki je $f(1,1) = -2$. Na premici $x = 0$ imamo $f(y) = y^2 - 2y$ in stacionarno točko $T_2(0,1)$; $f(0,1) = -1$. Na premici $y = 0$ imamo $f(x) = x^2 - 2x$ in stacionarno točko $T_3(1,0)$; $f(1,0) = -1$. Tretja stranica trikotnika leži na premici $y = 2 - x$. Edina stacionarna točka na tej premici je točka T_1. Vrednost funkcije v ogliščih: $f(0,0) = f(0,2) = f(2,0) = 0$. Kandidati za ekstreme so torej vsa tri oglišča in točke T_1, T_2, T_3. Največjo vrednost doseže funkcija v ogliščih, najmanjšo pa v točki T_1.

4. Rešitev homogene enačbe je $y_H = \frac{C}{1+x}$. Posebno rešitev lahko uganemo: $y_P = 1 + x^2$. Splošna rešitev je torej

$$y = y_H + y_P = \frac{C}{1+x} + (1+x)^2.$$

Če ne uganemo posebne rešitve, delamo variacijo konstante.