MATEMATIKA ZA BIOLOGE

Zapiski predavanj

Milan Hladnik

Fakulteta za matematiko in fiziko
Ljubljana 2006

KAZALO

I. DISKRETNA MATEMATIKA

1. Množice, relacije, funkcije

Množice

Množice bomo označevali z velikimi črkami, elemente pa z malimi. *Množica* je določena z vsemi svojimi elementi. Za vsako reč moramo znati povedati, ali pripada dani množici ali ne. Če reč x pripada množici A, bomo rekli, da je x *element* množice A in zapisali $x \in A$. Tu je $\in$ znak pripadnosti. Njegova negacija je znak $\notin$, ki ga uporabljamo, ko hočemo povedati, da npr. y ni element množice A, na kratko $y \notin A$. Elementi, ki niso v množici A, pripadajo njenemu *komplementu*, ki ga ponavadi označimo z A^c ali $\mathcal{C}A$.

ZGLED. Za nekatere številske množice, s katerimi se bomo pogosto ukvarjali, vpeljemo standardne oznake: $\mathbb{N}$ za množico vseh naravnih števil, $\mathbb{Z}$ za množico vseh celih števil, $\mathbb{Q}$ za množico vseh racionalnih števil, $\mathbb{R}$ za množico vseh realnih števil in $\mathbb{C}$ za množico vseh kompleksnih števil. Tako npr. velja $2 \in \mathbb{N}$, $-2 \notin \mathbb{N}$ in $1/2 \notin \mathbb{N}$. Seveda je $-2 \in \mathbb{Z}$ in $1/2 \in \mathbb{Q}$. Prav tako $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, vendar pa je $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$. Komplement množice racionalnih števil $\mathbb{Q}$ med vsemi realnimi števili je množica $\mathbb{Q}^c$ vseh iracionalnih števil.

Množica je lahko *prazna* (nima nobenega elementa), *singleton* (ima en sam element), *par* (ima dva elementa) itd. Lahko ima končno ali neskončno elementov (točno definicijo bomo povedali kasneje). Opišemo jo tako, da naštejemo vse njene elemente (če jih je končno mnogo in če jih ni preveč) ali da navedemo, kakšno lastnost, ki je skupna vsem elementom te množice in nobenim drugim.

ZGLED. Množico s tremi elementi $\{1, 2, 3\}$ bi lahko opisali tudi kot *množico prvih treh naravnih števil* ali kot $\{n \in \mathbb{N};\ n \leq 3\}$. Množica $\{n \in \mathbb{N};\ n < 0\}$ pa je prazna, ker nobeno naravno število ni manjše od 0. Podobno lahko množico z enim elementom $\{\sqrt{2}\}$ opišemo tudi kot množico $\{x \in \mathbb{R};\ x > 0,\ x^2 = 2\}$, množica $\{x \in \mathbb{R};\ x^2 + 1 = 0\}$ pa je spet prazna, ker nobeno realno število x ne ustreza enačbi $x^2 + 1 = 0$.

Če je vsak element množice A hkrati tudi element množice B, rečemo, da je množica A *podmnožica* množice B in zapišemo $A \subset B$. Uporabili smo znak *inkluzije* $\subset$. Množica A je torej v celoti *vsebovana* v množici B, slednja pa ima seveda lahko še druge elemente, ki ne pripadajo podmnožici A. V posebnem primeru se lahko zgodi, da v B drugih elementov ni. Tedaj sta množici A in B *enaki*, $A = B$. Element x je tedaj v A natanko takrat, ko je v B. Lahko tudi rečemo, da sta množici A in B enaki natanko tedaj, ko je $A \subset B$ in $B \subset A$.

ZGLED. Med vpeljanimi številskimi množicami veljajo naslednje inkluzije: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Nobena od njih ni prava inkluzija, se pravi, da nobeni dve zaporedni množici tu nista enaki.

Prazno množico označimo z $\emptyset$ in je vedno podmnožica katerekoli množice. V smislu zgornje definicije so vse prazne množice med seboj enake. Inkluzija ima še naslednje lastnosti: $A \subset A$, $A \subset B \Rightarrow B^c \subset A^c$, $A \subset B$ in $B \subset A \Rightarrow A = B$.

Množico vseh podmnožic dane množice A imenujemo *potenčna množica* množice A in običajno označimo s $\mathcal{P}A$.

ZGLED. $\mathcal{P}\{1,2,3\} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$.

Med množicami uvedemo določene operacije. Tako je *unija* dveh množic A in B množica, ki združuje elemente obeh množic. Označimo jo z $A \cup B$, torej je $A \cup B = \{x; x \in A \text{ ali } x \in B\}$. *Presek* dveh množic pa je množica, sestavljena iz skupnih elementov, simbolično $A \cap B = \{x; x \in A \text{ in } x \in B\}$. Če skupnih elementov ni, se pravi, če je presek $A \cap B = \emptyset$, rečemo, da sta množici A in B *disjunktni*. Običajno definiramo še *razliko* $A \setminus B$ kot množico tistih elementov v A, ki ne pripadajo množici B, se pravi $A \setminus B = \{x; x \in A \text{ in } x \notin B\} = A \cap B^c$. Podobno bi lahko definirali tudi razliko $B \setminus A$.

ZGLED. Naj bo $A = \{1,2,3\},\ B = \{2,3,4,5\}$. Tedaj je $A \cup B = \{1,2,3,4,5\},\ A \cap B = \{2,3\},\ A \setminus B = \{1\},\ B \setminus A = \{4,5\}$.

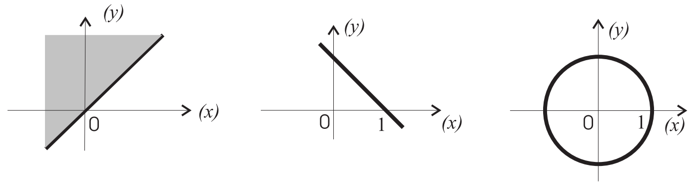
Obstaja še ena pomembna operacija med množicami, t.i. kartezični produkt množic. Par elementov $x \in A$ in $y \in B$ bomo imenovali *urejeni par* in zapisali (x, y). Pri tem je važen vrstni red: x je prva in y druga komponenta; urejen par (x, y) se razlikuje od urejenega para (y, x). Množico vseh urejenih parov (x, y), pri čemer je $x \in A$ in $y \in B$ pa imenujemo *kartezični produkt* množic A in B. Označimo ga z $A \times B$, torej je $A \times B = \{(x, y); x \in A,\ y \in B\}$.

ZGLED. (a) Če je $A = \{1,2,3\}$ in $B = \{2,3,4,5\}$, je njun kartezični produkt enak $A \times B = \{(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5)\}$.
(b) Kartezični produkt množice realnih števil $\mathbb{R}$ same s seboj je kartezična ravnina $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y); x, y \in \mathbb{R}\}$.

Relacije

Med elementi dane množice so lahko kakšne povezave; pravimo da veljajo določene *relacije*. Ker gre v teh primerih za odnose med dvema elementoma, pravimo, da veljajo *binarne* ali *dvočlenske* relacije. Poljubno dvočlensko relacijo med elementi dane množice A označimo z $\mathcal{R}$, dejstvo, da velja med elementoma x in y ta relacija pa z $x\mathcal{R}y$. Vsaka relacija $\mathcal{R}$ v množici A določa neko podmnožico $G_{\mathcal{R}}$ kartezičnega produkta $A \times A$, namreč podmnožico tistih urejenih parov (x, y), za katere velja $x\mathcal{R}y$. Tej podmnožici rečemo *graf* relacije $\mathcal{R}$, torej je $G_{\mathcal{R}} = \{(x, y) \in A \times A; x\mathcal{R}y\}$.

ZGLED. V potenčni množici dane množice S sta npr. znani relacija inkluzije $A \subset B$ in relacija enakosti $A = B$, ki smo ju že spoznali. V množici naravnih števil imamo relacijo deljivosti $x|y$ (x deli y) ali pa relacijo $x \leq y$ (x je manjši ali enak y). Zadnjo relacijo imamo tudi v množici realnih števil, relacijo predstavlja tudi kakršna koli enačba, ki povezuje x in y, npr. $x + y = 1$ ali $x^2 + y^2 = 1$. Na sliki 1 so prikazani grafi omenjenih relacij v $\mathbb{R}$.



Slika 1

Relacije imajo lahko take ali drugačne lastnosti. Pravimo, da je relacija $\mathcal{R}$ v dani množici A *refleksivna*, če za poljuben element $x \in A$ velja $x\mathcal{R}x$, *simetrična*, če za poljubna elementa $x, y \in A$ iz $x\mathcal{R}y$ sledi $y\mathcal{R}x$, in *tranzitivna*, če za poljubne tri elemente $x, y, z \in A$ iz $x\mathcal{R}y$ in $y\mathcal{R}z$ sledi $x\mathcal{R}z$. Relacija $\leq$ med števili je npr. refleksivna in tranzitivna, ni pa simetrična. Zanjo velja še ta lastnost: če je $x \leq y$ in $y \leq x$, sta števili x in y enaki. Podobna lastnost velja za relacijo inkluzije med množicami. Taki lastnosti rečemo *antisimetričnost*. Posebno ugodno je, če ima relacija $\mathcal{R}$ vse tri lastnosti: refleksivnost, simetričnost in tranzitivnost. Taki relaciji rečemo *ekvivalenčna relacija*. Primer ekvivalenčne relacije je relacija enakosti med množicami.

Vsaka ekvivalenčna relacija razdeli množico A, v kateri deluje, na same disjunktne podmnožice. Relacijo označimo z $\sim$ in definirajmo *ekvivalenčni razred* elementa $x \in A$ s predpisom $[x] = \{u \in A;\ u \sim x\}$. V njem so torej vsi elementi u iz A, ki so ekvivalentni (to je, v relaciji ekvivalence) z elementom x. Naj bo $[y] = \{v \in A;\ v \sim y\}$ ekvivalenčni razred kakega drugega elementa $y \in A$. Tedaj velja bodisi $[x] \cap [y] = \emptyset$ bodisi $[x] = [y]$. Res! Če je $z \in [x] \cap [y]$, se pravi $z \in [x]$ in $z \in [y]$, velja $z \sim x$ in $z \sim y$ in zato po tranzitivnosti tudi $x \sim y$. To pomeni, da je vsak u iz $[x]$ tudi v $[y]$, saj je $u \sim x$ in $x \sim y$, torej $u \sim y$. Ker lahko na enak način sklepamo, da je tudi vsak v iz $[y]$ v $[x]$, sta oba ekvivalenčna razreda enaka. Očitno pa je vsak element $x \in A$ v nekem ekvivalenčnem razredu (namreč v svojem $[x]$), torej gre res za razdelitev množice A na disjunktne podmnožice. Množico vseh ekvivalenčnih razredov elementov množice A glede na dano relacijo ekvivalence $\sim$ imenujemo *faktorska množica* in označimo z $A/\sim$.

ZGLED. V množico $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ vpeljimo naslednjo relacijo: naj velja $x \sim y$, če je razlika $x - y$ deljiva s 3. Brez težav se lahko prepričamo, da je ta relacija refleksivna, simetrična in tranzitivna. Torej je $\sim$ v množici A ekvivalenčna relacija. V istem ekvivalenčnem razredu so tista števila, ki dajo pri deljenju s 3 isti ostanek. Ekvivalenčni razredi, ki sestavljajo faktorsko množico, so torej $\{1, 4\}$, $\{2, 5\}$ in $\{3\}$.

Funkcije

Funkcija ali *preslikava* med dvema množicama A in B je predpis f, ki vsakemu elementu x množice A priredi natanko določen element y množice B. Važno je, da je predpis nedvoumen, se pravi, da je z njim element y, ki pripada elementu x, natanko določen. Rečemo, da f preslika x v y. V tem primeru je x original, y pa njegova slika pri preslikavi f. Včasih tudi rečemo, da je y vrednost funkcije f pri argumentu x. To dejstvo zapišemo na različne načine, npr. $f : x \mapsto y$ ali $y = f(x)$. Torej gre za posebno relacijo med elementi x in y v množici $A \cup B$. Včasih rečemo, da je funkcija *enolična* relacija, saj se ne more zgoditi, da bi pri nekem originalu x veljalo $y_1 = f(x)$ in $y_2 = f(x)$ za različna y_1 in y_2. Graf te relacije imenujemo *graf funkcije* f in je podmnožica v $A \times B$, namreč $G_f = \{(x, y) \in A \times B; y = f(x)\} = \{(x, f(x));\ x \in A\}$. Kadar sta A in B množici realnih števil, je to običajni graf funkcije, kot ga poznamo iz srednje šole. V ravnini, opremljeni s kartezičnim koordinatnim sistemom, si ga lahko narišemo kot krivuljo.

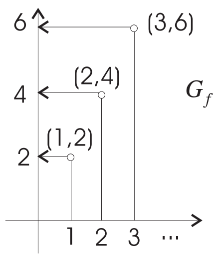
Kadar deluje med množicama A in B preslikava f, zapišemo to v krajši obliki $f :\ A \to B$. Vsi originali pri preslikavi f sestavljajo množico A; pravimo, da je množica A *domena* ali *definicijsko območje* funkcije f. Vse slike pa sestavljajo neko podmnožico v množici B, *kodomeni* funkcije f. Množico vseh slik pogosto označimo z Z_f, torej $Z_f = \{f(x); x \in A\}$ in imenujemo *zaloga vrednosti* funkcije f. V splošnem je to prava podmnožica v B, zgodi pa se tudi, da je enaka vsej množici B, torej $Z_f = B$. Tedaj rečemo, da je preslikava f *surjektivna* oziroma, da je f *surjekcija* in da f preslika množico A *na* množico B.

ZGLED. Preslikava $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definirana s predpisom $f(n) = 2n$, ima za zalogo vrednosti podmnožico vseh sodih naravnih števil $S = \{2n; n \in \mathbb{N}\}$ in ni surjektivna. Tudi preslikava $g(x) = x^2$ iz $\mathbb{R}$ v $\mathbb{R}$ ni surjektivna. Njena zaloga vrednosti je enaka množici vseh nenegativnih realnih števil $\mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\}$.

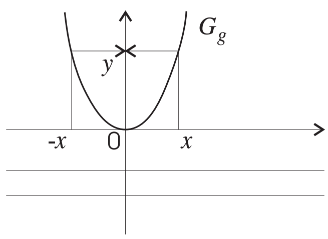
Vsak original iz domene A ima seveda samo eno sliko v $Z_f \subset B$. Lahko pa se primeri, da imata dva ali še več različnih originalov skupno sliko. (Lahko se npr. vsi elementi iz A preslikajo v isti element v B, preslikava je torej lahko konstantna.) Če to *ni* res, če imata torej različna originala vedno različni sliki, se pravi, če iz $x_1 \neq x_2$ sledi $f(x_1) \neq f(x_2)$, potem rečemo, da je preslikava f *injektivna* oziroma, da je f *injekcija*.

ZGLED. Identična preslikava na množici A je funkcija, označimo jo z id_A, ki vsakemu elementu $x \in A$ priredi spet element $x \in A$. Taka preslikava je seveda injektivna (in surjektivna). Prav tako je injektivna preslikava f iz prejšnjega zgleda ($f(n) = 2n$). Ni pa injektivna druga preslikava g, saj je $g(-x) = (-x)^2 = x^2 = g(x)$ za vsak $x \in \mathbb{R}$ in $-x \neq x$ za $x \neq 0$.

Iz grafa lahko enostavno razberemo, kdaj je funkcija f surjektivna oziroma injektivna. Za realne funkcije realne spremenljivke, katerih graf lahko narišemo v ravnini, je to še posebej preprosto in nazorno. Funkcija f je surjektivna, če vsaka vodoravna premica skozi točko kodomene (na ordinatni osi) vsaj enkrat preseka graf (originali so abscise teh presečišč). Funkcija f je injektivna, če vsaka vodoravna premica preseka graf kvečjemu enkrat. Funkcija f na sliki 2a je npr. injektivna, ni pa surjektivna. Funkcija g na sliki 2b pa ni ne eno ne drugo.



Slika 2a



Slika 2b

Funkcija, ki je hkrati injektivna in surjektivna, se imenuje *bijekcija* ali *bijektivna preslikava*. Zanjo je značilno, da vsakemu elementu domene A pripada natanko določen element kodomene B (tako kot pri vsaki preslikavi) ter da je tudi vsak element kodomene B slika natanko enega elementa iz domene A. Zato lahko za vsako bijekcijo f definiramo novo preslikavo, ki vsakemu elementu y kodomene B priredi tisti natanko določeni original x iz domene A, ki se z f preslika v y. Tej novi preslikavi rečemo *inverzna funkcija* (k funkciji f) in jo označimo z f^{-1}. Zanjo očitno velja $y = f(x)$ natanko takrat, ko je $x = f^{-1}(y)$.

ZGLED. Preslikava f, ki elemente množice $A = \{1, 2, 3\}$ preslika v elemente množice $B = \{a, b, c\}$ (v istem - naravnem vrstnem redu), je seveda bijekcija. Bijekcija je npr. tudi preslikava g, ki preslika 1 v b, 2 v a in 3 v c. Funkcija, določena z $1 \mapsto a,\ 2 \mapsto b$ in $3 \mapsto b$, pa ni niti injektivna niti surjektivna. K f inverzna preslikava f^{-1} preslika a v 1, b v 2 in c v 3, medtem ko g^{-1} preslika a v 2, b v 1 in c v 3.

Funkcija je povsem določena, če poznamo njeno domeno in če vemo, kam se posamezen element preslika. To pomeni, da sta funkciji f in g enaki, če delujeta na isti domeni A in velja $f(x) = g(x)$ za vsak $x \in A$. Funkciji f in g iz prejšnjega zgleda npr. nista enaki.

Funkcije lahko včasih sestavljamo: iz dveh ali več napravimo nove, sestavljene funkcije ali kompozite. Če je npr. $f : A \to B$ in $g : B \to C$, obstaja *kompozitum* $g \circ f : A \to C$, definiran s predpisom $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ za vsak $x \in A$.

ZGLED. Naj bo npr. f preslikava iz množice $\{1, 2, 3, 4\}$ v množico $\{1, 2, 3, 4\}$, definirana s predpisom $1 \mapsto 3,\ 2 \mapsto 1,\ 3 \mapsto 1,\ 4 \mapsto 2$ ter g preslikava med istima množicama, določena z $1 \mapsto 4,\ 2 \mapsto 2,\ 3 \mapsto 1,\ 4 \mapsto 4$. Tedaj za $g \circ f$ velja $1 \mapsto 1,\ 2 \mapsto 4,\ 3 \mapsto 4,\ 4 \mapsto 2$, za $f \circ g$ pa $1 \mapsto 2,\ 2 \mapsto 2,\ 3 \mapsto 3,\ 4 \mapsto 2$. Od tod tudi vidimo, da sta kompozituma $f \circ g$ in $g \circ f$ lahko različna, četudi oba obstajata.

Kompozitum dveh bijektivnih preslikav je spet bijektivna preslikava, o čemer se zlahka prepričamo. Če je f bijekcija in f^{-1} njej inverzna preslikava, je $f^{-1} \circ f = id_A$ in $f \circ f^{-1} = id_B$. Tu smo z id_a in id_B označili posebno preprosti preslikavi iz A na A oziroma iz B na B: id_A je identična preslikava na množici A, ki pusti vsak element iz A pri miru, se pravi, $id_A(x) = x$; podobno je id_B identična preslikava na množici B.

Moč množic

Množice imajo lahko različno, končno ali neskončno, število elementov; pravimo, da imajo različno *moč*. Ta pojem v resnici uvedemo preko ekvivalenčne relacije.

DEFINICIJA. Rečemo, da ima množica A *isto moč* kot množica B, če obstaja vsaj ena bijekcija iz množice A na množico B.

To je neka relacija med množicami, na kratko jo označimo kar z $\sim$. Ker iz A na A vedno obstaja bijekcija (identična preslikava, ki ohranja elemente), je relacija $\sim$ refleksivna. Ker se da pokazati, da je hkrati z f tudi f^{-1} bijekcija (iz B na A) in da je kompozitum dveh bijekcij tudi bijekcija, je relacija $\sim$ tudi simetrična in tranzitivna. Torej je $\sim$ ekvivalenčna relacija. Povezuje množice z isto močjo.

DEFINICIJA. Množica A ima *manjšo moč* kot množica B, če ima isto moč kot neka prava podmnožica $B_1 \subset B$, ne pa kot množica B. V tem primeru tudi rečemo, da ima množica B *večjo moč* kot množica A.

Množica z enim elementom ima npr. manjšo moč kot množica z dvema (ali več) elementoma. Kot bomo videli tudi vse neskončne množice niso po moči med seboj enake.

DEFINICIJA. Množica je *končna*, če je prazna ali pa ima isto moč kot množica prvih n naravnih števil $\{1, 2, 3, ..., n\}$ pri nekem $n \in \mathbb{N}$. V nasprotnem primeru je množica *neskončna*.

Rečemo, da ima prazna množica (z 0 elementi) moč 0, množica z enim elementom $\{a\}$ moč 1, množica z dvema elementoma $\{a, b\}$ moč 2 itd. Končni množici imata očitno isto moč natanko takrat, ko imata enako število elementov.

Množica vseh naravnih števil $\mathbb{N}$ ni končna. Če bi namreč poskušali poiskati bijekcijo iz $\mathbb{N}$ na katerokoli končno množico oblike $\{1, 2, 3, ..., n\}$, bi bili vsaj po n korakih prisiljeni prirediti naslednjemu naravnemu številu eno od že izbranih slik od 1 do n. Bijekcije torej ne moremo najti, množica $\mathbb{N}$ je neskončna in ima večjo moč od vsake končne množice. Lahko pa najdemo bijekcijo množice naravnih števil $\mathbb{N}$ na kakšno njeno pravo (neskončno) podmnožico. Preprost zgled je preslikava f, ki vsakemu naravnemu številu n priredi njegovega naslednika $n' = n + 1$. Ta preslikava je bijekcija iz $\mathbb{N}$ na pravo podmnožico $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ brez števila 1.

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & ... \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & ... \\ & & 2 & & 3 & & 4 & & ... \end{array}$$

Drug zgled pa je že znana preslikava $f(n) = 2n$, ki vsakemu naravnemu številu priredi njegov dvakratnik, in je bijekcija iz $\mathbb{N}$ na pravo podmnožico vseh sodih naravnih števil S (slika 2a).

Ker ima vsaka neskončna množica A neskončno mnogo različnih elementov, lahko v njej vedno poiščemo podmnožico $B = \{x_1, x_2, x_3, ...\}$, ki ima isto moč kot množica vseh naravnih števil $\mathbb{N}$ (ustrezno bijekcijo določajo indeksi: $i \mapsto x_i$). Naj bo $C = A \setminus B$. Potem je $A = B \cup C$ in $B \cap C = \emptyset$ in lahko definiramo preslikavo $f : A \to A \setminus \{x_1\}$ s predpisom: za vsak $x_i \in B$ naj bo $f(x_i) = x_{i+1}$, za vsak $x \in C$ pa $f(x) = x$. Ni se težko prepričati, da je f bijekcija iz A na pravo podmnožico $A \setminus \{x_1\}$. Ugotovili smo torej, da ima vsaka neskončna množica isto moč kot neka njena prava podmnožica. To je ena od možnih definicij neskončnosti (uporabil jo je nemški matematik Dedekind).

Množica naravnih števil $\mathbb{N}$ je torej najpreprostejša, najmanjša neskončna množica. Določajo jo naslednje lastnosti, ki nosijo ime po italijanskem matematiku G. Peanu.

Peanovi aksiomi:

1. 1 je naravno število.
2. Vsakemu naravnemu številu pripada natanko določen *naslednik*.
3. Število 1 ni naslednik nobenega naravnega števila.
4. Različni naravni števili imata različna naslednika.
5. Če neka podmnožica naravnih števil vsebuje 1 in z vsakim številom tudi njegovega naslednika, je enaka množici vseh naravnih števil.

Označimo naslednika naravnega števila n z n'. Tedaj točka 2 pove, da je predpis $n \mapsto n'$ funkcija iz $\mathbb{N}$ v $\mathbb{N}$, točka 3, da ta funkcija ni surjektivna (1 ni v zalogi vrednosti), točka 4 pa, da je injektivna. Točka 5 je znameniti *aksiom o matematični indukciji*. Z njim dokazujemo razne trditve v zvezi z naravnimi števili. Če neka lastnost L velja za naravno število 1, torej $L(1)$, in če velja za naslednika, kakor hitro velja za samo število, torej $L(n) \Longrightarrow L(n')$, velja lastnost L za vsa naravna števila.

OPOMBA. Ker je vsota naravnih števil definirana tako, da je $n + 1 = n'$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, običajno označimo naslednika naravnega števila n kar z $n + 1$. Pri dokazovanju z matematično indukcijo se moramo torej prepričati, da velja $L(n + 1)$, če velja $L(n)$.

ZGLED (a) Z matematično indukcijo dokažimo, da za vsako naravno število velja formula:

$$1 + 2 + ... + n = n(n + 1)/2.$$

Če je na levi strani en sam člen, je ta enak 1, na desni pa tedaj dobimo $1(1 + 1)/2 = 1$. Denimo, da formula velja za n. Potem je $1 + 2 + ... + n + (n + 1) = n(n + 1)/2 + (n + 1) = (n + 1)(n + 2)/2$, kar je ista formula kot prej, le uporabljena za naslednik $n + 1$.

(b) Z matematično indukcijo dokažimo binomski obrazec:

$$(1 + x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + ... + \binom{n}{n}x^n.$$

Tu je $\binom{n}{k} = n!/k!(n - k)!$ t.i. *binomski simbol*, ki ima znane lastnosti, npr.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \text{in} \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Zadnja lastnost omogoča konstrukcijo naslednjih binomskih simbolov z uporabo ti. *Pascalovega trikotnika*:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ ... & & ... & & ... & & ... & & ... & & ... \end{array}$$

Obrazec velja za $n = 1$, saj je $(1+x)^1 = \binom{1}{0} + \binom{1}{1}x$. Če pa velja za n, imamo

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) = (\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + ... + \binom{n}{n}x^n)(1+x) =$$

$$\binom{n}{0} + (\binom{n}{0} + \binom{n}{1})x + (\binom{n}{1} + \binom{n}{2})x^2 + ... + (\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n})x^n + \binom{n}{n}x^{n+1} =$$

$$\binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1}x + \binom{n+1}{2}x^2 + ... + \binom{n+1}{n}x^n + \binom{n+1}{n+1}x^{n+1}.$$

Neskončno množico, ki ima isto moč kot množica vseh naravnih števil $\mathbb{N}$ imenujemo *števno neskončna množica.* Zmotno pa je misliti, da to velja za vsako neskončno množico. Nimajo vse neskončne množice enake moči, se pravi, da med njimi ne moremo vedno poiskati bijekcije. Tak primer bomo spoznali na koncu naslednjega razdelka, ko bomo ugotovili, da ima množica vseh realnih števil $\mathbb{R}$ večjo moč kot množica vseh naravnih števil $\mathbb{N}$.

2. Kombinatorika in verjetnost

Elemente končne množice lahko preštejemo. Del matematike, ki se ukvarja s preštevanjem objektov določene vrste, pa je *kombinatorika.* Njene osnove poznamo že iz srednje šole.

Osnovno pravilo kombinatorike pravi: *Če lahko nekaj storimo na m načinov, nekaj drugega pa (neodvisno od prejšnjega) na n načinov, potem lahko oboje skupaj storimo na $m \cdot n$ načinov.*

To pravilo s pridom uporabljamo pri obravi osnovnih kombinatoričnih pojmov, kot so variacije, permutacije in kombinacije (s ponavljanjem ali brez njega).

ZGLED. Število vseh mogočih preslikav določene vrste med dvema končnima množicama lahko izrazimo z osnovnimi kombinatoričnimi pojmi. je npr.:
(a) vseh preslikav iz množice z m elementi v množico z n elementi toliko, kot vseh *variacij s ponavljanjem reda m iz n elementov* (ponavljanje n elementov na m mestih), torej n^m;
(b) vseh injekcij iz množice z m elementi v množico z n elementi 0, če je $m > n$, in toliko kot vseh *variacij brez ponavljanja reda m iz n elementov*, če je $m \leq n$, torej $n!/(n-m)!$;
(c) vseh bijekcij iz množice z m elementi v množico z n elementi 0, če je $m \neq n$, in toliko kot vseh *permutacij n elementov*, če je $m = n$, torej $n!$;
(d) vseh surjekcij s predpisanim številom originalov za vsak element kodomene iz množice z m elementi v množico z n elementi 0, če je $m < n$, in toliko kot vseh *permutacij s ponavljanjem n elementov na m mestih*, če je $m \geq n$, torej $m!/k_1!k_2!...k_n!$, kjer je $k_1+k_2+...+k_n = m$;
(e) vseh injekcij z različnimi zalogami vrednosti iz množice z m v množico z n elementi ($m \leq n$) toliko kot vseh *kombinacij brez ponavljanja n elementov na m mestih*, torej $\binom{n}{m}$;
(f) vseh naraščajočih preslikav iz množice z m v množico z n elementi toliko kot vseh *kombinacij s ponavljanjem n elementov na m mestih*, torej $\binom{n+m-1}{m}$.

Uporabljali smo binomski simbol $\binom{n}{k} = n!/k!(n-k)!$, ki smo ga spoznali v zvezi z binomskim obrazcem

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + ... + \binom{n}{n}x^n.$$

V prejšnjem razdelku smo ta obrazec dokazali z matematično indukcijo, zdaj ga dokažimo s kombinatoričnim premislekom. Koeficient pri potenci x^k pove, na koliko načinov lahko v k izmed n oklepajih izberemo x, v preostalih pa 1. Teh načinov je torej toliko, kolikor je kombinacij brez ponavljanja n elementov na k mestih, torej $\binom{n}{k}$.

Osnove diskretne verjetnosti

Idejo moči končnih množic izkoristimo za klasično definicijo verjetnosti. Dogodku A priredimo realno število, njegov *verjetnost* z naslednjim predpisom:

Definicija 1 (Klasična definicija verjetnosti):

$$P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{\text{število ugodnih izidov za} A}{\text{število vseh izidov}}$$

Tu morajo imeti vsi izidi enako možnost. Verjetnost na ta način predstavlja neko mero gotovosti, s katero se dogodek A zgodi.

ZGLED 1. Pri metu poštene kocke, naj bo A dogodek, da pade 6 pik, in B dogodek, da pade sodo število pik, torej $A = \{6\}$ in $B = \{2, 4, 6\}$. Vidimo, da je dogodek A sestavljen iz enega samega izida, dogodek B pa iz treh izidov. Potem je $P(A) = 1/6$ in $P(B) = 3/6 = 1/2$.

Dogodek je vedno množica (izidov, ki so zanj ugodni). Prazni množici izidov ustreza *nemogoči* dogodek N, množici vseh izidov pa *gotov* dogodek G. Če je $A \subset B$ (podmnožica izidov), rečemo, da je dogodek A *način* dogodka B. Vedno ko se zgodi A, se namreč zgodi tudi B, v zgornjem zgledu je npr. A (da pade 6) $\subset B$ (da pade sodo število pik). Unijo $A \cup B$ imenujemo *vsota* dogodkov A in B (zgodi se vsaj eden od njiju), presek $A \cap B$ pa *produkt* dogodkov A in B (zgodita se oba dogodka hkrati). Komplementarni množici $A^c = G \setminus A$ rečemo *nasprotni dogodek*.

ZGLED 2. V situaciji iz zgleda 1, je npr. $A \cup B = B$ in $A \cap B = A$. Poleg tega je $A^c = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ in $B^c = \{1, 3, 5\} = \{\text{liho število pik}\}$.

Na verjetnost lahko gledamo tudi kot na preslikavo $P : \mathcal{P}G \to \mathbb{R}$, ki vsakemu dogodku A (tj. vsaki podmnožici v G) priredi realno število $P(A)$. Ta preslikava ima za vsak $A, B \subset G$ naslednje lastnosti (ki hitro sledijo npr. iz klasične definicije):
1. $0 \leq P(A) \leq 1$,
2. $P(G) = 1$, $P(N) = 0$,
3. $P(A) \leq P(B)$, če je $A \subset B$,
4. $P(A^c) = 1 - P(A)$,
5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Če sta dogodka A in B *nezdružljiva*, tj. če velja $A \cap B = N$, iz točke 5. sledi bolj preprosta formula: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

ZGLED 3. Kolikšna je verjetnost, da je na slepo izbrano število med 1 in 100 deljivo vsaj z enim od števil 3 in 5? Odgovor: $P(A) = 0.33$, $P(B) = 0.20$, $P(A \cap B) = 0.06$ in zato $P(A \cup B) = 0.33 + 0.20 - 0.06 = 0.47$.

Definicija 2. *Pogojno verjetnost* dogodka A glede na dogodek B z lastnostjo $P(B) > 0$ definiramo s predpisom:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

ZGLEDI. 1. Pri metu kocke je npr. $P(\{6\}|\{\text{sodo}\}) = P(\{6\})/P(\{\text{sodo}\}) = (1/6)/(1/2) = 1/3$. Rezultat je logičen, saj je $\{6\}$ le ena možnost izmed treh možnosti, ko pade sodo število pik.

2. V posodi naj bosta dve beli (b_1, b_2) in ena črna $\check{c}$ krogla. Dvakrat zapored na slepo izvlecimo kroglo brez vračanja. Kolikšna je verjetnost, da tudi drugič izberemo belo kroglo (dogodek A), če je bila prva izbrana krogla bela (dogodek B)? Zdaj lahko računamo takole. Vseh možnih izidov je šest: b_1b_2, $b_1\check{c}$, b_2b_1, $b_2\check{c}$, $\check{c}b_1$ in $\check{c}b_2$. Za dogodek B so ugodni prvi štirje: b_1b_2, $b_1\check{c}$, b_2b_1, $b_2\check{c}$, za dogodek $A \cap B$ pa le prvi in tretji: b_1b_2, b_2b_1. Torej je $P(A|B) = (2/6)/(4/6) = 1/2$. To lahko spoznamo tudi zato, ker sta za $A \cap B$ ugodna le dva izida izmed štirih, ugodnih za B.

3. Neki mladenič pride k vam in zahteva od vas denar, sicer bo poklical svojega brata. Kolikšna je verjetnost, da ima res brata (in ne sestre), če veste, da izhaja iz družine z dvema otrokoma? Splošno so v družini z dvema otrokoma tri možnosti: otroka sta oba brata bb, obe sestri ss ter brat in sestra bs. Toda te možnosti niso med seboj enakovredne. Pri bs moramo ločiti primera (brat je starejši) in (sestra je starejša), oba z enako verjetnostjo $1/4$, skupaj ima torej kombinacija brat-sestra verjetnost $1/2$, preostali kombinaciji bb in ss pa le vsaka po $1/4$. Ker nas je obiskal mladenič, možnost ss v tem primeru odpade, zato je verjetnost, da ima mladenič, ki nam je grozil, brata, enaka pogojni verjetnosti $P(bb/\text{obiskal nas je fant iz družine z dvema otrokoma}) = P(bb)/(P(bb \cup bs) = (1/4)/(1/4 + 1/2) = 1/3$.

Če formulo za pogojno verjetnost obrnemo, dobimo *formulo za verjetnost produkta*:

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B) \quad \textit{ali} \quad P(A \cap B) = P(A)P(B|A).$$

Pri t.i. *dvofaznih poskusih* se v prvi fazi npr. lahko zgodi dogodek B ali pa njegov nasprotni dogodek B^c (se pravi, da se B ne zgodi). V drugi fazi pa se lahko zgodi dogodek A (ali pa tudi ne). Verjetnost dogodka A lahko pred začetkom celotnega poskusa (tj. še pred izvedbo prve faze) izračunamo takole:

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(B^c)P(A|B^c).$$

Dogodka $A \cap B$ in $A \cap B^c$ sta namreč nezdružljiva, njuna vsota pa je ravno dogodek $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$. Torej je $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$, od koder dobimo rezultat z dvakratno uporabo formule za verjetnost produkta. Zgornjo formulo imenujemo *formula za polno verjetnost.*

ZGLED 4. Pri srečolovu naj bo med n srečkami m $(m < n)$ polnih. Ali je pred začetkom izbiranja po ene srečke verjetnost zadetka, če izbiramo prvi, večja od verjetnosti zadetka, če izbiramo drugi?. Odgovor: verjetnost je v obeh primerih enaka. Če izbiramo prvi je verjetnost zadetka m/n. Če pa izbiramo drugi (v prvi fazi je pred nami nekdo že potegnil srečko), je verjetnost po formuli za polno verjetnost enaka $m/n \cdot (m-1)/(n-1) + (n-m)/n \cdot m/(n-1) = m(n-1)/n(n-1) = m/n$, torej ista.

Obratna (Bayesova formula) igra v znanosti, pri ocenjevanju verjetnosti ob dodatni informaciji, ki jo je prinesel poskus, pomembno vlogo. Gre za to, da bi radi po zaključenem poskusu v dveh fazah, ko že vemo, da se je v drugi fazi zgodil dogodek A, ob tej dodatni informaciji ponovno izračunali verjetnost, da se je v prvi fazi zgodil dogodek A.

Obratna formula:

$$P(B|A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B) + P(B^c)P(A|B^c)}$$

ZGLED 5. Dva stroja izdelujeta isti izdelek serijsko. Stroj B izdela 40% proizvodnje, ostale pa drugi stroj. Verjetnost napake je pri izdelavi na stroju B 10%, na drugem stroju pa 20%. Na slepo izberemo izdelek iz dnevne proizvodnje. Kolikšna je verjetnost, da je izdelek defekten (dogodek A)? Kolikšna je verjetnost, da je defekten izdelek izdelal stroj B? Odgovor: Verjetnost defektnega izdelka izračunamo po formuli za polno verjetnost, torej $P(A) = P(B)P(A|B) + P(B^c)P(A|B^c) = 0.4 \cdot 0.1 + 0.6 \cdot 0.2 = 0.16$. Druga verjetnost je pogojna (uporabimo Bayesovo formulo): $P(B|A) = (0.4 \cdot 0.1)/0.16 = 1/4 = 0.25$.

Krvni testi

Pri ugotavljanju prisotnosti virusne ali bakterijske okužbe uporabljajo različne krvne teste, ki testirajo kri glede prisotnosti protitelesc. Test je dober, če z veliko verjetnostjo pokaže na prisotno bolezen. Naj bo B dogodek, da je bolezen (okužba) prisotna, in A dogodek, da je test pozitiven (pokaže na prisotnost bolezni). Zanima nas torej pogojna verjetnost $P(A|B)$. Običajno je to zelo visoka vrednost, npr. 0.95, kar pomeni, da je test ob prisotnosti okužbe pozitiven s 95% verjetnostjo. To število imenujemo *občutljivost testa.*

Pri vsakem testiranju lahko pride do napake. V načelu sta možni dve vrsti napak:
1. *Napaka prve vrste* nastopi, če je test negativen, čeprav je bolezen prisotna. Verjetnost za to napako je (po formuli za verjetnost nasprotnega dogodka $P(A^c|B) = 1 - P(A|B) \approx 1 - 0.95 = 0.05$.
2. *Napaka druge vrste* nastopi, če je test pozitiven, čeprav bolezni ni. Verjetnost za to napako $P(A|B^c)$ je težje oceniti, med zanesljivo znano populacijo bi morali oceniti verjetnost pozitivnega testa. Običajno je tudi to zelo majhna vrednost, npr. spet približno 0.05.

Problem, ki se realno vedno postavlja pred zdravnika, ki izvaja test, pa je ocena pogojne verjetnosti $P(B|A)$, da ima pacient res bolezen, če je bil test pozitiven. Test namreč ni 100%. To verjetnost ocenimo po Bayesovi obratni formuli:

$$P(B|A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B) + P(B^c)P(A|B^c)}.$$

Očitno moramo, poleg pogojnih verjetnosti na desni strani te formule, ki smo jih že ocenili, poznati tudi brezpogojno verjetnost $P(B)$, da je bolezen prisotna (verjetnost nasprotnega dogodka $P(B^c)$, da bolezni ni, potem takoj izračunamo). Ocena za $P(B)$ je zelo zahtevna, videli pa bomo, da je od nje močno odvisna željena ocena $P(B|A)$.

Pri redkih boleznih (v normalni populaciji), kot je npr. okužba z virusom HIV, ki povzroča AIDS, je verjetnost bolezni zelo majhna, statistično npr. pod 0.006 (po podatkih WHO iz leta 1988). Drugo je npr. testiranje rizičnih skupin ali populacije v nekaterih afriških predelih. Za naše namene vzemimo npr., da je $P(B) \approx 0.003$. Potem dobimo po Bayesu

$$P(B|A) \approx \frac{0.003 \cdot 0.95}{0.003 \cdot 0.95 + 0.997 \cdot 0.05} \approx 0.054.$$

Ta rezultat je po svoje presenetljiv: v skoraj 95% primerov bolezen ni prisotna, čeprav je test bil pozitiven.

Kaj pa, če bi bolezen ne bila tako redka, ampak bi npr. vzeli $P(B) \approx 0.1$? Po isti formuli bi sedaj izračunali $P(B|A) \approx 0.68$. Pogojna verjetnost, da je bolezen prisotna, če je bil test pozitiven, je zdaj močno narasla, s prejšnjih 5% na več kot 2/3.

Matematična razlaga je preprosta. Pogojna verjetnost $P(A|B)$ je racionalna funkcija spremenljivke $x = P(B)$ na desni strani Bayesove formule, torej (pri nespremenjenih ostalih podatkih v našem primeru)

$$P(B|A) = \frac{0.95x}{0.95x + 0.5(1-x)} = \frac{0.95x}{0.90x + 0.05} = \frac{95x}{90x+5} = \frac{19x}{18x+1}.$$

Če bi jo narisali, bi videli, da je njen graf v okolici točke 0 zelo strm (odvod v 0 je enak 19), zato hitro narašča oziroma je zelo občutljiva že na malenkostno povečanje vrednosti za x.

Vse to samo pomeni, da se pri redkih boleznih ne splača izvajati množičnih (preventivnih) testov, saj ni zanesljiv (kljub pozitivnosti je veliko več možnosti, da bolezni ni). Prihranjeni čas in denar je bolje uporabiti za testiranje rizičnih skupin, kjer je pomoč bolj potrebna.

Oglejmo si še eno, včasih precej pogosto nepravilno uporabo obratne formule pri ugotavljanju očetovstva.

ZGLED. Neki moški je bil osumljen očetovstva otroka. Pri moškem so ugotovili zelo redko gensko lastnost (genetski znak), za katerega se ve, da se s 100% zanesljivostjo prenaša z očeta na otroka. Otroka so testirali in tudi pri njem našli genetski znak. Kolikšna je verjetnost, da je moški res oče danega otroka?

Za oceno te verjetnosti bi bilo smiselno spet uporabiti Bayesovo obratno formulo. Naj bo B dogodek, da je moški dejansko oče otroka in A dogodek, da pri otroku najdemo genetski znak. Potem je $P(A|B) = 1$, saj se znak zanesljivo prenese z očeta na otroka, in $P(A|B^c) \approx 0.01$, saj je tolikšna verjetnost spontanega posedovanja genetskega znaka v celotni populaciji. Kot običajno je problem oceniti vrednost $P(B)$, od katere je pogojna verjetnost, kot smo videli prej, močno odvisna. Toda zdaj tega ne moremo določiti statistično. Moški je namreč oče ali pa ni, poskusa ne moremo ponavljati v nedogled. Pred isto dilemo je sodnik, ki naj o primeru odloči. Zanesti se mora na svojo subjektivno oceno in na njeni podlagi določiti verjetnost. Če vzamemo vrednost $P(B) \approx 0.5$ (enake šanse, da je ali da ni oče), potem dobimo po obratni formuli:

$$P(B|A) \approx \frac{0.5 \cdot 1}{0.5 \cdot 1 + 0.5 \cdot 0.01} = \frac{500}{505} = \frac{100}{101} \approx 0.99,$$

torej kar 99% verjetnost, da je moški oče. Izhajali smo iz ad hoc sprejete ocene o 50% verjetnosti očetovstva in naenkrat dobili 99% verjetnost očetovstva. To gotovo ni prav, saj smo iz dejansko nevednosti (zato smo se odločili za 50% možnost) dobili visoko in obtožujočo vrednost 99%. Upoštevajmo še znano dejstvo, da je pred zakonom vsak nedolžen, dokler mu ni krivda dokazana, pa zlahka spregledamo absurdnost dobljenega rezultata. Z obratno formulo ni nič narobe, napačna je (v tem primeru) njena uporaba.

Definicija 3. Kadar je $P(A|B) = P(A)$, rečemo, da je dogodek A *neodvisen od dogodka* B, oziroma da sta dogodka A in B neodvisna.

Tedaj velja v formuli za verjetnost produkta kar enakost $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Pojem neodvisnosti lahko posplošimo tudi na več dogodkov. Rekli bomo, da so dogodki $A_1, A_2, ..., A_n$ *v celoti neodvisni*, kadar je verjetnost produkta katerih koli m različnih dogodkov iz množice $\{A_1, a_2, ..., A_n\}$ enaka produktu njihovih verjetnosti.

Denimo, da je v nekem poskusu verjetnost dogodka A enaka p, kjer je $0 < p < 1$, torej $P(A) = p$. Poskus ponavljamo n-krat, pri čemer so posamezne ponovitve neodvisne. V vsaki ponovitvi se zgodi A ali A^c, v petih ponovitvah dobimo npr. zaporedje AAA^cAA^c. To je le ena od $\binom{5}{3}$ možnosti, vsaka ima zaradi neodvisnosti posameznih dogodkov verjetnost $p^3(1-p)^2$, skupaj je torej verjetnost, da se v petih ponovitvah poskusa trikrat zgodi dogodek A enaka $P_5(3) = \binom{5}{3}p^3(1-p)2 = 10p^3(1-p)^2$.

V splošnem izračunamo verjetnost, da se v n ponovitvah poskusa dogodek z verjetnostjo p zgodi natanko k-krat, po *Bernoullijevi formuli*:

$$P_n(k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

Tu je lahko $k = 0, 1, 2, ..., n$.

ZGLED. V rezervatu živi a levinj in b levov. Verjetnost, da pri obhodu vidimo posamezno levinjo je torej $p = a/(a+b)$, leva pa $1-p = b/(a+b)$. Verjetnost, da pri n opažanjih posamezne mačke vidimo k levinj (lahko istih) je po Bernoullijevi formuli $P_n(k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \binom{n}{k}a^k b^{n-k}/(a+b)^n$. Če je npr. $a = 3$ in $b = 2$, je $p = 3/5$ in $1-p = 2/5$. Pri petih opažanjih je verjetnost, da vidimo 3 levinje, enaka $P_5(3) = 10 \cdot 3^3 \cdot 2^2/5^5 = 34,5\%$.

V zgornjem zgledu se je popolnoma isti dogodek lahko večkrat ponovil, npr. večkrat smo lahko opazili *isto* levinjo. To je tako, kot če bi iz posode z belimi in črnimi kroglicami večkrat zapored na slepo potegnili kroglico in jo potem spet vedno vrnili v posodo. Pri tem beležimo, kolikokrat v n poskusih, potegnemo belo kroglico. Rečemo, da gre za *izbiranje z vračanjem.* Kadar pa imamo *izbiranje brez vračanja*, kroglic vmes ne vračamo. Kolikokšna je verjetnost, da v n ponovitvah k-krat potegnemo belo, če je v posodi z N kroglicami K belih in $N-K$ črnih? To moramo izračunati drugače, tako kot da bi n kroglic potegnili naenkrat in med njimi našli k belih. Zdaj velja formula

$$P_n(k) = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

ZGLED. Denimo, da v rezervatu zagledamo skupino 3 velikih mačk. Kolikšna je verjetnost, da sta med njimi 2 levinji (in 1 lev)? Zdaj imamo $P_3(2) = \binom{3}{2}\binom{2}{1}/\binom{5}{3} = 3 \cdot 2/10 = 3/5$.

Da se pokazati, da pri je velikem N, K in $N-K$ zadnja formula (pri izbiranju brez vračanja) približno enaka prejšnji (pri izbiranju z vračanjem), kjer pa vzamemo $p = K/N$.

Formulo za izračun verjetnosti pri izbiranju brez vračanja izkoristimo za oceno števila rib v velikem ribniku.

ZGLED. V ribniku je neznano število rib. Njihovo število N ocenimo na naslednji način. Najprej ulovimo K rib, jih označimo in spustimo nazaj v ribnik. Čez nekaj časa, ko se ribe dobro premešajo, ponovno ujamemo nekaj rib, recimo n, in med njimi najdemo k označenih. Izračunamo verjetnost, da se to zgodi po formuli za $P_n^N(k)$ (z vračanjem), in poiščemo tak N, da je verjetnost $P_n^N(k)$ največja. To je hkrati najbolj verjetno število rib v ribniku.

Kako pa poiščemo $\max P_n^N(k)$? Tako, da med seboj primerjamo $P_n^N(k)$ in $P_n^{N+1}(k)$. Po kratkem računu dobimo

$$P_n^{N+1}(k)/P_n^N(k) = \frac{\binom{N+1-K}{n-k}\binom{N}{n}}{\binom{N+1}{n}\binom{N-K}{n-k}}$$

$$= \frac{(N+1-K)(N+1-n)}{(N+1-K-n+k)(N+1)},$$

kar je > 1 natanko takrat, ko je $nK > (N+1)k$. Najverjetnejše število je torej $N \sim nK/k$. To je ocena za število rib v ribniku.

3. Algebrajske strukture

Notranja operacija

Z naravnimi števili ne le štejemo objekte, ampak tudi računamo: seštevamo, množimo, včasih tudi odštevamo in delimo. V poljubni množici lahko definiramo pojem operacije.

DEFINICIJA. *Dvočlenska* (*binarna*) *notranja operacija* v množici A je preslikava f iz kartezičnega produkta $A \times A$ v A.

Notranja operacija torej poljubnemu paru $(a, b) \in A \times A$ priredi (natanko določen) nov element $f(a, b) \in A$.

ZGLED. (a) Primer notranje dvočlenske operacije, ki jo že poznamo, je presek dveh množic. Paru množic (A, B) priredimo njun presek $A \cap B$. Podobna operacija je unija dveh množic.

(b) Prav tako je notranja dvočlenska operacija komponiranje funkcij iz A v A. Paru funkcij (f, g) priredimo njun kompozitum $f \circ g$, ki je spet funkcija iz A v A.

(c) Notranja dvočlenska operacija v množici naravnih števil je seštevanje (vsota) ali množenje (produkt). Paru naravnih števil (a, b) priredimo njuno vsoto $a + b$ ali njun produkt ab.

Pač pa npr. razlika ni notranja operacija v $\mathbb{N}$. Če namreč odštejemo večje število od manjšega, rezultat ni več naravno število. Enako se nam lahko zgodi, če skušamo deliti poljubni naravni števili med seboj, npr. $1 : 2$. Tudi deljenje ni notranja operacija. Če želimo izvajati tudi ti dve operaciji, moramo množico naravnih števil razširiti. Tako pridemo z odštevanjem naravnih števil do množice *celih števil* $\mathbb{Z}$ in z deljenjem naravnih števil do množice *racionalnih števil* $\mathbb{Q}$. Pri tem velja $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. V množici celih števil so neomejeno izvedljive operacije seštevanja, odštevanja in množenja, v množici racionalnih števil pa poleg tega tudi operacija deljenja (razen s številom 0).

OPOMBA. Racionalna števila so pravzaprav ekvivalenčni razredi ulomkov a/b, $b \neq 0$, med katerimi definiramo ekvivalenčno relacijo enakosti: $a/b = c/d \iff ad = bc$ (prepričajte se sami, da je to res ekvivalenčna relacija). Prav tako definiramo seštevanje ulomkov: $a/b + c/d = (ad + bc)/bd$, množenje ulomkov: $a/b \cdot c/d = ac/bd$ in deljenje ulomkov $a/b : c/d = ad/bc$.

Tudi v množici racionalnih števil ne moremo izvajati vsega, kar si želimo. Ne moremo npr. izračunati preprostega kvadratnega korena iz števila 2, se pravi, da korenjenje ni notranja (enočlenska) operacija. Res, $\sqrt{2}$ namreč ni več racionalno število. Če bi bilo, bi ga lahko zapisali v obliki okrajšanega ulomka: $\sqrt{2} = a/b$, kjer sta naravni števili a in b brez skupnega faktorja. Toda tedaj bi dobili $2 = a^2/b^2$ oziroma $a^2 = 2b^2$. Ker je zato a^2 deljiv z 2, mora biti že a deljiv z 2, npr. $a = 2a_1$. Tedaj pa je po krajšanju tudi $b^2 = 2a_1^2$, torej tudi b deljiv z 2, npr. $b = 2b_1$. Oboje skupaj ne gre, ker je a/b že okrajšan ulomek, zato $\sqrt{2}$ ni racionalno število. Če hočemo torej računati korene, moramo vpeljati še nova števila, ki jih imenujemo *realna*. Množica realnih števil $\mathbb{R}$ ima zanimivo algebrajsko strukturo.

Aksiomi za realna števila

V sistemu realnih števil so izvedljive vse štiri osnovne računske operacije (razen deljenja z 0) in še nekatere druge (npr. korenjenje). Glavni notranji operaciji sta *vsota* in *produkt*. Zanju veljajo naslednje osnovne lastnosti ali aksiomi:

(1) *Asociativnost vsote*: $(a + b) + c = a + (b + c)$
(2) *Komutativnost vsote*: $a + b = b + a$
(3) *Nevtralni element za vsoto (ničla)*: $a + 0 = 0 + a = a$
(4) *Nasprotni element za vsoto*: $a + (-a) = (-a) + a = 0$

Množica z operacijo $+$, za katero veljajo lastnosti (1),(3) in (4), se imenuje (aditivna) *grupa*. Če velja še (2), je *komutativna grupa*. Zgled: cela števila za seštevanje, množica bijekcij iz A na A za komponiranje ($\circ$ namesto $+$).

(5) *Asociativnost produkta*: $(ab)c = a(bc)$
(6) *Komutativnost produkta*: $ab = ba$
(7) *Nevtralni element za produkt (enota)*: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
(8) *Inverzni element za produkt*: $a^{-1}a = aa^{-1} = 1$ za $a \neq 0$

To so podobne lastnosti kot prej za vsoto, zato npr. tudi množica od 0 različnih realnih števil tvori (multiplikativno) grupo za množenje.

(9) *Distributivnost produkta glede na vsoto*: $a(b + c) = ab + ac$
(10) *Netrivialnost*: $1 \neq 0$

Za vajo izračunajmo, koliko je $a \cdot 0$. Označimo to (zaenkrat neznano) število z x. Potem iz $1 + 0 = 1$ po množenju z a in z upoštevanjem distributivnosti (9) in nevtralnosti (7) dobimo $a + x = a \cdot 1 + a \cdot 0 = a(1 + 0) = a \cdot 1 = a$. Na obeh straneh odštejmo a (tj. prištejmo $-a$), pa zaradi (1), (4) in (3) najdemo $x = 0$. Torej je $a \cdot 0 = 0$.

Zadnji aksiom se zdi morda nenavaden, vendar je potreben, saj sicer ne moremo izključiti možnosti, da sta nevtralni element za vsoto in nevtralni element za produkt enaka. Aksiom (10) zagotavlja, da se sistem realnih števil ne reducira samo na število 0. Če bi namreč veljalo $1 = 0$, bi za vsako število $a \in \mathbb{R}$ po prejšnjem lahko ugotovili $a = a \cdot 1 = a \cdot 0 = 0$.

Pravimo, da ima množica A *algebraično strukturo*, če je v A definirana vsaj ena dvočlenska notranja operacija z nekaterimi (morda ne vsemi) lastnostmi, ki smo jih našteli.

DEFINICIJA. Množica A z operacijama $+$ in $\cdot$ je
(a) *kolobar*, če veljajo lastnosti (1),(2),(3),(4),(5) in (9),
(b) *komutativen kolobar*, če velja (1),(2),(3),(4),(5),(9) in (6),
(c) *kolobar z enoto*, če velja (1),(2),(3),(4),(5),(9) in (7),
(d) *obseg*, če velja (1),(2),(3),(4),(5),(7),(8) in (9),
(e) *komutativen obseg*, če velja (1),(2),(3),(4),(5),(6),(7),(8) in (9).

V kolobarju imamo poleg seštevanja in množenja vedno tudi *odštevanje*. Razlika dveh elementov je definirana z vsoto: $a - b = a + (-b)$. V obsegu pa lahko vedno tudi *delimo* z elementom, ki je različen od 0: $a : b = ab^{-1}$.

Lahko torej rečemo, da tvorijo realna števila (netrivialen) komutativen obseg. Naravna števila ne ustrezajo nobeni od zgornjih struktur. Množica celih števil $\mathbb{Z}$ je komutativen kolobar z enoto, saj ustrezajo vsem lastnostim razen (8) (obrnljivi sta edinole števili 1 in -1). Množica racionalnih števil pa je že komutativen obseg.

OPOMBA. Našteti aksiomi ne določajo sistema realnih števil v celoti, ampak le njegovo algebrajsko strukturo (povsem enako strukturo imajo npr. vsa racionalna števila ali vsa kompleksna števila, ki jih bomo sedaj definirali. Kasneje bomo tem aksiomom dodali še nove, ki bodo realna števila natančno opredelili.

Kompleksna števila

Kompleksna števila vpeljemo tako, da v kartezični produkt $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ uvedemo dve notranji operaciji, vsoto in produkt. To storimo s predpisoma:

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d) \text{ in } (a,b)(c,d)=(ac-bd,ad+bc).$$

Hitro se lahko prepričamo, da je množica $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ za ti dve operaciji komutativen obseg, ki vsebuje $\mathbb{R}$ kot podmnožico (podobseg). Nevtralni element za vsoto je par (0,0), enota za množenje pa (1,0). Paru (a,b) nasprotni par je $(-a,-b)$, inverzni par pa $(a/(a^2+b^2),-b/(a^2+b^2))$, če je le $a^2+b^2\neq 0$ oziroma $(a,b)\neq(0,0)$. Realno število a identificiramo s parom $(a,0)$.

Pare imenujemo *kompleksna* števila. Če označimo $i=(0,1)$, je $i^2=(0,1)(0,1)=(-1,0)=-1$. Ker je $(a,b)=(a,0)+(0,1)(b,0)$, lahko poljubno kompleksno število $z=(a,b)$ zapišemo v t.i. *kanonski obliki*: $z=a+ib$. Pri tem je a *realni del*, b *imaginarni del*, i *imaginarna enota*. Vsako kompleksno število si lahko predstavimo kot točko v ravnini s koordinatama a,b.

Definiramo še *konjugirano kompleksno število* $\overline{z}=a-ib$ in *absolutno vrednost* $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$. Torej velja $z\overline{z}=a^2+b^2=|z|^2$. Točka $\overline{z}$ leži glede na točko z simetrično na abscisno os, absolutna vrednost $|z|$ pa pomeni evklidsko razdaljo točke z do koordinatnega izhodišča.

Vsoto in produkt kompleksnih števil izvedemo po definiciji. Torej za kompleksni števili $z=a+ib$ in $w=c+id$ velja:

$$z+w=(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(c+d)$$

$$zw=(a+ib)(c+id)=(ac-bd)+i(ad+bc).$$

ZGLED. $(3+2i)+(2-i)=5+i,\ (3+2i)(2-3i)=12-5i.$

Seštevamo torej po komponentah, množimo pa tako, kot množimo dvočlenike, le da pri tem upotevamo, da je $i^2=-1$. Deljenje v bistvu prevedemo na množenje kompleksnih števil $z/w=z\overline{w}/|w|^2$, če je $w\neq 0$. Potem je

$$z/w=(a+ib)(c-id)/(a^2+b^2)=[(ac+bd)+i(bc-ad)]/(a^2+b^2)=\frac{ac+bd}{a^2+b^2}+i\frac{bc-ad}{a^2+b^2}.$$

ZGLED. $\frac{3+2i}{2-i}=\frac{(3+2i)(2+i)}{5}=\frac{4+7i}{5}=\frac{4}{5}+i\frac{7}{5}.$

Polinomi

Še en zgled komutativnega kolobarja z enoto predstavljajo polinomi z realnimi ali kompleksnimi koeficienti. *Polinom* n-te stopnje s kompleksnimi koeficienti je izraz oblike

$$p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0,$$

kjer so a_k kompleksna števila in je vodilni koeficient $a_n\neq 0$. Eksponent pri najvišji potenci se imenuje stopnja polinoma, st $p(x)$, torej je st $p(x)=n$, ker je $a_n\neq 0$.

Polinome seštevamo tako, da seštevamo istoležne koeficiente (pri istih potencah), množimo pa tako, da množimo vsak člen z vsakim (stopnja polinoma se pri tem poveča).

ZGLED. $(x^2-3x-1)+(x+3)=x^2-2x+2,\ (x^2-3x-1)(x+3)=x^3-2x^2-10x-3.$

Nevtralni element za seštevanje je polinom 0, ki ima vse koeficiente enake 0, enota za množenje pa je konstanten polinom 1. Naprotni polinom je polinom z nasprotnimi koeficienti.

Deljenje polinomov se v splošnem ne izide, ampak dobimo ostanek, ki je nižje stopnje od delitelja: $p(x) = s(x)q(x) + r(x)$, st $r(x) <$ st $q(x)$. pri deljenju polinoma $p(x)$ z linearnim polinomom $x - x_1$ npr. dobimo $p(x) = (x - x_1)(b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_0) + c$.

ZGLED. $(x^2 - 3x - 1)/(x + 3) = x - 6 + 17/(x + 3)$ ali $x^2 - 3x - 1 = (x + 3)(x - 6) + 17$.

Naj bo x_1 poljubno (kompleksno) število. Pišimo

$$p(x) - a_n x^{n-1}(x - x_1) = (a_{n-1} + a_n x_1)x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ...$$

oziroma $p(x) - b_{n-1}x^{n-1}(x - x_1) = b_{n-2}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ...$, če označimo $b_{n-1} = a_n$ in $b_{n-2} = a_{n-1} + b_{n-1}x_1$. Nadalje je

$$p(x) - b_{n-1}x^{n-1}(x - x_1) - b_{n-2}x^{n-2}(x - x_1) = (a_{n-2} + b_{n-2}x_1)x^{n-2} + ...$$

oziroma $p(x) - b_{n-1}x^{n-1}(x - x_1) - b_{n-2}x^{n-2}(x - x_1) = b_{n-3}x^{n-2} + ...$, če pišemo še $b_{n-3} = a_{n-2} + b_{n-2}x_1$ itd. Na koncu dobimo

$$p(x) - (b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + ... + b_0)(x - x_1) = c \ \text{(konstanta)}.$$

Polinom p smo torej delili z linearnim faktorjem $(x - x_1)$ in dobili $p(x) = (x - x_1)q(x) + c$, kjer je $q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_0$. Obenem smo odkrili tudi priročen postopek, kako tako deljenje izvedemo, t.i. *Hornerjev algoritem*:

$$\begin{array}{c|ccccccc|c}
 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_2 & a_1 & & a_0 \\
 & & x_1 b_{n-1} & x_1 b_{n-2} & \dots & x_1 b_2 & x_1 b_1 & & x_1 b_0 \\
\hline
x_1 & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \dots & b_1 & b_0 & & c
\end{array}$$

ZGLED. Po Hornerju delimo polinom $x^2 - 3x - 1$ iz prejšnjega zgleda z linearnim polinomom $x + 3$ takole (v zdanji vrstici dobimo koeficiente kvocienta in ostanek):

$$\begin{array}{c|ccc}
 & 1 & -3 & -1 \\
 & & -3 & 18 \\
\hline
-3 & 1 & -6 & |17
\end{array}$$

Kompleksno število x_1 imenujemo *ničla* polinoma p, če je $p(x_1) = 0$. Glede ničel velja naslednji *osnovni izrek algebre*, ki ga navajamo brez dokaza:

IZREK. *Vsak polinom stopnje $n \geq 1$ s kompleksnimi koeficienti ima vsaj eno kompleksno ničlo.*

Konstantni člen c v izrazu $p(x) = (x - x_1)q(x) + c$ je ravno vrednost polinoma v točki x_1, torej $c = p(x_1)$, zato imamo $p(x) = (x - x_1)q(x) + p(x_1)$. Če je x_1 ničla polinoma p, se pravi $p(x_1) = 0$, se deljenje izide: $p(x) = (x - x_1)q(x)$. Tedaj je možno polinom razcepiti na same linearne faktorje

$$p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)$$

Teh faktorjev je n, kot je stopnja polinoma, lahko so med seboj tudi enaki (če so nekatere ničle enake oziroma, kot rečemo, večkratne). Če pa upoštevamo le različne ničle, dobimo

$$p(x) = a_n(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2}...(x - x_r)^{k_r}.$$

Tu je k_i kratnost (stopnja) i-te ničle in $k_1 + k_2 + ... + k_r = n$. V realnem pa lahko polinom z realnimi koeficienti razcepimo le do kvadratnih faktorjev. Če je x_1 kompleksna ničla polinoma z realnimi koeficienti, je tudi konjugirano število $\overline{x_1}$ ničla, produkt $(x - x_1)(x - \overline{x_1}) = x^2 - (x_1 + \overline{x_1})x + x_1\overline{x_1}$ pa ima spet realne koeficiente.

ZGLED. Razstavimo polinoma:
(a) $x^5 - x^3 = x^3(x^2 - 1) = x^3(x-1)(x+1)$.
(b) $x^4 + 4 = (x^4 + 4x^2 + 4) - 4x^2 = (x^2+2)^2 - 4x^2 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2) = (x+1+i)(x+1-i)(x-1+i)(x-1-i)$.

Moč številskih množic

Na koncu odgovorimo še na vprašanje, koliko je vseh realnih števil. Kot vemo, je množica naravnih števil $\mathbb{N}$ (najmanjša) neskončna množica. Tudi množica $\mathbb{Z}$ celih števil in množica $\mathbb{Q}$ racionalnih števil imata isto moč. Bijekcijo med $\mathbb{N}$ in $\mathbb{Z}$ oziroma med $\mathbb{N}$ in $\mathbb{Q}$ najdemo tako, da cela števila razvrstimo v zaporedje $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ...$, racionalna števila oziroma ulomke pa v zaporedje

$$0, 1/1, -1/1, 1/2, -1/2, 2/1, -2/1, 1/3, -1/3, 2/2, -2/2, 3/1, -3/1, ...$$

in opustimo tiste ulomke, ki dajo že dobljeno vrednost.

Pač pa ima množica realnih števil $\mathbb{R}$ večjo moč kot množica naravnih števil $\mathbb{N}$. To spoznamo takole. Kot bomo ugotovili kasneje (ali kot že vemo iz srednje šole) lahko vsako realno število y med 0 in 1 zapišemo tudi v obliki decimalnega izraza $y = 0, y_1 y_2 y_3 ...$, kjer so y_i decimalne cifre (od 0 do 9). Če se še dogovorimo, da na koncu samih devetic ne uporabljamo, je ta zapis enoličen. Pa denimo, da bi bilo realnih števil med 0 in 1 toliko kot naravnih. Tedaj bi jih lahko razvrstili v zaporedje $x_1 = 0, x_{11} x_{12} x_{13} ...$, $x_2 = 0, x_{21} x_{22} x_{23} ...$, $x_3 = 0, x_{31} x_{32} x_{33} ...$, ..., ki bi zajelo **vsa** realna števila med 0 in 1. Toda takoj lahko konstruiramo novo število med 0 in 1, ki ga v tem zaporedju ni, namreč število $a = 0, a_1 a_2 a_3 ...$, kjer postavimo $a_i = 1$, če je $x_{ii} = 0$, in $a_i = 0$, če je $x_{ii} \neq 0$. Število a se razlikuje od števila x_i vsaj v i-ti decimalki. Protislovje dokazuje, da med množicama $\mathbb{N}$ in $A = \{x \in \mathbb{R};\ 0 < x < 1\}$ ni bijekcije. Ker ima $\mathbb{N}$ isto moč kot neka prava podmnožica v neskončni množici A, nima pa iste moči kot A, je moč množice A res večja od moči množice $\mathbb{N}$, čeprav sta obe množici neskončni. Da se pokazati, da ima množica A isto moč kot množica $\mathbb{R}$. Prav tako ima množica vseh kompleksnih števil isto moč kot množica vseh realnih števil.

II. LINEARNA ALGEBRA

1. Matrike

V tem razdelku se bomo naučili računati z matrikami. Spoznali bomo, da sestavljajo kvadratne matrike iste velikosti primer nekomutativnega kolobarja z enoto. Najprej pa povejmo, kaj sploh je matrika.

DEFINICIJA. *Matrika* reda $m \times n$ z realnimi koeficienti je pravokotna shema realnih števil, ki so razporejena v m vrstic in n stolpcev:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \text{npr.} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrike bomo vedno označevali z velikimi črkami A, B itd. Števila, ki sestavljajo dano matriko A, imenujemo *koeficienti* ali *elementi* matrike in jih je natanko mn. Matriko poznamo, če poznamo njene elemente, a ne le njihove vrednosti, ampak tudi njihov položaj v matriki, mesto na katerem ležijo. Element na križišču i-te vrstice in j-tega stolpca označimo z a_{ij}. Indeksa nakazujeta njegov položaj v matriki.

Lahko torej rečemo, da gre za preslikavo iz množice $\{1, 2, ..., m\} \times \{1, 2, ..., n\}$ v množico realnih števil $\mathbb{R}$, ki vsakemu urejenemu paru indeksov (i, j) priredi element a_{ij}. Poznavanje matrike torej pomeni poznavanje te preslikave.

DEFINICIJA. Matriki A in B sta *enaki*, če sta istega reda in imata enake istoležne koeficiente.

Ta definicija se ujema z definicijo enakosti dveh preslikav, ki morata imeti isto domeno in imeti pri vsakem originalu isto vrednost ($a_{ij} = b_{ij}$ za vsak par (i, j)).

V množico matrik uvedemo dve notranji operaciji, seštevanje in množenje.

Matriki lahko seštejemo, če in samo če sta istega reda (imata isto obliko in velikost).

DEFINICIJA *Vsota* matrike A in matrike B je matrika $C = A + B$, ki ima za elemente vsoto istoležnih elementov matrik A in B, torej $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ za poljubna i in j.

Zgled. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

Seštevanje matrik je asociativno in komutativno. Nevtralni element za seštevanje je matrika samih ničel (*ničelna matrika*), nasprotni element matrike A pa matrika $-A$ z nasprotno predznačenimi elementi. Za seštevanje je množica $M_{m,n}$ vseh matrik reda $m \times n$ komutativna grupa.

Množenje dveh matrik A in B je možno le, če ima prva (leva) matrika A toliko stolpcev, kot ima druga (desna) matrika B vrstic. Rezultat je potem matrika $C = AB$, ki ima toliko vrstic kot A in toliko stolpcev kot B. Če je torej matrika A reda $m \times n$, matrika B pa reda $n \times p$, je njun produkt matrika C, ki je reda $m \times p$. Definicija produkta pa je naslednja.

DEFINICIJA. *Produkt* matrik A in B je matrika $C = AB$, katere elementi so definirani s predpisom $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$ za $i = 1, 2, ..., m$ in $j = 1, 2, ..., p$. Rečemo, da je c_{ij} "produkt" i-te vrstice in j-tega stolpca.

ZGLED. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 11 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$.
Produkt BA v tem primeru ni definiran.

Odslej obravnavajmo le *kvadratne matrike*, to je, matrike reda $n \times n$. Na kratko rečemo, da je red kvadratne matrike enak kar n. Za kvadratne matrike istega reda sta vsota in produkt vedno definirana.

Lastnosti množenja. Medtem ko ima seštevanje matrik podobne lastnosti kot npr. seštevanje običajnih realnih števil, je pri množenju potrebna večja previdnost.

1. *Asociativnost*: $(AB)C = A(BC)$

Dokaz. Leva stran je enaka:
$\sum_{k=1}^{n}(AB)_{ik}C_{kj} = \sum_{k=1}^{n}(\sum_{r=1}^{n} A_{ir}B_{rk})C_{kj} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} A_{ir}B_{rk}C_{kj}$, desna pa:
$\sum_{r=1}^{n} A_{ir}(BC)_{rj} = \sum_{r=1}^{n} A_{ir}(\sum_{k=1}^{n} B_{rk}C_{kj} = \sum_{r=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{ir}B_{rk}C_{kj}$. To velja za vsak par indeksov, torej sta obe matriki enaki.

ZGLED. Naj bo $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$. Tedaj imamo
$(AB)C = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 & 23 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$, $A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 13 & 11 \\ 8 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 & 23 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$.

2. *Komutativnost* v splošnem *ne* velja: $AB \neq BA$

ZGLED. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Tedaj je $AB = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ in $BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

3. *Enota* (nevtralni element) za množenje je matrika $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ . & . & ... & . \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}$.

Matriko I imenujemo *identična matrika*.

Res: $AI = IA = A$.

4. *Distributivnost* produkta glede na vsoto: $(A+B)C = AC+BC$, $C(A+B) = CA+CB$

Dokaz. Velja $\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}+b_{ik})c_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj} + \sum_{k=1}^{n} b_{ik}c_{kj}$ in $\sum_{k=1}^{n} c_{ik}(a_{kj}+b_{kj}) = \sum_{k=1}^{n} c_{ik}a_{kj} + \sum_{k=1}^{n} c_{ik}b_{kj}$.

5. *Netrivialnost*: $I \neq 0$.

Zaradi naštetih lastnosti vsote in produkta kvadratnih matrik, je množica $M_{n,n}$ vseh matrik reda $n \times n$ netrivialen nekomutativen kolobar z enoto. Videli bomo, da za $n > 1$ ni obseg, ker ne obstaja inverz za vsako od 0 različno matriko.

ZGLED. Matrika $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ nima inverza. Prepričajte se o tem sami.

Pri množenju matrik veljajo nekatere posebnosti, ki jih pri številih ne opazimo:

(a) $A^2 = 0$, čeprav $A \neq 0$, primer $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) $AB = 0$, čeprav $A \neq 0$ in $B \neq 0$, primer $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

DEFINICIJA. *Skalarna matrika* reda $n \times n$ je matrika: $\lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda & ... & 0 \\ . & . & \ddots & . \\ 0 & 0 & ... & \lambda \end{bmatrix}$

Z uporabo skalarne matrike lahko uvedemo *skalarno množenje* matrik (tudi za nekvadratne matrike), tako da postavimo $\lambda A = (\lambda I)A$. Rezultat je matrika, ki ima vse elemente pomnožene z λ. Pri tem veljajo lastnosti: $\mu(\lambda A) = (\mu\lambda)A$, $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$, $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$, $1.A = A$.

DEFINICIJA. *Diagonalna matrika* reda $m \times m$ je matrika oblike: $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ . & . & \ddots & . \\ 0 & 0 & ... & \lambda_m \end{bmatrix}$

Če je A matrika reda $m \times n$, dobimo matriko DA tako, da prvo vrstico pomnožimo z λ_1, drugo z λ_2 itd. Pri računanju matrike AD (kadar je to možno) se prvi stolpec pomnoži z λ_1, drugi z λ_2 itd.

DEFINICIJA. *Transponiranje* matrik zamenja vrstice in stolpce: $(A^\top)_{ij} = A_{ji}$

ZGLED. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, $A^\top = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$

Lastnosti: $(A^\top)^\top = A$, $(A + B)^\top = A^\top + B^\top$, $(AB)^\top = B^\top A^\top$.

Inverzna matrika. Spet naj bo A kvadratna matrika reda $n \times n$. Inverzna matrika matrike A je po definiciji taka kvadratna matrika X istega reda, da je $AX = XA = I$. Ni pa treba, da inverzna matrika vedno obstaja (tak primer smo že imeli). Inverz identične matrike I je kar matrika I. Če inverz k A obstaja, je en sam in ga označimo z A^{-1}.

ZGLED. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$. Lahko naredimo preskus in ugotovimo, da je $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

DEFINICIJA. Matrika A je *obrnljiva* (*regularna, nesingularna*), kadar ima inverz.

Vse obrnljive matrike reda $n \times n$ sestavljajo za množenje (nekomutativno) grupo.

Lastnosti:

1. Če je matrika A obrnljiva, je obrnljiva tudi matrika A^{-1} in velja $(A^{-1})^{-1} = A$.

   Dokaz. Iz enakosti $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ vidimo, da je A inverz matrike A^{-1}.

2. Če je A obrnljiva matrika, je obrnljiva tudi matrika $A^\top$ in velja $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$.

   Dokaz. Transponirajmo enakost $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ in dobimo po pravilih za transponiranje produkta $(A^{-1})^\top A^\top = A^\top(A^{-1})^\top = I$. Odtod vidimo, da je $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$.

3. Če sta A in B obrnljivi matriki, je obrnljiv tudi produkt AB in velja $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Dokaz. Sledi iz računa $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = (B^{-1}A^{-1})(AB) = I$.

2. Determinante kvadratnih matrik

Naj bo A kvadratna matrika reda $n > 1$. Z $A(i|j)$ označimo *podmatriko* v A, ki jo dobimo tako, da prečrtamo i-to vrstico in j-ti stolpec.

DEFINICIJA. *Determinanta* kvadratne matrike A je definirana induktivno, glede na red n matrike A:
1. Za $n = 1$ naj bo $\det A = a_{11}$.
2. Za $n > 1$ naj bo $\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + ... + a_{1n}A_{1n}$, kjer so A_{1j} kofaktorji k elementom prve vrstice. Za vsak par (i, j) je $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det A(i|j)$ (ker je matrika $A(i|j)$ reda $n - 1$, znamo $\det A(i|j)$ že izračunati).

Kadar izračunamo determinanto po definiciji, rečemo, da smo jo izračunali z razvojem po prvi vrstici.

ZGLED. (a) Determinanto matrike reda 2 dobimo z navzkrižnim množenjem elementov na diagonali in na kodiagonali:
$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.
(b) Determinanta matrike $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ je enaka
$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$.

Isto dobimo, če matriki na desni pripišemo prva dva stolpca, nato pa zmnožimo elemente po treh vzporednih diagonalah, jih seštejemo, od te vsote pa odštejemo vsoto produktov po treh vzporednih kodiagonalah (Sarrusovo pravilo).

ZGLED. Determinanta enotske matrike je enaka 1.

Lastnosti determinant. Sama definicija determinante je za računanje precej nerodna. Iz lastnosti determinant, ki si jih bomo sedaj ogledali, pa bodo sledila praktična navodila, kako lahko determinanto tudi nekoliko večje matrike hitro izračunamo.

1. *Determinanto lahko razvijemo tudi po kakšni drugi vrstici, tako da je za vsak i*

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + ... + a_{in}A_{in}$$

Formulo preverimo npr. na matrikah reda 2 in 3.

2. *Če je v matriki A ena vrstica enaka 0, je* $\det A = 0$.

Dokaz. Determinanto razvijemo po vrstici, ki je enaka 0.

3. *Če iz matrike A dobimo matriko B tako, da v A eno vrstico pomnožimo s konstanto k, je* $\det B = k \det A$.

Dokaz. Pomnožimo npr. i-to vrstico matrike A s k. Potem je po formuli za razvoj determinante po i-ti vrstici $\det B = b_{i1}B_{i1} + ... + b_{in}B_{in} = k(a_{i1}A_{i1} + ... + a_{in}A_{in}) = k \det A$.

4. *Če v matriki zamenjamo dve vrstici, spremeni determinanta predznak.*

Dokaz. Z zamenjavo i-te in $i+1$-te vrstice dobimo iz matrike A matriko B, kjer je $b_{ik} = a_{i+1,k}$ in $b_{i+1,k} = a_{ik}$ za vsak k, ostali elementi so nespremenjeni. Zato je

$$\det B = b_{i+1,1}B_{i+1,1} + ... + b_{i+1,n}B_{i+1,n} =$$

$$= (-1)^{(i+1)+1}b_{i+1,1}\det B(i+1|1) + ... + (-1)^{(i+1)+n}b_{i+1,n}\det B(i+1|n) =$$

$$= (-1)^{(i+1)+1}a_{i1}\det A(i|1) + ... + (-1)^{(i+1)+n}a_{in}\det A(i|n) =$$

$$= -(a_{i1}A_{i1} + ... + a_{in}A_{in}) = -\det A$$

Kadar zamenjamo i-to in j-to vrstico, preskočimo liho mnogo vrstic, zato se tudi v tem primeru predznak determinante spremeni.

5. *Če sta v matriki A dve vrstici enaki, je* $\det A = 0$.

Dokaz. Enaki vrstici med seboj zamenjajmo. Po eni strani se determinanta ne spremeni, saj je nova matrika enaka prejšnji. Po drugi sterani pa spremeni predznak (točka 4). Oboje je možno le v primeru, ko je determinanta enaka 0.

6. *Izraz $a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + ... + a_{in}A_{jn}$, kjer so A_{jk} kofaktorji k elementom vzporedne vrstice, je enak 0.*

Dokaz. Ta izraz je enak determinanti matrike, ki ima i-to in j-to vrstico enaki.

7. *Če iz matrike A dobimo matriko B tako, da v A pomnožimo j-to vrstico s konstanto k in jo prištejemo i-ti vrstici, je* $\det B = \det A$.

Dokaz. Spet uporabimo formulo za razvoj po i-ti vrstici $\det B = b_{i1}B_{i1} + ... + b_{in}B_{in} = (-1)^{i+1}(a_{i1} + ka_{j1})\det A(i|1) + ... + (-1)^{i+n}(a_{in} + ka_{jn})\det A(i|n) = a_{i1}A_{i1} + ... + a_{in}A_{in} + k(a_{j1}A_{i1} + ... + a_{in}A_{jn}) = \det A + k\det(\text{ matrika, v kateri sta } i-\text{ta in } j-\text{ta vrstica enaki}) = \det A$.

ZGLED. Zadnjo lastnost izkoristimo za to, da (z zaporednimi vrstičnimi transformacijami) pridelamo v matriki čim več ničel. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.
Sledi $\det A = \det B = 35$.

8. *Determinanta se ne spremeni, če matriko A transponiramo*: $\det A^\top = \det A$.

Trditev preverimo le za matrike reda 2 in 3.

POSLEDICA. *Vseeno je, če računamo determinanto kvadratne matrike z razvojem po katerikoli vrstici ali po kateremkoli stolpcu. Namesto vrstičnih transformacij lahko uporabljamo stolpčne transformacije.*

ZGLED. Izračunajte determinanto matrike na različne načine in rezultate primerjajte med seboj. Rezultat je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

9. *Če je matrika zgornja ali spodnja trikotna, je njena determinanta enaka produktu diagonalnih elementov* $\det A = a_{11}a_{22}...a_{nn}$.

Dokaz. Oglejmo si npr. zgornjo trikotno matriko in izračunajmo njeno determinanto z razvojem po prvem stolpcu. Ker je od 0 različen le element na prvem mestu, njegov kofaktor pa je enak poddeterminanti, ki je tudi zgornja trikotna, lahko postopek nadaljujemo do konca.

10. *Determinanta produkta dveh matrik je enaka produktu njunih determinant*:

$$\det AB = \det A \det B$$

Lastnost preverimo le za matrike reda 2.

Adjungiranka kvadratne matrike.

Spoznali bomo še eno matriko, ki je dani matriki prirejena ali adjungirana in omogoča pod določenimi pogoji izračunati inverzno matriko.

DEFINICJA. Matrika $B = (b_{ij})$ je *adjungiranka* matrike A (oznaka $B = \text{adj } A$), če za vsak $i, j = 1, 2, ..., n$ velja $b_{ij} = A_{ji}$, kjer so A_{ij} kofaktorji k elementom matrike A. Če je torej $A = (a_{ij})$, je adj $A = (A_{ij})^\top$.

Adjungiranko dobimo tako, da najprej poiščemo k vsakemu elementu matrike A pripadajoči kofaktor in nato matriko kofaktorjev še transponiramo.

ZGLED. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \text{adj}A = \begin{bmatrix} 5 & 12 & -1 \\ -4 & -6 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

TRDITEV. *Vedno velja* $A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = (\det A)I$.

Dokaz. Označimo $B = \text{adj } A$ in $C = AB$. Tedaj za vsak i velja $c_{ii} = a_{i1}b_{1i} + ... + a_{in}b_{ni} = a_{i1}A_{i1} + ... + a_{in}A_{in} = \det A$. Za $i \neq j$ pa dobimo $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + ... + a_{in}b_{nj} = a_{i1}A_{j1} + ... + a_{in}A_{jn} = 0$ (glej točko 6). Torej je $AB = (\det A)I$. Transponirajmo: $B^\top A^\top = (\det A)I$. Če adjungiranko transponiramo, dobimo adjungirano matriko k transponirani, torej (adj $A)^\top$ =adj $A^\top$. Se pravi, da imamo $(\text{adj } A^\top)A^\top = (\det A^\top)I$. To velja za vsak A, torej tudi za $A^\top$: $(\text{adj } A)A = (\det A)I$.

IZREK. *Kvadratna matrika A je nesingularna (obrnljiva) natanko takrat, ko je* $\det A \neq 0$. *V tem primeru je*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\text{adj } A$$

Dokaz. Če obstaja B, da je $AB = I$, velja po lastnosti (8) $\det A \det B = \det AB = \det I = 1$. Torej mora biti $\det A \neq 0$. Če pa je $\det A \neq 0$, iz formule $A(\text{adj } A) = (\det A)I$ dobimo z deljenjem z determinanto zgornjo formulo za inverz matrike A.

ZGLED. (a) Za matriko $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ je $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

(b) Inverz matrike $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ je matrika $A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 5 & 12 & -1 \\ -4 & -6 & -1 \\ -1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$.

V obeh primerih lahko napravimo preskus.

3. Sistemi linearnih enačb

Znanje o računanju z matrikami in determinantami bomo uporabili pri reševanju splošnih sistemov linearnih enačb.

Cramerjevo pravilo. Naj bo A kvadratna matrika reda n. Poleg tega naj bo nesingularna, tako da obstaja njen inverz A^{-1}. Kot vemo je to res natanko takrat, ko je $\det A \neq 0$.

Rešujemo matrično enačbo $Ax = b$, kjer je b stolpec desnih strani (dolžine n) in x stolpec neznank (prav tako dolžine n). Formalno je rešitev enaka

$$x = A^{-1}b \quad \text{oziroma} \quad x = \frac{1}{\det A}(\text{adj}A)b$$

Zapišimo definicijo adjungiranke, pa dobimo za vsak j

$$x_j = \frac{1}{\det A}(A_{1j}b_1 + A_{2j}b_2 + ... + A_{nj}b_n).$$

Tu so A_{ij} kofaktorji k j-temu stolpcu. Če označimo z A_j matriko, ki ima iste stolpce kot A, le j-ti je zamenjan s stolpcem desnih strani, je za vsak $j = 1, 2, ..., n$

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A}$$

To je znamenito *Cramerjevo pravilo* za reševanje take enačbe s kvadratno nesingularno matriko. Rešitev je očitno ena sama.

Enačbo $Ax = b$ lahko zapišemo po komponentah in dobimo sistem linearnih enačb

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & & \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

ZGLED.

$$\begin{array}{rcr} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - \ x_4 & = & -4 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 & = & 3 \\ 2x_1 + \ x_2 + 0x_3 + \ x_4 & = & 1 \\ 0x_1 + \ x_2 + \ x_3 + \ x_4 & = & 6 \end{array}$$

Dobimo $\det A = -2$, $\det A_1 = 2$, $\det A_2 = -2$, $\det A_3 = -6$, $\det A_4 = -4$. Torej je rešitev $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$, $x_4 = 2$.

Splošni sistemi linearnih enačb. To je sistem m linearnih enačb z n neznankami $x_1, x_2, ..., x_n$ oblike

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & & \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n & = & b_n \end{array}$$

Števila a_{ij} so *koeficienti* sistema, iz njih sestavimo t.i. *osnovno matriko* sistema $A = (a_{ij})$, ki je reda $m \times n$. Števila b_i sestavljajo stolpec (vektor) $b = (b_1, b_2, ..., b_m)^\top$ dolžine m, ki ga imenujemo *desna stran* sistema. Tudi iz neznank sestavimo stolpec $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^\top$ dolžine n. Sistem potem lažje zapišemo v matrični obliki: $Ax = b$. Včasih zapišemo osnovno matriko sistema skupaj z desno stranjo v eni sami matriki $\tilde{A} = [A; b]$. To je t.i. *razširjena matrika* sistema.

ZGLED. Sisteme linearnih enačb poznamo že iz srednje šole, npr.: $ax = b$ (ena enačba z eno neznanko), $ax + by = c$ (ena enačba z dvema neznankama), $a_{11}x + a_{12}y = b_1,\ a_{21}x + a_{22}y = b_2$ (dve enačbi z dvema neznankama) itd.

Podmatrika dane matrike A je zožitev matrike A kot preslikave na manjšo indeksno množico $\{i_1, i_2, ..., i_{m_1}\} \times \{j_1, j_2, ..., j_{n_1}\}$, kjer je $m_1 \leq m$, $n_1 \leq n$ in so i_k poljubni indeksi izmed $1, 2, ..., m$, j_k pa poljubni indeksi izmed $1, 2, ..., n$. Če je $m_1 = n_1$, rečemo, da je podmatrika kvadratna.

DEFINICIJA. *Rang* matrike A je red največje kvadratne podmatrike v A, ki ima od 0 različno determinanto. Označimo ga z $r = r(A)$.

ZGLED. Rang ničelne matrike $A = 0$ je enak 0. Če je v matriki vsaj en od 0 različen element, je rang matrike vsaj 1. Rang matrike reda $m \times n$ ne more biti večji niti od m niti od n. Če matriko povečamo (dodamo kakšen stolpec ali vrstico), se rang kvečjemu poveča. Rang naslednje matrike je npr. enak 2, ker je $\det A = 0$, lahko pa najdemo podmatrike reda 2×2, ki imajo od 0 različno determinanto.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

IZREK. *Splošni sistem m lineranih enačb z n neznankami je rešljiv natanko takrat, ko je rang osnovne matrike sistema A enak rangu razširjene matrike $\tilde{A}$, torej $r(A) = r(\tilde{A})$. Če je skupni rang $r = n$, ima sistem eno samo rešitev. Če pa je $r < n$, obstaja $n - r$ neznank, katerih vrednosti si lahko poljubno izberemo (ali jih pustimo kot parametre), druge neznanke se potem z njimi linearno izražajo in so zato z njimi natanko določene.*

Dokaz. Rang osnovne matrike $r = r(A)$ je vedno manjši ali enak n. Predpostavimo, da je ustrezna podmatrika reda r z od 0 različno determinanto kar v levem zgornjem kotu (sicer enačbe in neznanke med seboj zamenjamo). Leve strani sistema označimo z $L_1, L_2, ..., L_m$; odvisne so še od neznank $x_1, x_2, ..., x_n$. Če je $r < k \leq n$ in $r < p \leq m$, imamo torej

$$\begin{aligned}
&L_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1r}x_r + ... + a_{1k}x_k + ... + a_{1n}x_n \\
&L_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2r}x_r + ... + a_{2k}x_k + ... + a_{2n}x_n \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&L_r = a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + ... + a_{rr}x_r + ... + a_{rk}x_k + ... + a_{rn}x_n \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&L_p = a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + ... + a_{pr}x_r + ... + a_{pk}x_k + ... + a_{pn}x_n
\end{aligned}$$

Tu je matrika koeficientov reda r v levem zgornjem kotu obrnljiva, se pravi, da ima od 0 različno determinanto, vsaka večja kvadratna podmatrika pa ima determinanto enako 0. Če torej dodamo katerokoli nadaljnjo, npr. p-to vrstico, kjer je $p > r$, in katerikoli nadaljnji, npr. k-ti stolpec, kjer je $k > r$, dobimo matriko

$$A(p, k) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1r} & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2r} & a_{2k} \\ . & . & ... & . & . \\ a_{r1} & a_{r2} & ... & a_{rr} & a_{rk} \\ a_{p1} & a_{p2} & ... & a_{pr} & a_{pk} \end{bmatrix},$$

ki ima determinanto enako 0, $\det A(p, k) = 0$, medtem ko je njen kofaktor k zadnjemu elementu v zadnji vrstici različen od 0, torej $A_{pk} \neq 0$.

Če so $A_{1k},\ A_{2k},\ ...,\ A_{rk},\ A_{pk}$ kofaktorji k elementom zadnjega stolpca matrike $A(p,k)$, izračunajmo izraz

$A_{1k}L_1 + ... + A_{rk}L_r + A_{pk}L_p =$

$A_{1k}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1r}x_r + ... + a_{1k}x_k + ... + a_{1n}x_n) + ...$
$A_{rk}(a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + ... + a_{rr}x_r + ... + a_{rk}x_k + ... + a_{rn}x_n) +$
$A_{pk}(a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + ... + a_{pr}x_r + ... + a_{pk}x_k + ... + a_{pn}x_n) =$

$(a_{11}A_{1k} + a_{21}A_{2k} + ... + a_{r1}A_{rk} + a_{p1}A_{pk})x_1+$
. . . .
$(a_{1r}A_{1k} + a_{2r}A_{2k} + ... + a_{rr}A_{rk} + a_{pr}A_{pk})x_r + ...$
. . . .
$(a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + ... + a_{rk}A_{rk} + a_{pk}A_{pk})x_k+$
. . . .
$(a_{1n}A_{1k} + a_{2n}A_{2k} + ... + a_{rn}A_{rk} + a_{pn}A_{pk})x_n = 0.$

Prvih r oklepajev je enakih 0, ker predstavljajo determinante matrik z dvema enakima stolpcema, ostali pa zato, ker so to determinante kvadratnih podmatrik reda več od r. Dobili smo torej

$$A_{1k}L_1 + A_{2k}L_2 + ... + A_{rk}L_r + A_{pk}L_p = 0,$$

kar lahko zaradi $A_{pk} \neq 0$ zapišemo tudi v obliki

$$L_p = -(A_{1k}L_1 + A_{2k}L_2 + ... + A_{rk}L_r)/A_{pk}.$$

Če je nehomogeni sistem rešljiv, se pravi, če je pri nekih vrednostih $x_1, x_2, ..., x_n$ izpolnjenih vseh m enačb $L_1 = b_1,\ L_2 = b_2,\ ..., L_m = b_m$, mora za vsak $k > r$ in $p > r$ (rang osnovne matrike) veljati

$$b_1A_{1k} + b_2A_{2k} + ...b_rA_{rk} + b_pA_{pk} = 0$$

oziroma

$$b_p = -(b_1A_{1k} + b_2A_{2k} + ... + b_rA_{rk})/A_{pk},$$

ker je $A_{pk} \neq 0$. Prva enačba pomeni, da imajo tudi v razširjeni matriki sistema vse podmatrike reda več kot r determinanto enako 0. Rang razširjene matrike je torej manjši ali enak r. Ker pa manj kot r (ki je rang osnovne matrike) ne more biti, je enak r in oba ranga se ujemata.

Obratno, naj bosta ranga osnovne in razširjene matrike enaka, se pravi, da za vsak $k, p > r$ velja ena od zgornjih relacij. Tedaj je sistem rešljiv. Poljubno namreč izberemo zadnjih $n - r$ neznank $x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n$ in iz sistema

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - ... - a_{1n}x_n$
$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2r}x_r = b_1 - a_{2,r+1}x_{r+1} - ... - a_{2n}x_n$
. . . .
$a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + ... + a_{rr}x_r = b_1 - a_{r,r+1}x_{r+1} - ... - a_{rn}x_n$

ki ima obrnljivo osnovno matriko, izračunamo še $x_1, x_2, ..., x_r$. Tako smo izpolnili prvih r enačb. Potem te rešitve rešijo oziroma zadovoljijo tudi vsako nadaljnjo enačbo, npr. za vsak $p > r$ (po predpostavki)

$$L_p = -(A_{1k}L_1 + A_{2k}L_2 + ... + A_{rk}L_r)/A_{pk} = -(b_1A_{1k} + b_2A_{2k} + ... + b_rA_{rk})/A_{pk} = b_p.$$

ZGLEDI.

1.
$$\begin{aligned} x - y + z &= 3 \\ 2x + y - 2z &= 3 \\ -x + 4y - 6z &= -6 \end{aligned}$$

Rang osnovne in razširjene matrike je enak 3, torej je sistem enolično rešljiv. Rešitev je $(2, -1, 0)^\top$.

$$2.\quad \begin{array}{rcl} x + \ y + \ z &=& 1 \\ x + 0y - \ z &=& 2 \\ -x + 0y + \ z &=& a \end{array}$$

Če je $a = -2$, je obakrat rang enak 2, sistem je rešljiv in dobimo enoparametrično družino rešitev: $(2, -1, 0)^\top + z(1, -2, 1)^\top$. Če je $a \neq -2$, sistem ni rešljiv, ker sta ranga osnovne in razširjene matrike različna.

Gaussov postopek. Naslednji postopek omogoča sistematično reševanje poljubnih sistemov. Uporabljamo ga lahko tudi za določanje ranga dane matrike ali za računanje inverzne matrike. Na sistemu lahko opravimo naslednje *vrstične transformacije*:
- zamenjamo dve vrstici med seboj,
- pomnožimo eno vrstico s poljubnim od 0 različnim številom,
- prištejemo eno vrstico drugi.
S temi transformacijami prevedemo dani sistem v drug sistem, ki pa je ekvivalenten prvemu v tem smislu, da ima iste rešitve.

Transformacije izvajamo na razširjeni matriki sistema (ki vsebuje vse informacije o sistemu) in ne na celem sistemu (ni treba pisati neznank). Cilj je prevesti razširjeno matriko sistema na zgornjo trikotno obliko. Iz nje potem rekurzivno (od zadaj) z lahkoto izračunamo vrednosti neznank, ali pa ugotovimo, če sistem morebiti ni rešljiv.

ZGLED. 1. Oba prejšnja primera hitro uženemo z Gaussovo metodo.

2. Računanje inverzne matrike: Dani kvadratni matriki, ki je obrnljiva, pripišemo zadaj še enotsko matriko I. Na tako razširjeni matriki izvedemo vrstično-ekvivalentne transformacije s ciljem, da prvotno matriko pretvorimo v diagonalno oziroma v identično. Na dodanih mestih dobimo inverzno matriko. Primer:

$$A = \left[\begin{array}{rrrcrrr} 1 & -2 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{rrrcrrr} 1 & 0 & 0 & | & 1/9 & 2/9 & -2/9 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2/9 & 2/9 & 1/9 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2/9 & 1/9 & 2/9 \end{array}\right].$$

DEFINICJA. Če je $b = 0$, imenujemo sistem *homogen*, za $b \neq 0$ pa *nehomogen*.

Oglejmo si podrobneje homogene sisteme linearnih enačb. Tak sistem je vedno rešljiv, saj se rang razširjene matrike ne more povečati (osnovno matriko razširimo le s stolpcem 0). Tudi sicer lahko eno rešitev hitro uganemo, namreč *trivialno rešitev*: $x = 0$ oziroma $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Vprašanje pa je, ali obstajajo tudi druge, netrivialne rešitve. Le-te obstajajo natanko takrat, ko je rang osnovne matrike $r < n$. Kot prej si lahko vrednosti $n-r$ neznank izberemo poljubno, ostale so z njimi določene, in dobimo $n-r$ parametrično rešitev. Če pa je $r = n$ je rešitev ena sama, torej trivialna.

POSLEDICA 1. *Če je enačb manj, kot je neznank ($m < n$), je homogeni sistem netrivialno rešljiv.*

Dokaz. V tem primeru je namreč rang $r \leq m < n$.

POSLEDICA 2. *Homogeni sistem n enačb z n neznankami je netrivialno rešljiv natanko takrat, ko je determinanta sistema enaka 0.*

Dokaz. Zdaj je seveda $r < n$ natanko takrat, ko je determinanta osnovne matrike sistema enaka 0.

ZGLEDI.

$$1.\quad \begin{array}{rcl} x- \ y+2z &=& 0 \\ x+2y- \ z &=& 0 \\ 2x+ \ y+z &=& 0 \end{array}$$

Tu je determinanta osnovne matrike enaka 0. Neznanko z izberemo poljubno, ostane sistem $x - y = -2z,\ x + 2y = z$. Sedaj je determinanta enaka 3, torej imamo pri danem z eno samo rešitev $x = -z,\ y = z$ oziroma $(x, y, z)^\top = z(-1, 1, 1)^\top$ (en parameter).

$$2.\quad \begin{array}{rcl} x- \ y+2z &=& 0 \\ -2x+2y-4z &=& 0 \\ -x+ \ y-2z &=& 0 \end{array}$$

Največja od 0 različna poddeterminanta je tu reda 1, dve neznanki, y in z, poljubno izberemo, za x pa dobimo $x = y - 2z$ ali drugače: $(x, y, z)^\top = y(1, 1, 0)^\top + z(-2, 0, 1)^\top$ (dva parametra).

$$3.\quad \begin{array}{rcl} x- \ y+2z &=& 0 \\ x+2y-z &=& 0 \\ x+y+z &=& 0 \end{array}$$

Sedaj je determinanta različna od 0 in sistem ima eno samo - to je, trivialno - rešitev: $(x, y, z)^\top = (0, 0, 0)^\top$.

Linearna neodvisnost. Imejmo npr. n stolpcev dolžine m, $a_1 = (a_{11}, a_{21}, ..., a_{m1})^\top$, $a_2 = (a_{12}, a_{22}, ..., a_{m2})^\top$,..., $a_n = (a_{1n}, a_{2n}, ..., a_{mn})^\top$. Stolpce lahko med seboj seštevamo (po komponentah, kot matrike) in množimo s skalarji (kot matrike). Stolpcem pogosto rečemo *vektorji* (v m razsežnem prostoru).

DEFINICIJA. *Linearna kombinacija* stolpcev (vektorjev) $a_1, a_2, ..., a_n$ je izraz (stolpec, vektor) oblike $x_1a_1 + x_2a_2 + ... + x_na_n$, kjer so $x_1, x_2, ..., x_n$ realna števila (*koeficienti* linearne kombinacije).

DEFINICIJA. Rečemo, da je množica stolpcev (vektorjev) $a_1, a_2, ..., a_n$ *linearno neodvisna*, če iz dejstva, da je $x_1a_1 + x_2a_2 + ... + x_na_n = 0$, sledi $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$.

Zapišimo dejstvo, da je linearna kombinacija stolpcev enaka 0, po komponentah. Dobimo homogeni sistem linearnih enačb z neznankami, ki so koeficienti v linearni kombinaciji.

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n &=& 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n &=& 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & . & . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n &=& 0 \end{array}$$

Ta sistem ima samo trivialno rešitev $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$, natanko takrat, ko so stolpci (vektorji) po definiciji linearno neodvisni.

ZGLED. Zadnji primer reševanja homogenega sistema linearnih enačb pove, da so stolpci $(1, 1, 1)^\top,\ (-1, 2, 1)^\top,\ (2, -1, 1)^\top$ med seboj linearno neodvisni. Stolpci osnovne matrike prvega ali drugega sistema niso taki.

Vedno so neodvisni stolpci, ki imajo samo na enem mestu 1, drugje pa 0, torej stolpci $e_1 = (1, 0, ..., 0)^\top,\ e_2 = (0, 1, ..., 0)^\top,\ ...,\ e_n = (0, 0, ..., 1, 0, ..., 0)^\top$, če je $n \le m$ (dolžina stolpcev). Linearna kombinacija $x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n = 0$ namreč pomeni, da je stolpec $(x_1, x_2, ..., x_n, 0, ..., 0)^\top$ enak 0, oziroma $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$. Isto bi dobili tudi iz homogenega sistema lineranih enačb (osnovna matrika je kar identična matrika).

Po drugi strani pa v primeru $n > m$, noben nabor n stolpcev $a_1, a_2, ..., a_n$ ne more biti linearno neodvisen, ker sedaj dobimo homogeni sistem linearnih enačb, ki ima več neznank kot je enačb in je zato vedno netrivialno rešljiv (rang je manjši od n).

OPOMBA. Če z matriko A reda $m \times n$ delujemo na stolpec e_k (dolžine n), ki ima na k-tem mestu 1, drugod pa same 0, dobimo za rezultat ravno k-ti stolpec matrike A, torej $Ae_k = a_k$.

TRDITEV. *Naj bo A poljubna kvadratna matrika. Tedaj so stolpci $a_1, a_2, ..., a_n$ matrike A linearno neodvisni natanko takrat, ko je matrika A obrnljiva.*

Dokaz. Denimo, da so stolpci matrike A linearno neodvisni. Tedaj iz $x_1a_1 + x_2a_2 + ... + x_na_n = 0$, sledi $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$, oziroma ustrezni homogeni sistem $Ax = 0$ ima samo trivialno rešitev $x = 0$. To je mogoče le v primeru, ko je determinanta osnovne matrike sistema, to pa je ravno matrika A, različna od 0. Obratno, če je matrika A obrnljiva, je sistem $Ax = 0$ enolično trivialno rešljiv in stolpci matrike so linearno neodvisni.

4. Lastne vrednosti in lastni vektorji matrik

Imejmo same kvadratne matrike reda n. Najprej bomo vpeljali mednje posebno relacijo podobnosti.

DEFINICIJA. Matrika A je *podobna* matriki B, če obstaja obrnljiva matrika S, da velja $A = SBS^{-1}$.

Hitro se lahko prepričamo, da je podobnost ekvivalenčna relacija med matrikami. Pri refleksivnosti za S vzamemo identično matriko, pri simetričnosti vlogi S in S^{-1} zamenjamo, pri tranzitivnosti pa je $A = SBS^{-1} = STCT^{-1}S^{-1} = (ST)C(ST)^{-1}$, če je tudi $B = TCT^{-1}$.

Kdaj lahko dosežemo, da je dana matrika A podobna neki diagonalni matriki $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$?

DEFINICIJA. Matrika A se *da diagonalizirati*, če je podobna neki diagonalni matriki.

ZGLED. Matrika

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

je podobna diagonalni matriki $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, torej se da diagonalizirati.

Denimo, da se matrika A da diagonalizirati, torej $A = SDS^{-1}$, kjer je D diagonalna matrika, torej $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$, S pa poljubna obrnljiva matrika. Tedaj velja $AS = SD$ in od tod za vsak $k = 1, 2, ..., n$ imamo $ASe_k = SDe_k$ oziroma $As_k = \lambda_k s_k$, kjer so s_k stolpci matrike S, se pravi $s_k = Se_k$. Ker je S obrnljiva matrika, so njeni stolpci $s_1, s_2, ..., s_n$ po zadnji trditvi v prejšnjem razdelku linearno neodvisni.

DEFINICIJA. Naj bo A kvadratna matrika reda n z realnimi koeficienti in λ realno število. Od 0 različen stolpec x dolžine n, ki zadošča matrični enačbi

$$Ax = \lambda x,$$

imenujemo *lastni vektor* matrike A, število λ, pri katerem obstaja vsaj en lastni vektor (se pravi, vsaj ena netrivialna rešitev zgornje matrične enačbe), pa *lastna vrednost* matrike A.

Rečemo, da lastni vektor x pripada lastni vrednosti λ. Če obstaja en lastni vektor x, jih je v resnici neskončno mnogo, vsak mnogokratnik kx je tudi lastni vektor (za isto lastno vrednost λ).

Lastni vektorji so torej netrivialne rešitve enačbe $Ax - \lambda x = 0$, ki predstavlja homogen sistem linearnih enačb z osnovno matriko $\lambda I - A$. Le-ta je, kot vemo, netrivialno rešljiv natanko takrat, ko je $\det(\lambda I - A) = 0$.

DEFINICIJA. Matrika

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & ... & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & ... & -a_{2n} \\ . & . & ... & . \\ -a_{n1} & -a_{n2} & ... & \lambda - a_{nn} \end{bmatrix}$$

se imenuje *karakteristična matrika*, njena determinanta $\det(\lambda I - A)$ pa *karakteristični polinom* matrike A. Ta polinom je stopnje n, kolikor je red matrike A.

OPOMBA. Lastne vrednosti so torej ničle karakterističnega polinoma. Ta polinoma ima realne koeficiente (če so realni koeficienti matrike A), lahko pa se zgodi, da nima nobene (realne) ničle in matrika zato nobene (realne) lastne vrednosti.

ZGLED. $A = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$.

V kompleksnem ničle polinoma z realnimi (ali kompleksnimi) koeficienti vedno obstajajo po osnovnem izreku algebre. Torej vedno obstajajo tudi (kompleksne) lastne vrednosti matrike A.

ZGLED. $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$.

Determinanta karakteristične matrike oziroma karakteristični polinom je v tem primeru $\lambda^2 - 3\lambda - 4$ z ničlami $\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = -1$. Lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti $\lambda = 4$, je npr. $(1, 1)^\top$ (in večkratniki), lastni vektor za $\lambda = -1$ pa npr. $(2, -3)^\top$ z večkratniki.

IZREK. *Kvadratna matrika A reda n se da diagonalizirati natanko takrat, ko ima natanko n linearno neodvisnih lastnih vektorjev.*

Dokaz. Predno smo definirali lastne vrednosti in lastne vektorje smo že spoznali tole. Če se matrika A da diagonalizirati, $A = SDS^{-1}$, $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$, so stolpci matrike S lastni vektorji, pripadajoči lastnim vrednostim $\lambda_1,\ \lambda_2,\ ...,\ \lambda_n$. Teh vektorjev je n in so zaradi obrnljivosti matrike S linearno neodvisni.

Obratno: Iz n linearno neodvisnih lastnih vektorjev $s_1, s_2, ..., s_n$ sestavimo obrnljivo matriko S. Pri tem velja $AS = SD$, kar pomeni, da je $A = SDS^{-1}$ in matrika A je podobna diagonalni matriki D.

ZGLED. 1. $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 4 & -5 & 3 \\ 4 & -4 & 2 \end{bmatrix}$.

Karakteristični polinom je $\det(\lambda I - A) = \lambda^3 + \lambda^2 - 4\lambda - 4$, lastne vrednosti 2,-1,-2, pripadajoči lastni vektorji (po vrsti) $(1,1,1)^\top$, $(1,1,0)^\top$, $(0,1,1)^\top$. Matrika se torej da diagonalizirati: $A = SDS^{-1}$, kjer je

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Tu je $\det(\lambda I - A) = \lambda^3 - \lambda^2 - 5\lambda - 3$, lastne vrednosti $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$, pripadajoči lastni vektor za $\lambda = 3$ je $(2,1,2)^\top$, za $\lambda = -1$ pa $(2,-1,-2)^\top$. Tretjega linearno neodvisnega lastnega vektorja ni, zato se matrika A v tem primeru ne da diagonalizirati.

TRDITEV. *Različnim lastnim vrednostim matrike A pripadajo linearno neodvisni lastni vektorji.*

Dokaz. Dokaz poteka z indukcijo na število različnih lastnih vrednosti matrike A. Naj bodo $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k, ...$ različne lastne vrednosti matrike A in $x_1, x_2, ..., x_k, ...$ (poljubno izbrani) pripadajoči lastni vektorji. Pokazali bomo, da je za vsak k lastni vektor x_k, ki pripada lastni vrednosti λ_k, linearno neodvisen od vseh prejšnih lastnih vektorjev $x_1, x_2, ..., x_{k-1}$ (ki so med seboj že linearno neodvisni). Denimo, da je $x_k = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_{k-1} x_{k-1}$, kjer so $\alpha_i \in \mathbb{C}$. Potem je $\alpha_1 \lambda_k x_1 + \alpha_2 \lambda_k x_2 + ... + \alpha_{k-1} \lambda_k x_{k-1} = \lambda_k x_k = Ax_k = \alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2 + ... + \alpha_{k-1} A x_{k-1} = \alpha_1 \lambda_1 x_1 + \alpha_2 \lambda_2 x_2 + ... + \alpha_{k-1} \lambda_{k-1} x_{k-1}$, oziroma $\alpha_1(\lambda_k - \lambda_1)x_1 + \alpha_k(\lambda_k - \lambda_2)x_2 + ... + \alpha_{k-1}(\lambda_k - \lambda_{k-1})x_{k-1} = 0$. Ker so po predpostavki vektorji $x_1, x_2, ..., x_{k-1}$ linearno neodvisni, bi morali biti vsi koeficienti enaki nič, kar pa je nemogoče, saj je $\lambda_k \neq \lambda_i$ za vsak $i = 1, 2, ..., k-1$ in niso vsi $\alpha_i = 0$, sicer bi bil $x_k = 0$. To ne gre, saj je tudi x_k lastni vektor matrike A in zato po definiciji različen od 0.

OPOMBA. Če ima torej matrika A reda n same različne lastne vrednosti, so pripadajoči lastni vektorji med seboj linearno neodvisni in vsak izmed njih razpenja enorazsežni podprostor (poleg njega so lastni vektorji še vsi njegovi večkratniki). Matrika se v tem primeru da diagonalizirati. Če pa je kakšna od lastnih vrednosti večkratna, ji lahko pripada eden ali več linearno neodvisnih lastnih vektorjev (največ toliko, kakršna je njena večkratnost). Drugi lastni vektorji so od teh linearno neodvisni. Matrika se da diagonalizirati, če pri vsaki lastni vrednosti dobimo toliko linearno neodvisnih lastnih vektorjev, kolikor znaša njena večkratnost, kajti samo v tem primeru so pogoji izreka izpolnjeni.

III. ZAPOREDJA IN VRSTE

1. Urejenost in polnost sistema realnih števil

V razdelku o algebraičnih strukturah smo spoznali, da tvorijo realna števila netrivialen komutativen obseg za seštevanje in množenje. Seznanili smo se z naslednjimi desetimi aksiomi, ki uravnavajo obe algebraični operaciji:

1. $a + b = b + a$
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$
3. $a + 0 = a$
4. $a + (-a) = 0$
5. $ab = ba$
6. $(ab)c = a(bc)$
7. $a1 = a$
8. $aa^{-1} = 1$ za $a \neq 0$
9. $(a + b)c = ac + bc$
10. $0 \neq 1$

Tem desetim aksiomom moramo dodati še dva aksioma o urejenosti in en aksiom o polnosti, če hočemo, da je sistem realnih števil z aksiomi natanko določen.

Obstaja podmnožica P (pozitivnih števil) v $\mathbb{R}$ z lastnostjo:

11. Iz $a \neq 0$ sledi $a \in P$ ali $-a \in P$.
12. Za vsak $a, b \in P$ je tudi $a + b \in P$ ter $ab \in P$.

Elementi v P so *pozitivna* realna števila. *Negativna* števila so nasprotna pozitivnim in sestavljajo podmnožico $-P = \{-x, x \in P\}$. Enajsti aksiom je t.i. *aksiom o trihotomiji*; v bistvu pove, da je vsako realno število bodisi pozitivno, bodisi negativno bodisi enako 0.
Dvanajsti aksiom pa pravi, da je množica P pozitivnih števil zaprta za seštevanje in množenje: ko izvajamo operaciji seštevanje in množenje z elementi množice P je rezultat spet v množici P.

Podmnožica P določa urejenost v $\mathbb{R}$. Z njo namreč lahko definiramo relacijo $>$ (*večji*) s predpisom $a > b \iff a - b \in P$ in relacijo $<$ (*manjši*) s predpisom $a < b \iff b > a$. Torej lahko zapišemo $P = \{x, x > 0\}$ in $-P = \{x, x < 0\}$. Zaradi aksiomov 11. in 12. veljajo za uvedeni relaciji naslednje lastnosti:

(i) Za poljubni realni števili a in b je bodisi $a < b$, bodisi $a > b$ bodisi $a = b$ (trihotomija).

Res, razlika $a - b$, če ni enaka 0, je po aksiomu 11 bodisi v P bodisi v $-P$.

(ii) Iz $a > b$ sledi $a + c > b + c$ za vsak $c \in \mathbb{R}$.

Če je $a - b \in P$, je zaradi distributivnosti namreč tudi $(a + c) - (b + c) = a - b \in P$.

(iii) Iz $a > b$ sledi $ac > bc$ pri $c > 0$ in $ac < bc$ pri $c < 0$.

Zdaj iz $a - b \in P$ in $c \in P$ sledi po aksiomu 12 tudi $(a - b)c \in P$, se pravi $ac - bc \in P$ oziroma $ac > bc$. Če pa je $c < 0$, tj. $-c \in P$, dobimo $-(ac - bc) = a(-c) - b(-c) \in P$, torej $ac < bc$.

Drugi del točke (iii) izraža znano dejstvo, da se pri množenju z negativnim številom neenačaj obrne.

Relacijo $\leq$ (*manjši ali enak*) vpeljemo s predpisom $a \leq b \iff a < b$ ali $a = b$, relacijo $\geq$ (*večji ali enak*) pa s predpisom $a \geq b \iff a > b$ ali $a = b$.

Z uporabo pravkar definiranih neenakosti lahko definiramo različne podmnožice v $\mathbb{R}$.

DEFINICIJA. *Intervali* so:
1. $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$ (odprti interval),
2. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$ (zaprti interval),
3. $[a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$ (navzgor odprti interval),
4. $(a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$ (navzdol odprti interval),

poltraki so:
1. $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}; x > a\}$ (odprti desni poltrak),
2. $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}; x \geq a\}$ (zaprti desni poltrak),
3. $(\infty, b) = \{x \in \mathbb{R}; x < b\}$ (odprti levi poltrak),
4. $(\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}; x \leq b\}$ (zaprti levi poltrak).

Pravimo, da so intervali omejene množice, poltraki pa ne. Natančneje definiramo pojem omejenosti na naslednji način.

DEFINICIJA. Podmnožica $A \subset \mathbb{R}$ je *navzgor omejena*, če obstaja tako število $M \in \mathbb{R}$, da velja $x \leq M$ za vsak $x \in A$. Število M imenujemo *zgornja meja* množice A.

Navzgor omejene podmnožice so npr. vsi intervali in levi poltraki, desni poltraki in množica $\mathbb{R}$ vseh realnih števil pa niso navzgor omejene množice.

DEFINICIJA. Podmnožica $A \subset \mathbb{R}$ je *navzdol omejena*, če obstaja tako število $m \in \mathbb{R}$, da velja $x \geq m$ za vsak $x \in A$. Število m imenujemo *spodnja meja* množice A.

Navzdol omejene podmnožice so npr. vsi intervali in desni poltraki, prav tako npr. množica vseh naravnih števil $\mathbb{N}$, niso pa navzdol omejeni levi poltraki.

DEFINICIJA. Podmnožica $A \subset \mathbb{R}$ je *omejena*, če je omejena navzgor in navzdol, se pravi, če obstajata taki števili $m, M \in \mathbb{R}$, $(m \leq M)$, da velja $m \leq x \leq M$ za vsak $x \in A$.

V tem primeru je podmnožica A vsebovana v nekem intervalu $[m, M]$. Prazno množico imamo vedno za omejeno. Če obstaja vsaj ena zgornja meja za dano podmnožico, je zgornjih mej neskončno mnogo (vsako večje število je tudi zgornja meja). Podobno je množica spodnjih mej neskončna, če le ni prazna (vsako manjše število je tudi spodnja meja). Za neprazno množico A je množica njenih zgornjih mej vedno navzdol omejena (npr. s poljubnim elementom množice A), množica spodnjih mej pa navzgor omejena (z elementom iz A).

DEFINICIJA. *Supremum* $\sup A$ dane množice A je najmanjša zgornja meja množice A, *infimum* $\inf A$ množice A pa je največja spodnja meja množice A.

Definicijo infimuma in supremuma lahko povemo tudi takole, bolj formalno:

(i) Realno število a je največja spodnja meja množice A, torej $a = \inf A$, natanko takrat, ko je $a \leq x$ za vsak $x \in A$ in za vsak $c > a$ obstaja tak element $x \in A$, da je $x < c$. Se pravi, a je spodnja meja za množico A, nobeno število $c > a$ pa ni več spodnja meja za A.

(ii) Realno število b je najmanjša zgornja meja množice A, torej $b = \sup A$, natanko takrat, ko je $x \leq b$ za vsak $x \in A$ in za vsak $c < b$ obstaja tak element $x \in A$, da je $x > c$. Se pravi, b je zgornja meja za množico A, nobeno število $c < b$ pa ni več zgornja meja za A.

Največji spodnji (najmanjši zgornji) meji rečemo tudi natančna spodnja (zgornja) meja.

Sedaj lahko definiramo še zadnji, 13. aksiom za realna števila. To je t.i. **Dedekindov aksiom** ali **aksiom o polnosti**.

Vsaka neprazna navzgor omejena podmnožica realnih števil ima najmanjšo zgornjo mejo.

Dualna oblika aksioma se glasi: *Vsaka neprazna navzdol omejena podmnožica realnih števil ima največjo spodnjo mejo.* To je v resnici posledica 13. aksioma. Če namreč množico A zamenjamo z množico $-A$ vseh njenih nasprotnih elementov, se tako kot neenakosti zamenjajo zgornje meje s spodnjimi in supremum z infimom: $\inf A = -\sup(-A)$.

Večkrat bomo potrebovali eksistenco supremuma ali infimuma nekaterih nepraznih (navzgor ali navzdol) omejenih množic realnih števil. Eksistenca je zagotovljena ravno s tem aksiomom. Kot zgled uporabe dokažimo naslednji trditvi.

TRDITEV 1. *Množica vseh naravnih števil* $\mathbb{N}$ *ni navzgor omejena.*

Dokaz. Denimo, da bi obstajala kakšna zgornja meja za $\mathbb{N}$. Tedaj bi po Dedekindovem aksiomu obstajala najmanjša zgornja meja M. Torej bi veljalo $n \leq M$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, ne pa $n \leq M - 1$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Toda potem bi lahko našli število $n \in \mathbb{N}$ z lastnostjo $n > M - 1$ oz $n + 1 > M$. Ker pa je naslednik $n + 1$ po Peanovem aksiomu tudi naravno število, je to v nasprotju z dejstvom, da je M zgornja meja za $\mathbb{N}$.

Ker množica naravnih števil $\mathbb{N}$ ni navzgor omejena, pri poljubnem realnem številu $a > 0$ tudi množica $\{na; n \in \mathbb{N}\}$ ni navzgor omejena (nima zgornje meje). Iz $na \leq M$ za neko število $M \in \mathbb{R}$ in vsak $n \in \mathbb{N}$ bi namreč sledilo $n \leq M/a$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, kar ni mogoče. Torej velja naslednji izrek:

IZREK. *Naj bo* $a > 0$. *Za vsak* $b \in \mathbb{R}$ *obstaja tako naravno število* $n \in \mathbb{N}$, *da velja* $na > b$.

To je t.i. *Arhimedova lastnost* realnih števil. Po domače pomeni: "iz malega raste veliko". Velikokrat bomo v nadaljevanju uporabljali tole njeno posledico: *Za vsak* $a > 0$ *obstaja* $n \in \mathbb{N}$ *z lastnostjo* $1/n < a$.

TRDITEV 2. *Med poljubnima realnima številoma* $a < b$ *obstaja vsaj eno racionalno število.*

Dokaz. Dovolj je, če trditev dokažemo za pozitivni števili. Če sta obe negativni, si ogledamo njuni nasprotni števili $-b < -a$, ki sta pozitivni. Če je eno od njiju enako 0, uporabimo posledico Arhimedove lastnosti. Če pa je $a < 0$ in $b > 0$, je med njima racionalno število 0.

Denimo torej, da sta števili a in b pozitivni. Izberimo tako velik n, da je $1/n < b - a$ (Arhimedova lastnost). Množica $\{p \in \mathbb{N};\ p(1/n) > a\}$ je zaradi arhimedove lastnosti neprazna in kot podmnožica naravnih števil navzdol omejena, zato ima infimum m, ki je nujno naravno število in tudi nujno pripada tej isti množici. Torej velja $m/n = m(1/n) > a$, ne pa $(m-1)/n = (m-1)(1/n) > a$. Če bi bilo $m/n \geq b$, bi imeli $1/n = m/n - (m-1)/n \geq b - a$, kar pa ni res. Torej je $a < m/n < b$.

ZGLEDI. (a) Decimalni zapis realnih števil. Pozitivno realno število x je supremum množice spodnjih decimalnih približkov $\{x_0, x_0.x_1, x_0.x_1x_2, ...\}$, saj je le-ta neprazna in navzgor omejena s številom $x_0 + 1$, ali infimum množice zgornjih decimalnih približkov, ki je navzdol omejena z x_0.

(b) Kvadratni koren pozitivnega števila je po definiciji tako pozitivno realno število, katerega kvadrat je dano število. Njegova eksistenca je v okviru realnih števil zagotavljena ravno z Dedekindovim aksiomom. Naj omenimo, da v obsegu racionalnih števil $\mathbb{Q}$ Dedekindov aksiom ne velja, zato nimamo vedno racionalnih kvadratnih korenov iz racionalnih števil.

Za zgled si oglejmo kvadratni koren iz 2, ki (kot vemo iz 1. poglavja) ni racionalno število. Množica racionalnih števil $\{x \in \mathbb{Q}; x > 0,\ x^2 < 2\}$ je neprazna in navzgor omejena, zato ima po Dedekindovem aksiomu supremum a, ki je enak $\sqrt{2}$. Iz $a^2 < 2$ bi namreč sledilo $(a+1/n)^2 < 2$ za dovolj velik n (tak da je hkrati $1/n < a$ in $1/n < (2-a^2)/3a$; tedaj je namreč $2a/n+1/n^2 < 3a/n < 2-a^2$), med a in $a+1/n$ pa obstaja po trditvi 2 racionalno število x, za katerega bi torej tudi veljalo $x^2 < 2$. Podobno bi videli, da $a^2 > 2$ prav tako ne more veljati. Ker $\sqrt{2}$ ni racionalno število, dana množica v $\mathbb{Q}$ nima najmanjše zgornje meje.

2. Zaporedja realnih števil

Definicija in podanost zaporedja

Eden najpomembnejših pojmov v matematiki je pojem neskončnega zaporedja. Opazujemo neskončno mnogo realnih števil, ki so urejena po vrsti, tako da lahko vedno povemo, katero je prvo, drugo, itd.

Formalno gledano je zaporedje realnih števil preslikava $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Sliko števila n označimo z x_n, torej $x_n = f(n)$, in jo imenujemo n-ti člen zaporedja. Indeks n pove, na katerem mestu v zaporedju stoji člen x_n. Včasih teče indeks n od 0 naprej. Zaporedje bomo zapisali $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ali skrajšano (x_n). Zalogo vrednosti preslikave f imenujemo sedaj *zaloga vrednosti zaporedja*: $\{x_n, ; n \in \mathbb{N}\}$, zožitev preslikave f na neko neskončno podmnožico naravnih števil $\{n_1, n_2, ...\}$, kjer je $n_1 < n_2 < ...$, pa imenujemo podzaporedje (x_{n_k}), njegova zaloga pa je torej $\{x_{n_k}; k \in \mathbb{N}\}$. Zapomnimo si, da ima v skladu z definicijo zaporedje vedno neskončno mnogo členov, čeprav je njegova zaloga vrednosti lahko končna ali celo sestavljena samo iz enega števila (tako zaporedje imenujemo *konstantno*).

ZGLEDI. Oglejmo si naslednja zaporedja $x_n = n,\ x_n = 1/n,\ x_n = 2^n,\ x_n = (-1)^n$. Prvo je zaporedje vseh naravnih števil, njegova zaloga vrednosti je $\mathbb{N}$, drugo pa je zaporedje recipročnih vrednosti naravnih števil. Tretji zgled pomeni zaporedje vseh potenc števila 2 (tu lahko teče n od 0 naprej). To je podzaporedje prvega zaporedja. Četrti zgled je zaporedje enk (pri sodih indeksih) in minus enk (pri lihih indeksih). Zaloga vrednosti je končna množica z dvema elementoma $\{1, -1\}$.

DEFINICIJA. Zaporedje realnih števil je (*navzgor*, *navzdol*) *omejeno*, če je (navzgor, navzdol) omejena njegova zaloga vrednosti, torej če obstajata konstanti M in m, da je $m \le x_n \le M$ za vsak $n \in N$ (oziroma le $x_n \le M$ ali $m \le x_n$).

DEFINICIJA. Zaporedje realnih števil je *naraščajoče* (*padajoče*), če velja $x_{n+1} \ge x_n$ ($x_{n+1} \le x_n$) za vsak $n \in \mathbb{N}$.

Definicija je tako široka, da imamo tudi konstantna zaporedja tako za naraščajoča kot za padajoča. Na kratko rečemo, da so taka zaporedja *monotona*. Ugotovite, katera od prej naštetih zaporedij so monotona? Katera pa so (navzgor, navzdol) omejena?

Zaporedje je lahko podano
(a) *eksplicitno*, z navedbo splošnega člena, npr. $x_n = \frac{n}{n+1}$,
(b) *rekurzivno*, z navedbo začetnega člena in rekurzivne formule, npr. $x_0 = 1, x_{n+1} = 2x_n$. To zaporedje je bilo prej podano eksplicitno s splošnim členom $x_n = 2^n$.

ZGLED. (a) *Aritmetično zaporedje* je zaporedje, pri katerem je razlika dveh zaporednih členov konstantna, torej npr. $x_{n+1} - x_n = d$, kjer je d dana konstanta (t.i. diferenca zaporedja). Če je začetni člen x_0, je splošni člen $x_n = x_0 + nd$, vsota vseh členov do n-tega pa $s_n = (n+1)x_0 + dn(n+1)/2 = (n+1)(x_0 + nd/2)$.

(b) *Geometrično zaporedje* je zaporedje od 0 različnih števil, pri katerem je kvocient dveh zaporednih členov konstanten, torej npr. $x_{n+1}/x_n = k$, kjer je k dana konstanta (t.i. kvocient zaporedja). Če je začetni člen x_0, je splošni člen $x_n = x_0 k^n$, vsota vseh členov do n-tega pa $s_n = x_0(1 - k^{n+1})/(1-k)$, če je $k \neq 1$ in $s_n = (n+1)x_0$, če je $k = 1$.

Absolutna vrednost realnega števila in definicija epsilonske okolice

Za podrobnejšo obravnavo vedenja zaporedij potrebujemo pojem razdalje med števili, ki jo uvedemo z uporabo absolutne vrednosti.

DEFINICIJA. *Absolutna vrednost* realnega števila x je nenegativno realno število $|x|$, definirano z

$$|x| = \begin{cases} x\ , & x \geq 0 \\ -x\ , & x < 0 \end{cases}$$

Geometrijsko pomeni $|x|$ razdaljo točke, ki predstavlja realno število x, do točke 0. Izraz $|a-b|$ pa pomeni *razdaljo* med realnima številoma a in b.

Za absolutno vrednost veljajo še naslednje koristne lastnosti, ki jih bomo v nadaljnjem večkrat uporabili:
(i) $|ab| = |a||b|$, posledica $|-a| = |a|$,
(ii) $|a+b| \leq |a| + |b|$,
(iii) $|a-b| \geq ||a| - |b||$.
Prvo lahko preverimo neposredno, glede na to, ali sta števili a in b pozitivni oziroma negativni ali 0. Druga je t.i. *trikotniška neenakost* in je poseben primer trikotniške neenakosti za absolutno vrednost pri kompleksnih številih (ker so tudi realna števila poseben primer kompleksnih). Tudi o njeni veljavnosti se lahko prepričamo, če pregledamo različne možnosti glede predznakov za a in b. Tretja lastnost takoj sledi iz druge, saj je tako $|a| = |(a-b) + b| \leq |a-b| + |b|$ kot $|b| = |(b-a) + a| \leq |b-a| + |a|$.

Zdaj pa definirajmo t.i. *epsilonsko okolico* točke $a \in \mathbb{R}$:

$$V_\epsilon(a) = \{x \in \mathbb{R}; |x-a| < \epsilon\}.$$

Z upoštevanjem definicije absolutne vrednosti lahko zapišemo $V_\epsilon(a) = \{x \in \mathbb{R}; a - \epsilon < x < a + \epsilon\}$. Taka okolica je torej odprt interval na realni osi s središčem v a in polmerom $\epsilon > 0$. Za vsak člen zaporedja lahko vedno ugotovimo, ali spada v okolico ali ne.

ZGLED. Kateri členi zaporedja $x_n = n/(n+1)$ ležijo v okolicah $V_{1/2}(0)$, $V_{1/2}(1)$, $V_\epsilon(1)$? V okolici $V_{1/2}(0)$ ležijo členi x_n z lastnostjo $n/(n+1) < 1/2$ oziroma $n < 1$, torej le člen x_0, če teče indeks n od 0 naprej. V okolici $V_{1/2}(1)$ so členi x_n z lastnostjo $|n/(n+1) - 1| < 1/2$ oziroma $n > 1$, torej vsi razen prvega. V okolici $V_\epsilon(1)$ pa so členi x_n z lastnostjo $|n/(n+1) - 1| < \epsilon$ oziroma $n + 1 > 1/\epsilon$, torej neskončno mnogo členov oziroma vsi členi z dovolj velikim indeksom.

Stekališče in limita

Najpomembnejše pri neskončnih zaporedjih je vprašanje, ali se členi zaporedja približujejo kakšni vrednosti ali ne. Govorimo o konvergenci zaporedja, za njeno natančno definicijo pa potrebujemo še dva pojma.

DEFINICIJA. Točka $a \in \mathbb{R}$ je *stekališče* zaporedja (x_n), če je za vsak $\epsilon > 0$ v okolici $V_\epsilon(a)$ neskončno mnogo členov zaporedja (x_n).

ZGLED. Kaj so stekališča naslednjih zaporedij: (a) $x_n = n$, (b) $x_n = n/(n+1)$, (c) $x_n = 1/n$, (d) $x_n = (-1)^n$? Prvo zaporedje nima stekališč, drugo ima eno samo stekališče, točko 1, tretje tudi eno stekališče, točko 0, zadnje pa ima dve stekališči, 1 in -1.

DEFINICIJA. Točka $a \in \mathbb{R}$ je *limita* zaporedja (x_n), če je za vsak $\epsilon > 0$ zunaj okolice $V_\epsilon(a)$ le končno mnogo členov členov zaporedja (x_n) .

Ekvivalentno bi lahko rekli, da so od nekega člena dalje **vsi** členi zaporedja v $V_\epsilon(a)$, ali bolj formalno: Za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da iz $n \geq n_0$ sledi $|x_n - a| < \epsilon$. Dejstvo, da je a limita zaporedja (x_n), zapišemo

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n \text{ ali } x_n \to a \ (n \to \infty).$$

Vsaka limita je tudi stekališče (če je zunaj epsilonske okolice samo končno mnogo členov, jih mora biti neskončno v sami okolici). Obratno ni res, kot pove npr. zadnji zgled z dvema stekališčema. Limita je lahko le ena sama (različni limiti a in b bi imeli pri dovolj majhnem $\epsilon > 0$ disjunktni okolici $V_\epsilon(a)$ in $V_\epsilon(b)$, vsi členi od nekega indeksa dalje pa ne morejo biti hkrati v $V_\epsilon(a)$ in v $V_\epsilon(b)$).

ZGLED. Zaporedje $x_n = 1/n$ ima limito 0, ker je pri poljubnem $\epsilon > 0$ (po Arhimedu) $1/n < \epsilon$ za vsak dovolj velik n. Zaporedje $x_n = n/(n+1)$ ima limito 1, zaporedje $x_n = (-1)^n n/(n+1)$ pa le dve stekališči, -1 in 1.

Brez podrobnejših dokazov, od katerih so nekateri malce bolj zahtevni, naštejmo nekaj osnovnih lastnosti zaporedij, ki so v zvezi s konvergenco in jih pogosto uporabljamo.

DEFINICIJA. Če limita obstaja, rečemo, da je zaporedje *konvergentno* oziroma, da konvergira proti svoji limiti.

Limita je edino stekališče konvergentnega zaporedja (to dokažemo na enak način kot dejstvo, da zaporedje ne more imeti dveh različnih limit). Vsako konvergentno zaporedje je omejeno, sicer bi zunaj vsake epsilonske okolice limite obstajalo neskončno mnogo členov.

DEFINICIJA. Če limita ne obstaja, pravimo, da je zaporedje *divergentno.*

Divergentno zaporedje ima lahko več stekališč (npr. zaporedje $x_n = (-1)^n$) ali pa nobenega (npr. zaporedje $x_n = n$).

TRDITEV 1. *Vsako podzaporedje konvergentnega zaporedja je konvergentno.*

To je precej očitno: če so od nekega indeksa dalje vsi členi celotnega zaporedja v epsilonski okolici limite, velja isto za vsako podzaporedje.

Npr. podzaporedja $y_n = x_{2n},\ y_n = x_{2n+1},\ y_n = x_{n+k}$) konvergirajo proti isti limiti kot zaporedje x_n.

TRDITEV 2. *Če je a stekališče zaporedja, obstaja podzaporedje, ki konvergira k a.*

Iz zaporedja izbiramo samo člene, ki so blizu stekališča a.

Zgled: Zaporedje $x_n = (-1)^n n/(n+1)$ ima dve stekališči, 1 in -1. Podzaporedje sodih členov $y_n = x_{2n}$ pa konvergira k limiti 1.

TRDITEV 3. *Vsako omejeno zaporedje ima vsaj eno stekališče.*

Dokaz poteka z razpolovitvijo intervala, na katerem ležijo vsi členi zaporedja. Vsaj na eni polovici leži neskončno členov zaporedja, zato v naslednjem koraku razpolovimo ta podinterval, itd. Ideja je, da krajišča izbranih podintervalov določajo z uporabo aksioma o polnosti realno število a, ki je stekališče celotnega zaporedja. Npr. a je supremum množice vseh levih krajišč tako dobljenih podintervalov.

TRDITEV 4. *Če ima omejeno zaporedje eno samo stekališče, je konvergentno.*

Dokaz. Zunaj epsilonske okolice edinega stekališča ima lahko omejeno zaporedje samo končno mnogo členov.

Brez pogoja omejenosti to ni res, zgled je npr. divergentno zaporedje $x_n = n^{(-1)^n}$ z edinim stekališčem 0.

DEFINICIJA (Cauchyjev pogoj). Zaporedje (x_n) je *Cauchyjevo*, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da iz $m, n \geq n_0$ sledi $|x_m - x_n| < \epsilon$.

TRDITEV 5. *Vsako Cauchyjevo zaporedje je omejeno in ima kvečjemu eno stekališče.*

Dokaz. Sicer bi lahko našli neskončno mnogo členov, ki so zaporedoma drug od drugega oddaljeni pri neomejenem zaporedju vsaj za 1, pri zaporedju z več stekališči pa vsaj za nek $\delta > 0$.

TRDITEV 6. *Cauchyjev pogoj je potreben in zadosten za konvergenco zaporedja.*

Dokaz. Potrebnost dokažemo takoj, saj za limito a pri pogoju $|x_n - a| < \epsilon/2$ za $n \geq n_0$ velja $|x_m - x_n| \leq |x_m - a| + |a - x_n| < \epsilon$, če je $m, n \geq n_0$. Za zadostnost upoštevamo, da je po trditvi 5 Cauchyjevo zaporedje omejeno in ima samo eno stekališče. Tako zaporedje pa je po trditvi 4 konvergentno.

Konvergenca realnega zaporedja

TRDITEV 7. $a = \lim_{n\to\infty} x_n$ *velja natanko takrat, ko je* $\lim_{n\to\infty} |x_n - a| = 0$.

Dokaz. Relacija $|x_n - a| < \epsilon$ velja natanko takrat, ko je $x_n \in V_\epsilon(a)$, oziroma natanko takrat, ko je $|x_n - a| \in V_\epsilon(0)$.

TRDITEV 8. *Naj bo $a_n, b_n > 0$ za vsak n in $c > 0$. Če velja $a_n \to 0$, $b_n \to 0$ $(n \to \infty)$, velja tudi $a_n + b_n \to 0$ in $ca_n \to 0$ $(n \to \infty)$.*

Dokaz. Za vsak $\epsilon > 0$ obstaja n_0, tako da za $n \geq n_0$ velja tako $a_n < \epsilon/2$ kot $b_n < \epsilon/2$. Potem velja za $n \geq n_0$ tudi $a_n + b_n < \epsilon$. Podobno je $ca_n < \epsilon$, če je $a_n < \epsilon/c$ za $n \geq n_0$.

Primerjanje realnih zaporedij

IZREK (o primerjanju zaporedij).
(a) *Če sta zaporedji* (x_n) *in* (y_n) *konvergentni in za vsak* n *velja* $x_n \leq y_n$, *velja tudi* $\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n$.
(b) *Če sta zaporedji* (x_n) *in* (y_n) *konvergentni, imata isto limito, in za vsak* n *velja* $x_n \leq z_n \leq y_n$, *je tudi zaporedje* (z_n) *konvergentno in velja* $\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$.

Dokaz. Dokaz točke (a) je preprost, s protislovjem. Če bi bilo $b < a$, kjer sta a in b limiti zaporedij x_n oziroma y_n, bi za dovolj velik n veljalo $|x_n - a| < (a-b)/3$ in $|y_n - b| < (a-b)/3$, torej $y_n < x_n$, kar ni mogoče.
Za točko (b) upoštevajmo, da je za vsak $\epsilon > 0$ pri dovolj velikem n res $z_n - a \leq y_n - a < \epsilon$ in $a - z_n \leq a - x_n < \epsilon$, torej tudi $|z_n - a| < \epsilon$. (Z a smo označili skupno limito zaporedij x_n in y_n.)

ZGLED. 1. Od prej vemo, da je $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$. Ker je $0 < 1/(2n+1) < 1/n$ za vsak n, je $\lim 1/(2n+1) = 0$. Podobno bi videli, da je $\lim 1/(1+bn) = 0$ za poljuben $b > 0$. Prav tako je zaradi ocene $1 < \sqrt{1+1/n} < 1 + 1/n$ res $\lim \sqrt{1+1/n} = 1$.
2. Zaradi neenakosti $0 \leq ||x_n| - |x|| \leq |x_n - x|$ iz konvergence $x_n \to x$ sledi tudi konvergenca $|x_n| \to |x|$.
3. Za geometrijsko zaporedje $x_n = a^n$ pri $|a| < 1$ velja $0 < |a|^n < 1/(1+nb)$, kjer je $b = 1/|a| - 1 > 0$. Torej za $|a| < 1$ velja $\lim |a|^n = 0$. Pri $a = 1$ zaporedje konvergira k 1 (je konstantno), pri $a = -1$ nikamor ne konvergira (oscilira), pri $|a| > 1$ pa neomejeno divergira.

Računanje limit

1. Vsota in produkt. Če sta zaporedji (x_n) in (y_n) konvergentni, sta konvergentni tudi zaporedji $(x_n + y_n)$ in $(x_n y_n)$ ter velja $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n$ in $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n$.

Oboje dokažemo s trikotniško neenakostjo, pri produktu še upoštevamo, da je vsako konvergentno zaporedje omejeno. Če je $a = \lim x_n$, $b = \lim y_n$ in $|x_n| \leq M$ za vsak n, imamo $|(x_n + y_n) - (a+b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b|$ in za dovolj velik n je desna stran poljubno majhna. Podobno je $|x_n y_n - ab| = |(x_n - a)y_n + a(y_n - b)| \leq M|x_n - a| + |a||y_n - b|$ in desna stran poljubno majhna pri velikem n.

Tudi limita razlike je enaka razliki limit.

2. **Inverz in kvocient**. Če je zaporedje (y_n) z od 0 različnimi členi konvergentno in je $\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0$, je konvergentno tudi zaporedje $(1/y_n)$ in velja $\lim_{n\to\infty}(1/y_n) = 1/\lim_{n\to\infty} y_n$. Če sta zaporedji (x_n) in (y_n) konvergentni in je $\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0$, je konvergentno tudi zaporedje x_n/y_n in velja $\lim_{n\to\infty} x_n/y_n = \lim_{n\to\infty} x_n / \lim_{n\to\infty} y_n$.

Spet naj bo $a = \lim x_n$ in $b = \lim y_n$, poleg tega pa še $|y_n| \geq m > 0$ za vsak n. Tedaj je $|1/y_n - 1/b| = |b - y_n|/|y_n b| \leq |b - y_n|/(m|b|)$ in desna stran poljubno majhna, če je n dovolj velik. Za dokaz drugega dela upoštevamo točko 1 v zvezi s produktom.

ZGLED. Izračunajmo limiti: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-n+1}{n^2+2}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}+1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{n}}$. Pri prvi limiti vsak člen v števcu in imenovalcu ulomka delimo z n^2 in z upoštevanjem zgornjih pravil dobimo limito 2. Pri drugi števec in imenovalec najprej delimo s $\sqrt{n}$. Limita je $2/(\sqrt{2}+1)$.

Monotona zaporedja

IZREK (o monotonih zaporedjih).
(a) *Vsako naraščajoče navzgor omejeno zaporedje je konvergentno z limito enako* $\sup\{x_n\}$.
(b) *Vsako padajoče navdol omejeno zaporedje je konvergentno z limito enako* $\inf\{x_n\}$.

Dokaz. Je geometrijsko precej nazoren, saj v okolici supremuma s leže vsi členi, razen končno mnogo. Za vsak $\epsilon > 0$ namreč obstaja člen x_m, za katerega velja $s - \epsilon < x_m \leq s$. Potem pa isti neenakosti zadoščajo tudi vsi nadaljnji členi. Točko (b) dokažemo podobno.

ZGLED. 1. Pokažimo, da je zaporedje, podano rekurzivno s predpisom $x_0 = 1$ in $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + 1$, konvergentno in $\lim x_n = 2$. Najprej se z matematično indukcijo prepričamo, da je zgornja meja zaporedja res enaka 2. Za člen x_0 je to res; če velja za x_n, velja potem tudi za $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + 1 < \frac{1}{2}\cdot 2 + 1 = 2$. Ker je razlika zaporednih členov $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}x_n + 1 - x_n = \frac{1}{2}(2 - x_n) > 0$, je zaporedje tudi naraščajoče. Prejšnji izrek pove, da je konvergentno. Limito označimo z x. Določimo jo tako, da na obeh straneh rekurzivne formule izračunamo limito. Dobimo $x = \frac{1}{2}x + 1$ oziroma $x = 2$.

2. Z indukcijo lahko dokažemo, da za vsak $n \geq 2$ velja $(1-a)^n > 1 - na$ za $0 < a < 1$. Ker je tedaj tudi $(1-a)^{-n} > (1+a)^n > 1 + na$, velja še $(1-a)^{-n} > 1 + na$. Vstavimo $a = 1/n^2$ v obe neenakosti. Dobimo naslednje:
(i) Zaporedje $a_n = (1 + 1/n)^n$ je naraščajoče (iz $(1-a)^n > 1 - na$), zaporedje $b_n = (1 - 1/n)^{-n}$ padajoče (iz $(1-a)^{-n} > 1 + na$).
(ii) Med njima je zveza $b_{n+1} = a_n(1 + 1/n) > a_n$ in $a_n < a_{n+m} < b_{n+m+1} < b_m$.
(iii) Zaporedje a_n je navzgor, zaporedje b_n pa navzdol omejeno in obe zaporedji imata isto limito e = 2,71828...

3. Vrste in njihova konvergenca

Poleg zaporedij realnih števil lahko o konvergenci govorimo tudi pri številskih vrstah. *Vrsta* je formalna vsota $a_1 + a_2 + ...$ neskončno mnogo realnih števil.

Definicija in konvergenca številske vrste

Z namenom, da bi sešteli neskončno mnogo členov danega zaporedja, se pravi vrsto $a_1 + a_2 + ...$, tvorimo zaporedje delnih vsot te vrste: $s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$.

DEFINICIJA. Pravimo, da vrsta $a_1 + a_2 + ...$ *konvergira* in ima *vsoto* s, če konvergira zaporedje delnih vsot s_n in velja $s = \lim_{n\to\infty} s_n$.

ZGLED 1. Vrsta $1 + 1 + 1 + ...$ ne konvergira, saj je $s_n = n$ za vsak n.
2. Vrsta $1/1.2 + 1/2.3 + 1/3.4 + ...$ ima delne vsote enake $s_n = (1 - 1/2) + (1/2 - 1/3) + (1/3 - 1/4) + ... + (1/n - 1/(n+1)) = 1 - 1/(n+1)$, zato konvergira in ima vsoto 1.
3. Geometrijska vrsta $a + ak + ak^2 + ...$ konvergira za $a = 0$ ali $|k| < 1$. V prvem primeru je vsota 0. V drugem primeru pa so delne vsote $s_n = a + ak + ... + ak^{n-1}$ enake $a(1-k^n)/(1-k)$, če $k \neq 1$, in na pri $k = 1$. Kot vemo, pri pogoju $|k| < 1$, delne vsote s_n konvergirajo proti $a/(1-k)$, za druge vrednosti $|k|$ pa ne konvergirajo.

Cauchyjev splošni kriterij za konvergenco zaporedij $|s_m - s_n| \to 0$ $(m, n \to \infty)$ se v primeru vrst vrst glasi $a_{m+1} + a_{m+2} + ... + a_n \to 0$ $(m \to \infty, m < n)$. Natančneje, za vsak $\epsilon > 0$ obstaja n_0, tako da za $n > m \geq n_0$ velja $|a_{m+1} + a_{m+2} + ... + a_n| < \epsilon$. Na drug način to povemo takole: Za vsak $\epsilon > 0$ obstaja n_0, tako da za $n \geq n_0$ in za poljuben $p \in \mathbb{N}$ velja $|a_{n+1} + a_{n+2} + ...a_{n+p}| < \epsilon$.

V posebnem primeru, ko vzamemo $p = 1$, dobimo potreben pogoj za konvergenco: $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$. Videli bomo, da ta pogoj ni tudi zadosten.

ZGLED. 1. Geometrijska vrsta $a + ak + ak^2 + ...$ za $a \neq 0$ in $|k| \geq 1$ ne konvergira, ker potreben pogoj $ak^n \to 0$ $(n \to \infty)$ ni izpolnjen.

2. Za vrsto $1 + 1/2 + 1/3 + ...$ je potreben pogoj $(1/n \to 0)$ izpolnjen, ni pa izpolnjen Cauchyjev pogoj za konvergenco, saj za vsak n velja $1/(n+1)+1/(n+2)+...+1/(2n) > 1/2$, zato vrsta ne konvergira. Ta vrsta se imenuje *harmonična vrsta*.

Vrste s pozitivnimi členi

Imejmo vrsti $a_1 + a_2 + ...$ in $b_1 + b_2 + ...$, pri čemer naj velja $0 < a_n \leq b_n$ za vsak n.

IZREK (o primerjanju). *Če vrsta z večjimi členi (***majoranta***) konvergira, konvergira tudi dana vrsta. Če vrsta z manjšimi členi (***minoranta***) divergira, divergira tudi dana vrsta.*

Dokaz. Ker so členi pozitivni, delne vsote naraščajo, zato je za konvergenco potreben in zadosten pogoj, da so tudi omejene. Če so omejene delne vsote majorantne vrste, velja isto za vrsto z manjšimi členi. Če pa delne vsote minorante niso omejene, tudi za vrsto z večjimi členi to ni res.

ZGLED. 1. Vrsta $1 + 1/2^2 + 1/3^2 + ...$ konvergira, ker ima konvergentno majoranto $1 + 1/1.2 + 1/2.3 + ...$ (glej točko 2 prvega zgleda v tem razdelku).

2. Vrsta $1 + 1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{3} + ...$ divergira, ker ima za minoranto harmonično vrsto $1 + 1/2 + 1/3 + ...$, za katero vemo, da divergira.

IZREK (*kvocientni kriterij*). *Če obstajata $n_0 \in \mathbb{N}$ in pozitivno število $k < 1$, tako da velja $a_{n+1}/a_n \leq k < 1$ za vsak $n \geq n_0$, vrsta konvergira. Če velja $a_{n+1} \geq a_n$ za $n \geq n_0$, vrsta divergira.*

Dokaz. Pri prvem pogoju velja $a_{n_0+1} \leq ka_{n_0}$, $a_{n_0+2} \leq k^2 a_{n_0}$ itd. Primerjava z geometrijsko vrsto pove, da vrsta s členi a_n konvergira. V drugem primeru imamo $a_{n_0+k} \geq a_{n_0}$ za vsak $k = 1, 2, ...$ in zato členi ne konvergirajo k 0, vrsta je divergentna.

V izreku ni dovolj, da velja le $a_{n+1}/a_n < 1$, kot lahko npr. vidimo iz zgleda harmonične vrste, kjer je $a_n = 1/n$ in $a_{n+1}/a_n = n/(n+1) < 1$ za vsak n.

ZGLED. Vrsta $1 + 2x + 3x^2 + ...$ konvergira za $0 < x < 1$ in divergira za $x \geq 1$. Res! Splošni člen vrste je namreč $a_n = nx^{n-1}$, zato je $a_{n+1}/a_n = \frac{n+1}{n}x$, kar konvergira proti x. Če je $x < 1$, lahko vzamemo $k = (x+1)/2$. Za vsak dovolj velik n je $a_{n+1}/a_n \leq k < 1$ in vrsta konvergira. Če pa je $x \geq 1$, členi ne konvergirajo proti 0 in vrsta divergira.

IZREK (*korenski kriterij*). *Če obstaja* $n_0 \in \mathbb{N}$ *in pozitivno število* $k < 1$*, tako da velja* $a_n^{1/n} \leq k < 1$ *za* $n \geq n_0$*, vrsta konvergira. Če velja* $a_n^{1/n} \geq 1$ *za neskončno mnogo členov, vrsta divergira.*

Dokaz. Za $n > n_0$ imamo $a_n \leq k^n$ torej konvergentno vrsto zaradi primerjanja z geometrijsko vrsto. Če pa za neskončno mnogo členov velja $a_n^{1/n} \geq 1$ oziroma $a_n \geq 1$, členi ne konvergirajo k 0 in vrsta zato ne konvergira.

ZGLED. Vrsta $x + (x/2)^2 + (x/3)^3 + ...$ konvergira za vsak $x > 0$. Imamo namreč $a_n^{1/n} = x/n \to 0$ in zato $a_n^{1/n} \leq 1/2$ za vsak dovolj velik n.

Pogojno konvergentne vrste

Rečemo da konvergira vrsta $a_1 + a_2 + ...$ *absolutno*, če konvergira vrsta iz absolutnih vrednosti $|a_1| + |a_2| + ...$ Če to ni res, rečemo, da vrsta konvergira le *pogojno*.

TRDITEV. *Vsaka absolutno konvergentna vrsta je konvergentna.*

Dokaz. To vidimo iz trikotniške neenakosti. Naj bo $m < n$. Tedaj je $|a_{m+1} + ... + a_n| \leq |a_{m+1}| + ... + |a_n|$. Če vrsta absolutno konvergira, je desna stran te neenakosti poljubno majhna. Potem pa velja isto za levo stran. Vrsta torej zadošča Cauchyjevemu pogoju, zato je konvergentna.

Poseben primer so t.i. *alternirajoče* vrste, kjer predznaki členov alternirajo: imamo $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ...$, kjer so vsi $a_i > 0$.

IZREK *Alternirajoča vrsta* $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ...$ *konvergira, če je zaporedje* (a_n) *padajoče in velja* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Dokaz. Oglejmo si $2n$-to delno vsoto $s_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + a_{2n-1} - a_{2n}$. Očitno je (s_{2n}) naraščajoče zaporedje in omejeno z $|s_{2n}| \leq a_1$, zato je konvergentno proti nekemu številu s. Zaporedje lihih členov s_{2n+1} prav tako konvergira proti s, saj je $s_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1}$. Potem pa tudi celo zaporedje konvergira proti s.

ZGLED. Vrsta $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + ...$ konvergira po zgornjem izreku, vendar, kot smo videli, ta konvergenca ni absolutna. Vrsta iz absolutnih vrednosti je namreč harmonična in divergira.

IV. FUNKCIJE ENE REALNE SPREMENLJIVKE

1. Limita in zveznost

Ponovitev splošnih pojmov o funkcijah

Splošni pojem funkcije ali preslikave med dvema množicama, domeno A in kodomeno B, smo spoznali na začetku prvega poglavja. Tu si bomo ogledali poseben primer, ko je $A \subset \mathbb{R}$ in $B \subset \mathbb{R}$. Definicijsko območje (domena) D_f funkcije f naj bo torej podmnožica v $\mathbb{R}$ in tudi funkcijske vrednosti naj bodo realna števila. V tem primeru rečemo, da je f *realna funkcija realne spremenljivke.*

Ponovimo: Funkcija $f : D_f \to \mathbb{R}$ je predpis, ki vsakemu elementu $x \in D_f$ priredi natanko eno realno število $y \in \mathbb{R}$. Funkcijsko odvisnost zapišemo kot $y = f(x)$. Število x je *neodvisna spremenljivka*, število y pa *odvisna spremenljivka*. Kot ponavadi je $G_f = \{(x, f(x)); x \in D_f\} \subset \mathbb{R}^2$ graf funkcije f, le da je to pot graf podmnožica v $D_f \times \mathbb{R}$, torej podmnožica v koordinatni ravnimi $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ in ga zato lahko v načelu narišemo.

Funkcijski predpis je lahko poljuben, le da je nedvoumen, se pravi, da natanko določa funkcijsko vrednost pri vsakem argumentu. Funkcija je lahko podana:
(a) z *besedami*, npr. -1, če je $x < 0$, in 1, če je $x \geq 0$;
(b) s *tabelo*, npr. če je D_f končna množica;
(c) z *grafom*, npr. poševna premica določa natanko eno linearno funkcijo;
(č) z *enačbo* (analitično), npr. $y = x^2$.

Če ni posebej drugače določeno, spadajo pri dani analitično podani funkciji v definicijsko območje natanko tista realna števila, pri katerih moremo dan predpis izvršiti (izvesti ustrezne računske operacije, npr. korenimo lahko le nenegativna števila itd.). Definicijsko območje je običajno cela realna os, interval, poltrak ali unija več intervalov.

V definicijskem območju so zanimive podmnožice tistih realnih števil, pri katerih je funkcijska vrednost enaka 0. Taka števila imenujemo *ničle* funkcije. Nadalje nas npr. zanima, kdaj so funkcijske vrednosti pozitivne ali negativne, kdaj naraščajo hkrati z argumentom, kdaj padajo, kdaj se periodično ponavljajo, kdaj so enake ali nasprotno predznačene pri nasprotnih argumentih (sodost, lihost) itd. Vse te lastnosti se zrcalijo na grafu funkcije, zato je prav da jih poznamo.

Splošne funkcije so lahko zelo nenavadne, vendar se bomo v bodoče ukvarjali v glavnem le z elementarnimi funkcijami, ki jih že poznamo iz srednje šole. To so npr. potence in polinomi, racionalne funkcije, korenske funkcije, eksponentne in logaritemske funkcije, kotne (trigonometrične) in krožne (ciklometrične) funkcije. Tem funkcijam bomo računali limite, ugotavljali, ali so zvezne, jih odvajali in integrirali, iskali njihove ekstreme, jih razvijali v vrsto in uporabljali pri opisovanju ali (kot pogosto rečemo) modeliranju marsikaterega naravnega (in umetnega) pojava.

Limita funkcije

O funkciji dostikrat razmišljamo dinamično. Vprašamo se npr., kaj se dogaja z njenimi funkcijskimi vrednostmi, ko se argument bliža neki točki z roba definicijskega območja. To tendenco, kadar obstaja, opišemo s pojmom limita funkcije. Formalna definicija je naslednja:

DEFINICIJA. Število $b \in \mathbb{R}$ je *limita* funkcije f v točki $a \in \mathbb{R}$, če za vsako zaporedje realnih števil (x_n), katerega členi x_n pripadajo definicijskemu območju D_f, so različni od a in konvergirajo proti a, ustrezno zaporedje funkcijskih vrednosti $f(x_n)$ konvergira proti b.

Iz definicije vidimo, da mora biti točka a v definicijskem območju D_f ali vsaj na njegovem robu (sicer v bližnjih točkah ne bi mogli računati funkcijskih vrednosti).

Dejstvo, da je število b limita funkcije f v točki a, zapišemo z znakom limite:

$$b = \lim_{x \to a} f(x).$$

ZGLED. Pokažimo, da je $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$. Če poljubno zaporedje (x_n) konvergira k 0, velja (po pravilih za računanje limit zaporedij) $\lim_{n\to 0} x_n^2 = (\lim_{x_n \to 0} x_n)^2 = 0$.

Podobno je npr. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{1-x} = 1$, saj za vsako zaporedje (x_n) z lastnostjo $x_n \to 0$ velja $\lim_{x\to 0} \frac{1}{1-x_n} = 1$.

TRDITEV. Število $b \in \mathbb{R}$ je limita funkcije f v točki $a \in \mathbb{R}$, če in samo če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da iz $0 < |x - a| < \delta$ sledi $|f(x) - b| < \epsilon$.

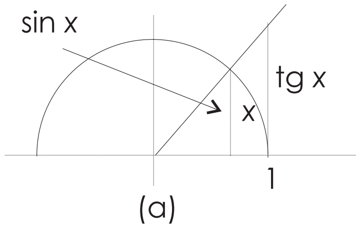
Dokaz. Denimo, da ne velja to, kar pravi trditev v drugem delu. Potem obstaja tak $\epsilon > 0$, da za vsako naravno število n obstaja točka x_n, za katero je $0 < |x_n - a| < 1/n$ in hkrati $|f(x_n) - b| \geq \epsilon$. Zaporedje x_n torej konvergira k a, vendar pa zaporedje funkcijskih vrednosti $f(x_n)$ ne konvergira k b. To pomeni, da b ni limita funkcije f v točki a.

Obratno, naj bo to, kar pravi trditev v drugem delu, res in naj bo x_n poljubno zaporedje od a različnih točk iz D_f, ki konvergira k a. Izberimo poljuben $\epsilon > 0$ in utrezen $\delta > 0$ v skladu z drugim delom trditve. Potem so od nekega indeksa n_0 dalje vsi členi zaporedja x_n taki, da je $0 < |x_n - a| < \delta$, in zato $|f(x_n) - b| < \epsilon$. Torej so členi $f(x_n)$ za $n \geq n_0$ v epsilonski okolici točke b. Ker velja to za vsak $\epsilon > 0$, konvergira $f(x_n)$ k številu b.

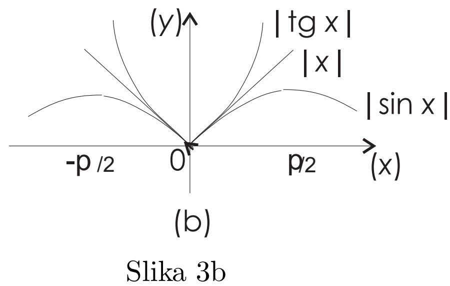
Včasih nas zanima samo leva limita $\lim_{x\to a, x<a} f(x)$ ali desna limita $\lim_{x\to a, x>a} f(x)$, ko se pač točki a bližamo z leve oziroma samo z desne strani. Ti dve limiti sta lahko različni, tudi če obstajata. Primer bomo videli v zadnjem od naslednjih zgledov. Za monotone (naraščajoče ali padajoče) funkcije obstajata leva in desna limita v vsaki točki, ni pa nujno, da sta med seboj enaki. Obstoj sledi iz izreka o monotonih zaporedjih. Če pa leva in desna limita obstajata in sta med seboj enaki, je hkrati to tudi limita funkcije.

ZGLEDI.

(a) $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$.



Slika 3a

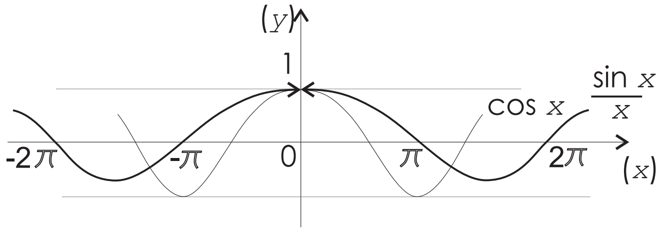


Slika 3b

Dokaz sledi iz ocene $|1 - \cos x| = \sin^2 x/(1 + \cos x) \leq x^2$ za $|x| \leq \pi/2$. Uporabili smo oceno $\sin^2 x \leq x^2$ oziroma $|\sin x| \leq |x|$, ki jo brez težav izpeljemo za $x > 0$ iz geometrijskega premisleka, da je dolžina pravokotnice na abscisno os manjša od dolžine tetive, le-ta pa manjša od dolžine krožnega loka (glej sliko 3a). Za $x < 0$ upoštevamo simetrično situacijo. Iz iste slike s primerjanjem ploščin krožnega izseka in večjega pravokotnega trikotnika vidimo, da velja tudi neenakost $x \leq tgx$ oziroma splošneje $|x| \leq |tgx|$, ki jo bomo potrebovali kasneje. Na sliki 3b sta obe ključni neenakosti prikazani z grafi funkcij $|x|$, $|\sin x|$ in $|tgx|$.

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1.$

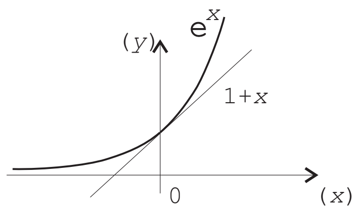
Funkcija $f(x) = \sin x/x$ je definirana za $x \neq 0$, tako da je točka $a = 0$, v kateri računamo limito, z roba definicijskega območja. Upoštevajmo, da za $|x| \leq \pi/2$ velja ocena $\cos x \leq \sin x/x \leq 1$ (glej sliko 4), ki jo lahko izpeljemo iz prejšnje neenakosti $|\sin x| \leq |x| \leq |tgx|$ (slika 3b).



Slika 4

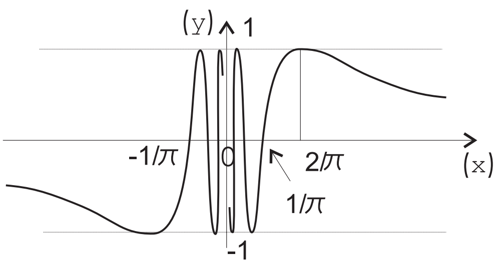
(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1.$

Uporabimo oceno $1 \leq \dfrac{e^x-1}{x} \leq \dfrac{1}{1-x}$ za $0 \leq x < 1$ in oceno $\dfrac{1}{1-x} \leq \dfrac{e^x-1}{x} \leq 1$ za $x < 0$, ki ju obe dobimo iz bolj preproste ocene $e^x \geq 1 + x$, veljavne za vsak realen x (glej sliko 5), in upoštevamo že znano dejstvo, da je $\lim_{x\to 0} \frac{1}{1-x} = 1$.



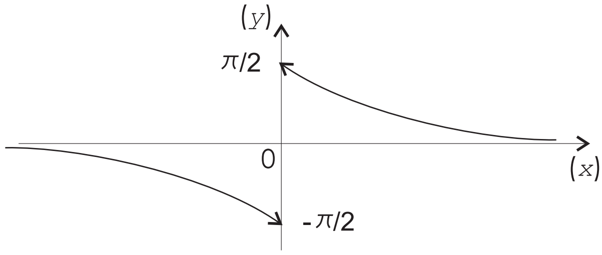
Slika 5

(d) Limita $\lim\limits_{x\to 0} \sin \dfrac{1}{x}$ ne obstaja, ko gre $x \to 0$. Pravzaprav ne obstaja niti leva niti desna limita. Za različna zaporedja, ki konvergirajo k 0 dobimo lahko zelo različne vrednosti za limito zaporedja ustreznih funkcijskih vrednosti (izberimo npr. $x_n = 1/n\pi$, ali $x_n = 2/n\pi$ itd.). V bližini točke 0 graf funkcije divje oscilira (slika 6).



Slika 6

(e) Za funkcijo $f(x) = \mathrm{arctg}\dfrac{1}{x}$ je desna limita $\lim_{x\to 0, x>0} f(x) = \pi/2$ in leva limita $\lim_{x\to 0, x<0} f(x) = -\pi/2$. Vidimo, da sta limiti različni.



Slika 7

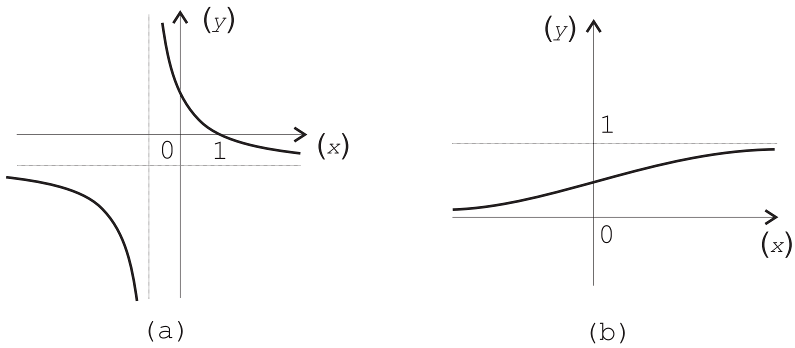
Računanje limit poteka podobno kot pri zaporedjih, saj smo limito tudi definirali z zaporedji. Pri tem upoštevamo, da velja:
1. Limita vsote (razlike) funkcij je vsota (razlika) limit.
2. Limita produkta je produkt limit.
3. Limita kvocienta je kvocient limit pod pogojem, da je limita imenovalca različna od 0.

ZGLEDI. (a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}(x+1) = 2$,
(b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{\sqrt{x+2}+2} = \dfrac{1}{4}$.
(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \dfrac{1}{2}$.

Limite ulomka ne moremo vedno izračunati kot kvocient limit. Pogosto pri tem dobimo nedoločen izraz oblike $0/0$ ali ∞/∞. V takem primeru moramo najprej pokrajšati faktor, ki povzroča nedoločenost, včasih pa tudi odpraviti razlike korenov, upoštevati že znane limite itd. Na koncu računanja upoštevamo, da je za zvezne funkcije, ki jih bomo definirali v naslednjem podrazdelku, limita enaka funkcijski vrednosti.

Včasih nas zanima, kako se vedejo funkcijske vrednosti, kadar argument x narašča (ali pada) preko vsake meje. Tedaj rečemo, da nas zanima limita funkcije v neskončnosti.

ZGLED. (a) $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-x}{1+x} = -1$. Premica $y=-1$ je tedaj vodoravna asimptota funkcije $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ (slika 8a).



Slika 8

(b) Zgodi se, da sta leva in desna asimptota (pri pogojih $x\to-\infty$ in $x\to\infty$) različni. Tako je npr. pri funkciji $f(x) = \operatorname{arctg} x$ ali npr. pri funkciji $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$ (slika 8b). V tem primeru je $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ in $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$.

Zvezne funkcije

V enem od prejšnjih zgledov, smo ugotovili, da sta leva in desna limita funkcije $f(x) = \mathrm{arctg}(1/x)$ v točki 0 različni, na sliki 7 pa smo videli, da je graf te funkcije v točki 0 "pretrgan". Pravzaprav funkcija f sploh ni bila definirana pri $x = 0$, pa tudi če bi bila, bi bil njen graf v točki 0 še vedno nepovezan. Tej pomanjkljivosti se izognejo t.i. zvezne funkcije.

DEFINICIJA. Funkcija f je v točki $a \in D_f$ *zvezna*, če velja $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Funkcija f je zvezna na intervalu I, če je na I definirana in zvezna v vsaki točki $a \in I$.

Ta definicija zajema hkrati več pomembnih zahtev. Najprej mora biti funkcija f v točki a definirana, tako da lahko izračunamo $f(a)$. Nadalje mora v točki a obstajati limita funkcije f in nazadnje mora biti ta limita enaka funkcijski vrednosti.

ZGLED. Funkcija $f(x) = \cos x$ je zvezna v točki 0, saj je, kot smo videli, $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$, hkrati pa je tudi $\cos 0 = 1$. Funkciji $f(x) = \sin x/x$ in $f(x) = (\mathrm{e}^x - 1)/x$ v točki 0 sploh nista definirani, vendar bi z dodatno definicijo $f(0) = 1$ lahko njuno definicijsko območje razširili tudi v točko 0, tako da bi bili potem tam zvezni, saj smo videli, da je v obeh primerih $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$. Funkciji $f(x) = \sin(1/x)$ in $f(x) = \mathrm{arctg}(1/x)$ pa nikakor ne bi mogli definirati v točki 0 tako, da bi bili v njej zvezni, saj v tej točki nimata niti limite.

Zvezne funkcije imajo številne lepe lastnosti:

1. *Vsota, razlika, produkt in kvocient (kjer je definiran) zveznih funkcij so zvezne funkcije.*

To ni težko videti, če upoštevamo, da je limita vsote (razlike, produkta, kvocienta) enaka vsoti (razliki, produktu, kvocientu) limit. Trditev velja tako za zveznost v posamezni točki kot za zveznost na skupnem definicijskem intervalu.

ZGLED. Konstantna funkcija $f(x) = c$ in identična funkcija $f(x) = x$ sta zvezni takorekoč po definiciji. Potem so zvezne tudi potence $x^2,\ x^3,\ ...$ in njihove linearne kombinacije, se pravi, polinomi. Enako velja tudi za racionalne funkcije, ki so zvezne, kjer so definirane.

2. *Inverzna funkcija zvezne funkcije je zvezna funkcija* (če obstaja).

To trditev pustimo brez dokaza, je pa precej nazorna, saj je graf inverzne funkcije preko simetrale prvega in tretjega kvadranta prezrcaljen graf osnovne funkcije, zato je tudi "nepretrgan". Kot njeno posledico dobimo, da so npr. korenske funkcije zvezne, kjer so definirane. Prav tako bo sledilo, da so zvezne logaritemska funkcija (kot inverz eksponentne funkcije) in ciklometrične funkcije (kot inverzi trigonometričnih funkcij).

3. *Kompozitum zveznih funkcij je zvezna funkcija.*

Dokaz. Iz $x_n \to a$ sledi $f(x_n) \to f(a)$ in odtod $g(f(x_n)) \to g(f(a))$. Torej velja $(g \circ f)(x_n) \to (g \circ f)(a)$, torej zveznost kompozita $g \circ f$ v točki a.

4. *Eksponentna funkcija $f(x) = e^x$ je zvezna funkcija.*

Dokaz. Naj bo $a \in \mathbb{R}$ poljubna točka. Ker je $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^a \cdot \mathrm{e}^{x-a}$, je $\lim_{x\to a} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^a \lim_{x\to a} \mathrm{e}^{x-a} = \mathrm{e}^a \lim_{x\to a}(\mathrm{e}^{x-a} - 1)/(x-a) \cdot (x-a) + \mathrm{e}^a = \mathrm{e}^a$.

5. *Sinusna funkcija* $f(x) = \sin x$ *je zvezna funkcija.*

Dokaz. Za vsako točko $a \in \mathbb{R}$ je $\sin x - \sin a = 2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}$ in zato $|\sin x - \sin a| \leq |x-a|$. Upoštevali smo, da je $|\cos\frac{x+a}{2}| \leq 1$ in $|\sin\frac{x-a}{2}| \leq |x-a|/2$. Torej iz $x \to a$ sledi $\sin x \to \sin a$.

Podobno bi dobili zveznost funkcij $\cos x$ ter tg x in ctg x (na svojem definicijskem območju). Posledica vseh petih točk je naslednja splošna in uporabna ugotovitev:

Vse iz elementarnih sestavljene funkcije so zvezne, kjer so definirane.

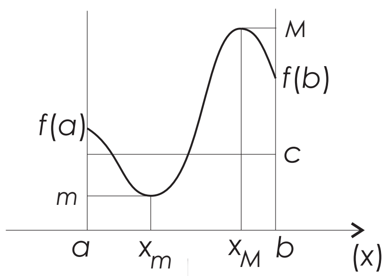
Torej bomo pri nadaljnjem računanju z elementarnimi funkcijami in njihovimi kompozitumi vedno lahko upoštevali, da so zvezne.

Na koncu dokažimo še dva (teoretično) pomembna izreka o funkcijah, ki so zvezne na zaprtem intervalu. Potrebovali ju bomo kasneje pri izpeljavi nekaterih rezultatov pri odvajanju in integriranju funkcij.

IZREK 1. *Zvezna funkcija je na zaprtem intervalu* $[a, b]$ *omejena in zavzame svojo največjo in svojo najmanjšo vrednost.*

Dokaz. Če f ni omejena, obstaja zaporedje $x_n \in [a, b]$, da je $|f(x_n)| \geq n$ za vsak n. Toda zaporedje (x_n) leži na intervalu $[a, b]$, zato je omejeno in ima vsaj eno stekališče $x \in [a, b]$. Obstaja podzaporedje (x_{n_k}), ki konvergira k x. Tedaj pa zaradi zveznosti funkcije f velja $f(x_{n_k}) \to f(x)$. To je v nasprotju z neomejenostjo podzaporedja $f(x_{n_k})$, saj je $|f(x_{n_k})| \geq n_k$ za vsak k.

Naj bo $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. Obstaja zaporedje $x_n \in [a, b]$, za katero ustrezno zaporedje funkcijskih vrednosti $f(x_n)$ konvergira proti M. Spet ima zaporedje (x_n) stekališče $x_M \in [a, b]$ in spet obstaja podzaporedje $x_{n_k} \to x_M$ $(k \to \infty)$. Tedaj zaradi zveznosti velja tudi $f(x_{n_k}) \to f(x_M)$. Po drugi strani pa vemo, da $f(x_{n_k}) \to M$. Torej je $f(x_M) = M$. Podobno obravnavamo največjo spodnjo mejo $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$.



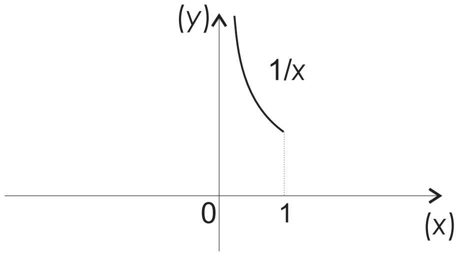
Slika 9

IZREK 2. *Na zaprtem intervalu* $[a, b]$ *zavzame zvezna funkcija* f *vsako vrednost med najmanjšo in največjo.*

Dokaz. Naj bo $m \leq c \leq M$ in $f(x_m) = m \leq c$, $f(x_M) = M \geq c$ (glej sliko 9). Napravimo bisekcijo intervala $[x_m, x_M]$ (ali $[x_M, x_m]$, če je $x_m > x_M$), tako da vedno izberemo interval, pri katerem je v enem (npr. levem) krajišču funkcijska vrednost pod c, v drugem pa nad c. Stekališče levih (desnih) krajišč mora biti tako realno število x, da je $f(x) = c$.

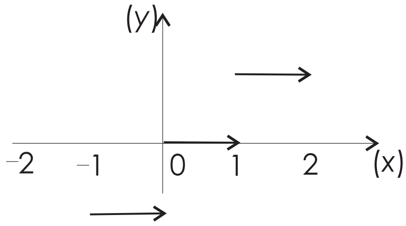
ZGLED. (a) Funkcija $f(x) = 1/x$ je na polodprtem intervalu $(0, 1]$ zvezna, vendar na njem ni omejena. Če bi jo v točki 0 definirali npr. s predpisom $f(0) = 0$, ne bi bila več zvezna (in še vedno neomejena). Ista funkcija na poltraku $[1, \infty)$ pa je omejena in zvezna.

Njen maksimum je 1, svoje najmanjše vrednosti pa ne zavzame nikjer. Poltrak seveda ni (omejen) zaprt interval.

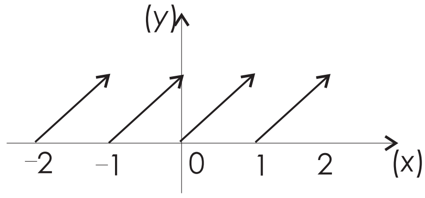


Slika 10

(b) Naj pomeni $[x]$ celi del števila x, torej največje celo število, ki ne presega števila x. Funkcija $f(x) = [x]$ je sicer povsod definirana, vendar v nobeni točki $x \in \mathbb{Z}$ ni zvezna (ni elementarna!); njen graf je sestavljen iz stopnic dolžine in višine 1 (glej sliko 11a). Podobno je graf funkcije $g(x) = x - [x]$ sestavljen iz poševnih daljic (glej sliko 11b). Tudi ta funkcija ni zvezna pri celih številih.



Slika 11a



Slika 11b

Na zaprtem intervalu $[0, 1]$ funkciji f in g nista zvezni, čeprav sta obe omejeni. Funkcija f ima npr. minimum 0 in maksimum 1, ne zavzame pa nobene vmesne vrednosti. Funkcija g pa npr. ne zavzame niti svoje največje vrednosti.

2. Odvajanje funkcij

Odvajanje je ena najpomembnejših operacij na funkcijah. Z uporabo odvoda, kadar le-ta obstaja, lahko veliko bolje spoznamo vedenje funkcje v bližini določene točke, kot lahko to storimo le z računanjem njenih vrednosti in njene limite.

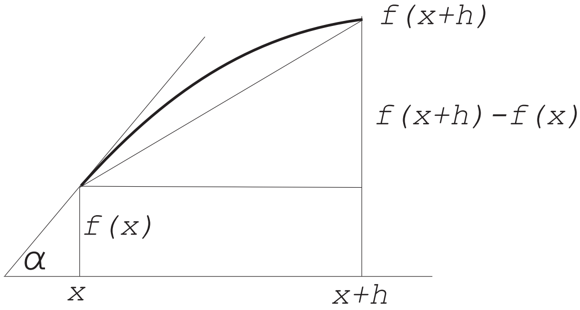
Definicija in geometrijski pomen odvoda

DEFINICIJA. Realna funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je v točki x *odvedljiva*, če obstaja limita diferenčnega kvicienta

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

To limito imenujemo *odvod* funkcije f v točki x.

Geometrijsko pomeni odvod $f'(x)$ tangens naklonskega kota tangente na krivuljo $y = f(x)$ v točki $(x, f(x))$ in določa strmino (smer grafa) funkcije v dani točki. Naklon tangente dobimo kot limitno lego naklona sekante skozi točki $(x, f(x))$ in $(x+h, f(x+h))$ (glej sliko 12).



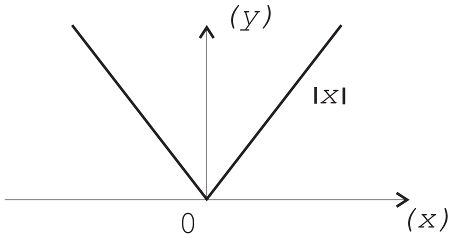
Slika 12

Smerni koeficent tangente v točki $(x_0, f(x_0))$ torej znaša $f'(x_0)$, zato je enačba tangente enaka $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

ZGLEDI. (a) Če je $f(x) = kx + n$, je $f'(x) = k$ za vsak x, saj je že diferenčni kvocient povsod enak k. Premica se ujema s svojo tangento.

(b) Če je $f(x) = x^2$, je $f'(x) = 2x$, saj je diferenčni kvocient enak $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = 2x + h$.

(c) Funkcija $f(x) = |x|$ v točki $x = 0$ ni odvedljiva. Diferenčni kvocient v točki 0 je enak $\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{|h|-|0|}{h} = |h|/h$. Zdaj je leva limita enaka 1, desna 1, limite pa ni. Odvod v 0 ne obstaja (glej sliko 13).



Slika 13

TRDITEV. *Če je funkcija f v točki x odvedljiva, je tam tudi zvezna.*

Dokaz. Zapišimo $f(x + h) - f(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \cdot h$. ker limita diferenčnega kvocienta obstaja, obstaja tudi limita razlike $f(x + h) - f(x)$ pri pogoju $h \to 0$ in je enaka 0. To pomeni, da je $\lim_{h\to 0} f(x + h) = f(x)$ in funkcija f je v točki x zvezna.

Obratno ne drži, kot pove prejšnji zgled (c). Funkcija $f(x) = |x|$ je v točki 0 (pravzaprav povsod) zvezna, ni pa tam odvedljiva.

DEFINICIJA. Funkcija je na intervalu I odvedljiva, če je odvedljiva v vsaki točki $x \in I$.

Funkciji $f(x) = kx + n$ in $f(x) = x^2$ sta npr. zvezni povsod na realni osi.

Pravila za odvajanje

Odvod funkcije $f(x)$ je odvisen od točke x, v kateri jo odvajamo; torej je f' spet funkcija.

Za odvajanje veljajo znana pravila:

1. *Odvod konstantne funkcije je* 0.

že diferenčni kvocient konstante je enak 0.

2. *Odvod vsote in razlike*: $(u+v)' = u' + v',\ (u-v)' = u' - v'$.

Dokaz poteka po definiciji in z uporabo pravil za računanje limit. Zapišimo npr. diferenčni kvocient za vsoto $u + v$

$$\frac{u(x+h)+v(x+h)-u(x)-v(x)}{h} = \frac{u(x+h)-u(x)}{h} + \frac{v(x+h)-v(x)}{h}.$$

če na desni strani obstajata limiti obeh diferenčnih kvocientov, ko $h \to 0$, obstaja tudi limita na levi strani.

To lahko posplošimo na več členov: $(u_1 + u_2 + ...u_n)' = u_1' + u_2' + ... + u_n'$.

3. *Odvod produkta*: $(uv)' = u'v + uv'$.
Spet zapišimo diferenčni kvocient za produkt:

$$\frac{u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x)}{h} = \frac{u(x+h)-u(x)}{h} \cdot v(x+h) + u(x) \cdot \frac{v(x+h)-v(x)}{h}$$

in izračunajmo na obeh straneh limito pri pogoju $h \to 0$. Upoštevajmo, da je $\lim_{h\to 0} v(x+h) = v(x)$ zaradi zveznosti funkcije v.

Poseben primer je odvod funkcije pomnožene s konstanto: $(cu)' = cu'$.

Formulo za odvod produkta lahko posplošimo na več faktorjev, npr. $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$.

4. *Odvod kvocienta*: $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Dokaz izpustimo, ker je podoben kot dokaz za produkt, le nekoliko bolj zapleten.

5. *Odvod sestavljene funkcije* $y = y(u),\ u = u(x)$ na spremenljivko x je enak $y'(x) = y'(u)u'(x),\ u = u(x)$. Opazimo, da je prvi faktor spet sestavljena funkcija, torej $y'(x) = y'(u(x))u'(x)$.

Označimo diferenčni kvocient funkcije u s $k(x,h)$, torej $k(x,h) = (u(x+h) - u(x))/h$. Torej je $u(x+h) = u(x) + hk(x,h)$. Potem lahko zapišemo diferenčni kvocient sestavljene funkcije v obliki

$$\frac{y(u(x+h)) - y(u(x))}{h} = \frac{y(u(x)+hk(x,h)) - y(u(x))}{hk(x,h)} \cdot k(x,h).$$

Prvi faktor konvergira pri pogoju $h \to 0$ proti $y'(u(x))$, drugi pa proti $u'(x)$.

Zgled. Če je $y = (2x^2 + x)^3$, je $y' = 3(2x^2 + x)^2 \cdot (4x + 1)$

6. *Odvod inverzne funkcije*: Če je $y = g(x)$ inverzna funkcija k funkciji f, je $y' = 1/f'(y),\ y = g(x)$, torej $y' = 1/f'(y)$.

Uporabili bomo pravilo za odvod sestavljene funkcije, saj zdaj velja $x = f(y),\ y = g(x)$. Potem z upoštevanjem točke 5 dobimo z odvajanjem na spremenljivko x na obeh straneh $1 = f'(y)y'$ oziroma $y' = 1/f'(y)$, kjer je seveda $y = g(x)$.

Odvodi elementarnih funkcij

Vse elementarne funkcije so ne samo zvezne, ampak tudi odvedljive. Njihove odvode najdemo po definiciji, upoštevati pa je potrebno nekatere limite iz prejšnjega razdelka in splošna pravila za odvajanje.

1. *Odvod konstante je* 0.

To smo že videli.

2. *Odvod potence je* $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Za potence z naravnim eksponentom $n \in \mathbb{N}$ je ta formula poseben primer formule za odvod produkta več faktorjev. Za splošne potence bomo to formulo izpeljali takoj, ko bomo poznali odvod eksponentne in logaritemske funkcije.

3. *Odvod eksponentne funkcije je* $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$.

Izračunajmo limito diferenčnega kvocienta $\frac{\mathrm{e}^{x+h}-\mathrm{e}^x}{h} = \mathrm{e}^x \frac{\mathrm{e}^h-1}{h}$ pri pogoju $h \to 0$ (upoštevajmo, da je limita zadnjega ulomka enaka 1.

Podobna formula velja tudi za eksponentne funkcije z drugo osnovo. Za $a > 0$, $a \neq 1$ in $f(x) = a^x = \mathrm{e}^{x \ln a}$ npr. dobimo po pravilu za odvod posredne funkcije $f'(x) = \mathrm{e}^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a$.

4. *Odvod logaritemske funkcije je* $(\ln x)' = 1/x$

Logaritemska funkcija $y = \ln x$ je inverzna k eksponentni, zato iz $x = \mathrm{e}^y$ dobimo $y' = 1/\mathrm{e}^y = 1/x$.

Odvajamo lahko tudi logaritme z drugo osnovo $a > 0$, $a \neq 1$, če jih prej prevedemo na osnovo e. Dobimo $\log_a x = \ln x / \ln a$ in zato $(\log_a x)' = 1/(x \ln a)$.
Zdaj se lahko lotimo tudi splošne potence ($x > 0$, $n \in \mathbb{R}$), ki jo najprej zapišemo v obliki $x^n = \mathrm{e}^{n \ln x}$. Torej je $(x^n)' = \mathrm{e}^{n \ln x} \cdot n/x = nx^{n-1}$.

5. *Odvodi kotnih funkcij so*: $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(\mathrm{tg} x)' = 1/\cos^2 x = 1 + \mathrm{tg}^2 x$, $(\mathrm{ctg} x)' = -1/\sin^2 x = -(1 + \mathrm{ctg}^2 x)$.

Za sinusno funkcijo je po definiciji

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = (2/h)\cos(x + h/2)\sin h/2$$

in ta diferenčni kvocient konvergira proti $\cos x$, ko $h \to 0$. Odvod kosinusa dobimo podobno ali z odvajanjem formule $\cos x = \sin(x + \pi/2)$. Odvoda za tangens in kotangens dobimo z odvajanjem ustreznih ulomkov, $\sin x / \cos x$ in $\cos x / \sin x$.

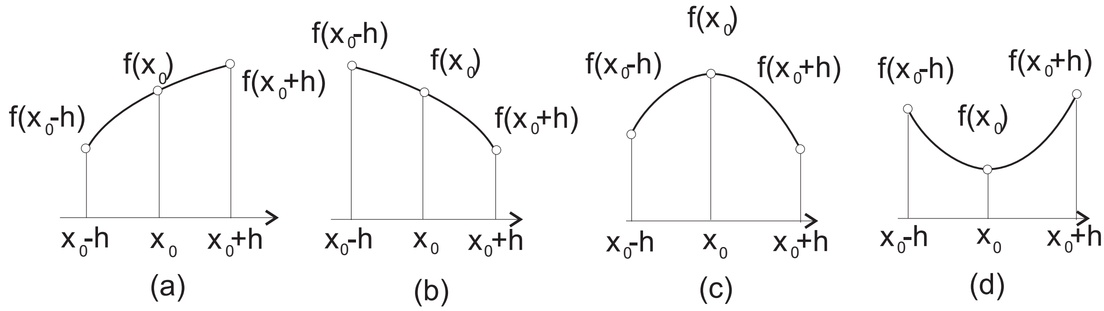
6. *Odvodi krožnih funkcij so*: $(\arcsin x)' = 1/\sqrt{1-x^2}$, $(\arccos x)' = -1/\sqrt{1-x^2}$, $(\arctan x)' = 1/(1+x^2)$, $(\mathrm{arcctg} x)' = -1/(1+x^2)$.

Upoštevajmo pravila za odvod inverznih funkcij. Če je npr. $y = \arcsin x$, je $x = \sin y$ in zato $y' = 1/\cos y = 1/\sqrt{1-\sin^2 y} = 1/\sqrt{1-x^2}$. Podobno dobimo iz $x = \mathrm{tg} y$ odvod za arkus tangens: $y' = 1/(1 + \mathrm{tg}^2 y) = 1/(1+x^2)$.

Uporaba odvoda pri proučevanju funkcij

Zdaj bomo naše znanje o odvajanju uporabili pri podrobnejši obravnavi vedenja funkcij v posamezni točki ali na vsem inertvalu. Naj bo f realna funkcija, definirana na odprtem intervalu $I = (a, b)$.

DEFINICIJA. Pravimo, da je funkcija f v točki $x_0 \in I$ *naraščajoča*, če za vsak $h > 0$ (dovolj majhen, da je $x_0 + h \in I$ in $x_0 - h \in I$) velja $f(x_0 - h) < f(x_0) < f(x_0 + h)$ (glej sliko 14a).



Slika 14

DEFINICIJA. Funkcija f je *naraščajoča na vsem intervalu* I, če je naraščajoča v vsaki točki tega intervala. V tem primeru za vsak $x, y \in I$ iz $x < y$ sledi $f(x) < f(y)$.

Podobno definiramo tudi padajoče funkcije.

DEFINICIJA. Funkcija f je v točki $x_0 \in I$ *padajoča*, če za vsak $h > 0$ (dovolj majhen, da je $x_0 + h \in I$ in $x_0 - h \in I$) velja $f(x_0 - h) > f(x_0) > f(x_0 + h)$ (glej sliko 14b).
Funkcija f je padajoča na I, če iz $x < y$ sledi $f(x) > f(y)$.

TRDITEV 1. *Če je $x_0 \in I$ in za odvedljivo funkcijo f velja $f'(x_0) > 0$, potem je funkcija f v točki x_0 naraščajoča. Če je $f'(x_0) < 0$, je funkcija f v točki x_0 padajoča.*

Dokaz. Za dovolj majhen $h > 0$ je $\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} > 0$ in $\dfrac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h} =$
$= \dfrac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} > 0$. Drugi del dokažemo podobno.

DEFINICIJA. Funkcija f ima v točki $x_0 \in I$ *lokalni maksimum*, če za vsak (dovolj majhen) $h > 0$ velja $f(x_0) \geq f(x_0 \pm h)$ (glej sliko 14c).
DEFINICIJA. Funkcija f ima v točki $x_0 \in I$ *lokalni minimum*, če za vsak (dovolj majhen) $h > 0$ velja $f(x_0) \leq f(x_0 \pm h)$ (glej sliko 14d).

TRDITEV 2. *Če ima odvedljiva funkcija f v točki $x_0 \in I$ lokalni ekstrem (maksimum ali minimum), je $f'(x_0) = 0$.*

Dokaz. Sledi iz trditve 1.

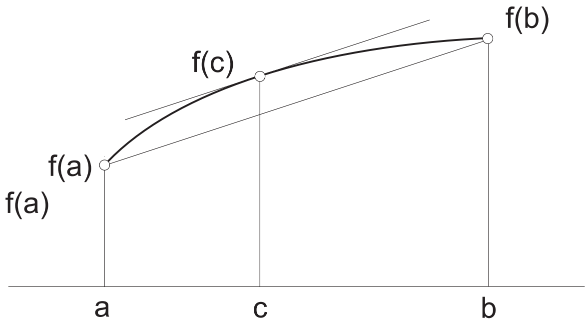
OPOMBA. Točko x_0, v kateri je $f'(x_0) = 0$, imenujemo *stacionarna točka* funkcije f. Vsak lokalni ekstrem odvedljive funkcije je stacionarna točka, obratno pa ni nujno. Zgled: ničla 3. stopnje.

IZREK (Lagrange). *Naj bo f zvezna funkcija na zaprtem intervalu $[a, b]$ in odvedljiva na odprtem intervalu (a, b). Tedaj obstaja točka $c \in (a, b)$, tako da je*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Dokaz. Pišimo $g(x) = f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$. Funkcija g je zvezna na $[a, b]$, odvedljiva na (a, b) in velja $g(a) = g(b) = f(a)$. Če je g konstanta, je $g'(x) = 0$ za vsak $x \in I = (a, b)$, oziroma $f'(x) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ za vsak $x \in I$. Za c lahko vzamemo katerokoli točko.

Če g ni konstantna funkcija, zavzame svoj maksimum (ali minimum) v neki vmesni točki $c \in (a, b)$. V točki c mora biti $g'(c) = 0$, se pravi $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ (slika 15).



Slika 15

POSLEDICA. Če je $f'(x) = 0$ za vsak $x \in I$, je $f(x) = c$ (konstanta) za vsak $x \in I$.

Posplošitev Lagrangevega izreka je naslednji rezultat. Tudi dokaz je podoben.

IZREK (Cauchy). *Naj bosta f, g zvezni funkciji na zaprtem intervalu $[a, b]$ in odvedljivi v odprtem intervalu (a, b). Tedaj obstaja taka točka $c \in (a, b)$, da je*

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c).$$

Dokaz. Oglejmo si funkcijo $h(x) = [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x)$. Zanjo velja zveznost na $[a, b]$, odvedljivost na (a, b) in $h(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a) = h(b)$. Dokaz poteka naprej enako kot pri Lagrangevem izreku. V vsakem primeru obstaja točka $c \in (a, b)$ z lastnostjo $h'(c) = 0$.

Lagrangev izrek dobimo, če izberemo $g(x) = x$ za vsak x. Posledica Cauchyjevega izreka pa je naslednji izrek, ki velikokrat pomaga pri računanju limit:

IZREK (L'Hospitalovo pravilo). *Naj bosta funkciji f in g odvedljivi v vsaki točki intervala (a, b). Za neko točko $c \in (a, b)$ naj velja $f(c) = g(c) = 0$ in $g(x) \neq 0$ za x blizu c. Poleg tega naj obstaja limita $\lim_{x \to c} f'(x)/g'(x)$. Tedaj je*

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Dokaz. Uporabimo Cauchyjev izrek za funkciji f in g: $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} =$ $= \lim\limits_{x \to c} \dfrac{f'(t)}{g'(t)}$. Ker je $c \leq t \leq x$ (ali $x < t < c$), konvergira hkrati s $x \to c$ tudi $t \to c$, in ker obstaja limita $\lim_{t \to c} f'(t)/g'(t)$, obstaja tudi zgornja limita in izrek je dokazan.

ZGLED. L'Hospitalovo pravilo lahko pogosto s pridom uporabimo. Preprosti zgledi so že znane limite:

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x}{1}=1,$

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{1}=1,$

Včasih je potrebno pravilo uporabiti večkrat zapored, npr.:

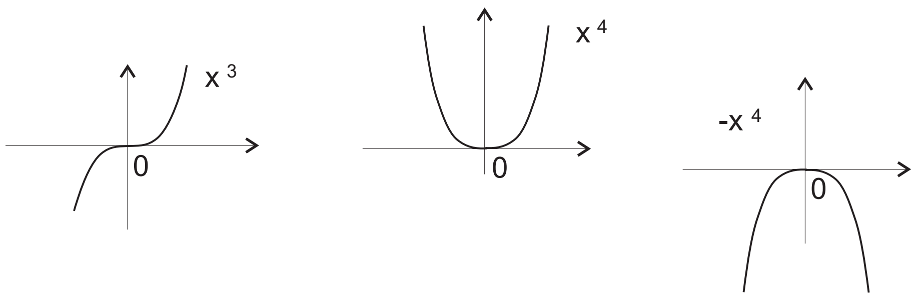
(c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin x}{6x}=-\dfrac{1}{6}.$

Zadostni pogoji za določevanje lokalnega ekstrema

TRDITEV. *Funkcija f naj bo na intervalu I zvezna in odvedljiva, točka $x_0 \in I$ pa izolirana stacionarna točka. Če v poljubno majhni okolici točke x_0 velja*
(1) *$f'(x) < 0$ za $x < x_0$ in $f'(x) > 0$ za $x > x_0$, je v x_0 minimum,*
(2) *$f'(x) > 0$ za $x < x_0$ in $f'(x) < 0$ za $x > x_0$, je v x_0 maksimum,*
(3) *$f'(x) > 0$ za $x < x_0$ in $f'(x) > 0$ za $x > x_0$, v x_0 ni ekstrema, funkcija v x_0 narašča,*
(4) *$f'(x) < 0$ za $x < x_0$ in $f'(x) < 0$ za $x > x_0$, v x_0 ni ekstrema, funkcija v x_0 pada.*

Dokaz. Za vsak dovolj majhen $h > 0$ je po Lagrangevem izreku $f(x_0+h)-f(x_0)=f'(c)h$, kjer je $x_0 \leq c < x_0+h$, in $f(x_0)-f(x_0-h)=f'(d)h$, kjer je $x_0-h < d \leq x_0$. V vsakem od štirih primerov dobimo ustrezen rezultat (naraščanje, padanje ali ekstrem funkcije f v točki x_0).

ZGLED. Obravnavajmo funkcije $f(x)=x^3, x^4, -x^4$ v stacionarni točki $x_0=0$. Ugotovimo, da je predznak odvoda levo in desno od točke x_0 v skladu s prikazom na slikah 16a,b,c. Zato ima prva funkcija v stacionarni točki naraščajoči prevoj, druga minimum in tretja spet maksimum.



Slika 16

DEFINICIJA. Višje odvode funkcije f definiramo rekurzivno: $f^{(n+1)}=(f^{(n)})'$. Npr. $f''=(f')'$.

ZGLED. Višje odvode funkcij $f(x)=x^n$, $f(x)=\mathrm{e}^x$, $f(x)=\sin x$, $f(x)=\cos x$ izračunamo brez težav.

Za dvakrat odvedljive funkcije imamo primeren zadosten pogoj za nastop ekstrema.

IZREK. *Če je funkcija f na intervalu I dvakrat odvedljiva in je x_0 stacionarna točka za f, torej $f'(x_0)=0$, velja naslednje*:
(a) *Če je $f''(x_0) < 0$, je v točki x_0 maksimum.*
(b) *Če je $f''(x_0) > 0$, je v točki x_0 minimum.*

Dokaz. Če je $f''(x_0) < 0$, sta za vse dovolj majhne $h > 0$ izpolnjeni neenakosti $\dfrac{f'(x_0+h) - f'(x_0)}{h} < 0$ in $\dfrac{f'(x_0) - f'(x_0-h)}{h} < 0$. Ker je $f'(x_0) = 0$, sledi od tod $f'(x_0 + h) < 0$ in $f'(x_0 - h) > 0$. Po prvem kriteriju nastopi maksimum. Podobno dokažemo točko (b).

OPOMBA. Če je $f''(x_0) = 0$, lahko nastopijo vse možnosti. V tem primeru moramo uporabiti drugačne kriterije. Zgled: funkcije x^3, x^4, $-x^4$ (slika 16).

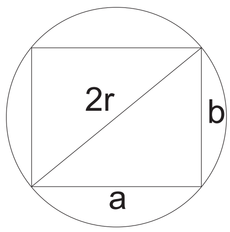
ZGLEDI. (a) Kvadratna funkcija $f(x) = ax^2 + bx + c$ ima v temenu maksimum (če je $a < 0$) ali minimum (če je $a > 0$). To sledi iz dejstva, da je $f''(x) = a$ za vsak x.
(b) Funkcija $f(x) = \cos x$ ima v točki $x_0 = 0$ maksimum, v točki $x_0 = \pi$ pa minimum, saj je $f''(0) = -1$ in $f''(\pi) = 1$.

Praktična uporaba ekstremov

Pogosto moramo v praksi poiskati maksimum ali minimum kakšne količine. Ta količina je odvisna (je funkcija) od ene ali več spremenljivk; njihovo vrednost moramo izbrati tako, da bo vrednost funkcije ekstremalna. Vsak problem moramo obravnavati posebej, navadno najprej nastavimo formulo za količino, katere ekstrem iščemo in jo izrazimo samo z eno spremenljivko glede na dane pogoje. postopek si oglejmo na treh izbranih primerih.

1. *V krog včrtajmo pravokotnik z največjo ploščino.*

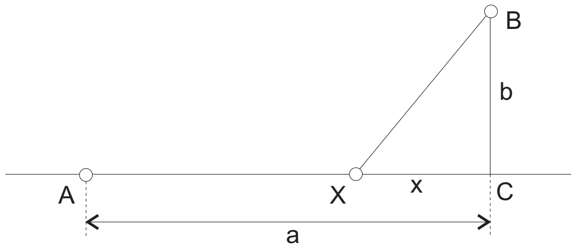
Krog naj ima polmer r, pravokotnik naj bo v njega vrisan tako, da ležijo oglišča na krožnici, stranice pa so vzporedne koordinatnima osema (glej sliko 17).



Slika 17

Formula za ploščino je $p = ab$, kjer sta a in b stranici pravokotnika. Zaradi pogoja včrtanosti, je $a^2 + b^2 = 4r^2$, torej lahko izrazimo b s stranico a, tako da je $b = \sqrt{4r^2 - a^2}$ in $p = a\sqrt{4r^2 - a^2}$. Zaradi poenostavitve problema, bomo vpeljali druge oznake. Naj bo $x = a/2$ in $f(x) = p^2/16 = x^2(r^2 - x^2) = r^2x^2 - x^4$. Opazimo tudi to, da ima funkcija f maksimum natanko takrat (tj. v isti točki x) kot ploščina, le njegova vrednost je drugačna. Zato poiščimo ekstrem funkcije f. Odvod je $f'(x) = 2r^2x - 4x^3$ in stacionarni točki $x = 0$ in $x = r/\sqrt{2}$. V prvi točki bi seveda dobili minimum za f (in p), zato pride v poštev le druga točka. Ker je $f''(x) = 2r^2 - 12x^2$ in $f''(r/\sqrt{2}) = 2r^2 - 6r^2 = -4r^2 < 0$, ima v točki $x = r/\sqrt{2}$ funkcija f maksimum, enak $f(r/\sqrt{2}) = r^4/4$. Maksimalna ploščina je torej $p_{max} = 4\sqrt{f_{max}} = 2r^2$, dosežena pri $a = b = r\sqrt{2}$.

2. *Ob ravni progi konstruirajmo železniško postajo, da bo prevoz od mesta A ob progi, do mesta B, ki je od proge oddaljeno za b (kilometrov) najcenejši, če znaša za vsako tono blaga cena prevoza po železnici p (denarnih enot na kilometer), po cesti pa je enaka cena* $q > p$ (glej sliko 18).



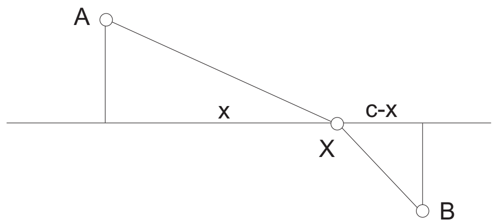
Slika 18

Iz točke B spustimo pravokotnico na progo in presečišče označimo s C. Naj bo razdalja od A do C enak a, železniško postajo pa zgradimo v točki X, ki je za x oddaljena od C (smiselno je seveda, da leži X med A in C in da je cesta od X do B čimbolj ravna).

Skupna cena je potem sestavljena iz dveh delov, cene prevoza po železnici in cene prevoza po cesti, vsak del pa je odvisen od cene na kilometer in od razdalje. Edina spremenljivka je x, zato je cena njena funkcija, $c = f(x)$, kjer je $f(x) = (a-x)p + \sqrt{x^2+b^2}q$ (glej sliko 19). Iz odvoda $f'(x) = -p + xq/\sqrt{x^2+b^2}$ vidimo, da je stacionarna točka tam, kjer je $x/\sqrt{x^2+b^2} = p/q$, torej tam, kjer je $\cos\phi = p/q$, kjer je ϕ kot, pod katerin se v točki X cesta proti mestu B odcepi od proge. Če je število x malce manjše, je ta kot malce večji, njegov kosinus manjši in zato $f'(x) < 0$, za malo večji x pa dobimo $f'(x) > 0$. Funkcija f ima torej v stacionarni točki minimum, cena je najmanjša možna.

3. *Izpeljimo lomni zakon v fiziki.*

Na meji dveh optično različno gostih sredstev se svetloba lomi, sicer pa potuje po ravni črti s konstantno hitrostjo u oziroma v. Denimo, da je $u < v$ (glej sliko 19).



Slika 19

Uporabimo Fermatov princip, da svetloba potuje po poti tako, da je skupni čas, ki ga potrebuje za pot iz točke A v točko B, minimalen. Na meji obeh sredstev iščemo točko X, kjer bo ta pogoj izpolnjen. Naj bo razdalja točke A od (ravne) meje enaka a, točke B enaka b, razdalja med podnožiščema točk A in B naj bo c, med A in X pa x (slika 20).

Potem je celoten čas funkcija spremenljivke x, natančno $t = f(x)$, kjer je

$$f(x) = \sqrt{x^2+a^2}/u + \sqrt{(c-x)^2+b^2}/v.$$

Odvod je

$$f'(x) = x/u\sqrt{x^2+a^2} - (c-x)/v\sqrt{(c-x)^2+b^2},$$

drugi odvod pa

$$f''(x) = a^2/u(x^2+a^2)^{3/2} + b^2/v((c-x)^2+b^2)^{3/2} > 0.$$

Torej gre v stacionarni točki za minimum. Označimo vpadni kot žarka kot običajno z α, lomni kot pa z β. Iz slike 20 vidimo, da je $\sin\alpha = x/\sqrt{x^2+a^2}$ in $\sin\beta = (c-x)/v\sqrt{(c-x)^2+b^2}$. Torej dobimo stacionarno točko in s tem minimum časovne funkcije natanko takrat, ko je $\sin\alpha/u = \sin\beta/v$ oziroma $\sin\alpha/\sin\beta = u/v$, ker je znani lomni zakon. Pogosto označimo razmerje hitrosti z n (lomni količnik), zato se lomni zakon glasi tudi $\sin\alpha/\sin\beta = n$.

Konveksnost in konkavnost funkcije

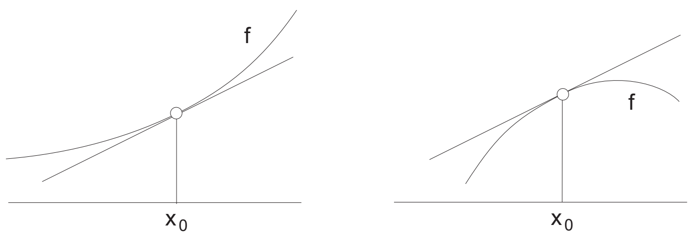
V zezi z definicijo odvoda smo že definirali tangento na krivuljo $y = f(x)$. Ponovimo formalno definicijo in hkrati definirajmo tudi normalo.

DEFINICIJA. Naj bo $f : I \to \mathbb{R}$ odvedljiva funkcija.
(a) *Tangenta* na krivuljo $y = f(x)$ v točki $(x_0, f(x_0)$ je premica, ki poteka skozi to točko in ima smerni koeficient enak odvodu $f'(x_0)$.
(b) *Normala* na krivuljo $y = f(x)$ v točki $(x_0, f(x_0)$ je premica, ki poteka skozi to točko pravokotno na tangento (ima smerni koeficient enak $-1/f'(x_0)$).

Torej sta enačbi tangente in normale v točki $x_0, f(x_0)$ dani z
(a) *enačba tangente*: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$
(b) *enačba normale*: $y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$

ZGLED. Enačba tangente na parabolo $y = x^2$ v točki $(1, 1)$ je $y - 1 = 2(x - 1)$ oziroma $y = 2x - 1$, enačba normale pa $y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 1)$ oziroma $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

DEFINICIJA. Odvedljiva funkcija f je v točki x_0 *konveksna*, če za vsak dovolj majhen $h \neq 0$ velja $f(x_0+h) - f(x_0) > f'(x_0)h$, in *konkavna*, če za vsak dovolj majhen $h \neq 0$ velja $f(x_0 + h) - f(x_0) < f'(x_0)h$.



Slika 20

Geometrijsko pomeni, da leži graf konveksne funkcije v bližini točke x_0 nad tangento v tej točki, graf konkavne funkcije pa pod tangento v tej točki (glej sliko 20). Funkcija je konveksna (konkavna) na intervalu I, če je konveksna (konkavna) v vsaki točki tega intervala. Kvadratna funkcija $y = x^2$ in eksponentna funkcija $y = \mathrm{e}^x$ sta npr. konveksni na vsej realni osi, logaritmična funkcija $y = \ln x$ pa je na svojem definicijskem območju konkavna.

IZREK 1. *Odvedljiva funkcija f je v točki x_0 konveksna, če odvod f' v točki x_0 narašča, in konkavna, če odvod f' v točki x_0 pada.*

Dokaz. Če f' v točki x_0 narašča, za vsak dovolj majhen $h > 0$ velja $f'(x_0 - h) < f'(x_0) < f'(x_0 + h)$. Po Lagrangevem izreku potem obstajata točki $x_1 \in (x_0 - h, x_0)$ in $x_2 \in (x_0, x_0+h)$, tako da velja $f(x_0) - f(x_0 - h) = f'(x_1)h < f'(x_0)h$ in $f(x_0+h) + f(x_0) = f'(x_2)h > f'(x_0)h$. Torej je f konveksna. Podobno dokažemo konkavnost, kadar odvod v točki x_0 pada.

IZREK 2. *Naj bo f dvakrat odvedljiva v točki x_0.*
(a) *Če je $f''(x_0) > 0$, je funkcija f v točki x_0 konveksna.*
(b) *Če je $f''(x_0) < 0$, je funkcija f v točki x_0 konkavna.*

Dokaz. Če je $f''(x_0) > 0$, odvod f' v točki x_0 narašča, zato je funkcija f po izreku 1 konveksna in velja točka (a). Podobno dokažemo točko (b).

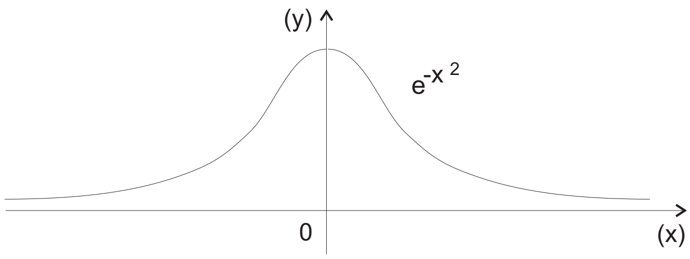
DEFINICIJA. Točko x_0, v kateri ni funkcija f niti konveksna niti konkavna, ampak leži njen graf v bližini točke x_0 tako na eni kot na drugi strani tangente na krivuljo $y = f(x)$ v točki x_0, imenujemo *prevoj.*

Slika 21

IZREK 3. *Potreben in zadosten pogoj za prevoj funkcije f v točki x_0 je lokalni ekstrem (maksimum ali minimum) odvoda f' v točki x_0. Če je funkcija f v točki x_0 dvakrat odvedljiva, je $f''(x_0) = 0$ samo potreben pogoj za prevoj.*

Dokaz. Sledi iz izrekov 1 in 2.

ZGLED. Poiščimo prevoje funkcije $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$. Ker je ta funkcija velikokrat odvedljiva je potreben pogoj $f''(x_0) = 0$. Prvi odvod je $f'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2}$, drugi odvod pa $f''(x) = (4x^2 - 2)\mathrm{e}^{-x^2}$. Torej je prevoj lahko le v točkah $x_0 = \pm 1/\sqrt{2}$. Ker ima tu prvi odvod res lokalni ekstrem, ima funkcija f prevoj.



Slika 22

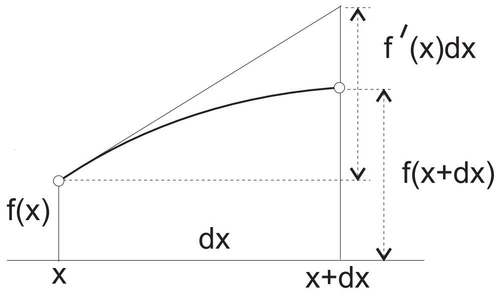
Diferencial

DEFINICIJA. *Diferencial* odvedljive funkcije f v točki x je izraz oblike $df(x) = f'(x)dx$, torej produkt odvoda funkcije f v točki x in diferenciala neodvisne spremenljivke dx (ki pomeni preprosto spremembo neodvisne spremenljivke: $dx = h$).

Ker je diferenčni kvocient pri majhnem h približno enak odvodu v točki x imamo približno formulo $f(x+h) - f(x) \approx f'(x)h$ oziroma

$$f(x + dx) \approx f(x) + f'(x)dx.$$

To formulo pogosto uporabljamo, kadar želimo približno oceniti vrednost funkcije v premaknjeni točki. Geometrijsko to pomeni, da vrednost funkcije v bližini dane točke ocenimo z vrednostjo tangente na krivuljo $y = f(x)$ v tej točki (glej sliko 23).



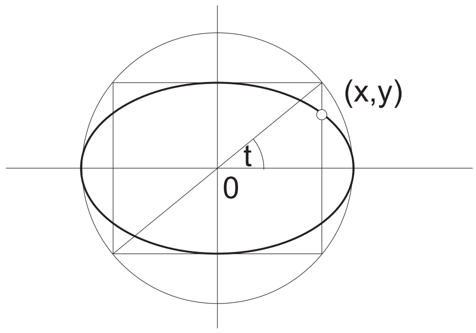
Slika 23

ZGLED. 1. Za $f(x) = \sqrt{x}$ je $f(x+dx) \approx \sqrt{x} + \frac{dx}{2\sqrt{x}}$, zato je npr. $\sqrt{1.02} \approx 1 + 0.02/2 = 1.01$.
2. Zaradi $\sin(x+dx) \approx \sin x + \cos x dx$ je npr. $\sin 1^0 \approx \sin 0 + \cos 0 \cdot \pi/180 = \pi/180 \approx 0.018$.

Krivulje v parametrični in polarni obliki

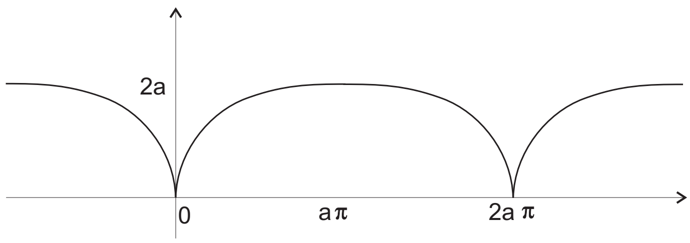
Pogosto podamo krivuljo v ravnini, ki predstavlja graf funkcije $y = f(x)$, tako da vpeljemo nov *parameter* (čas) t, od katerega sta odvisni obe spremenljivki: $x = x(t), y = y(t)$. Parameter t določa točko $(x(t), y(t))$ v ravnini (ki s spreminjanjem parametra opiše krivuljo).

ZGLEDI: 1. *Elipsa* v centralni legi je v parametrični obliki podana z enačbama $x = a\cos t,\ y = b\sin t$, kjer je $a > 0,\ b > 0$ in $0 \leq t \leq 2\pi$. Res, z eliminacijo parametra iz teh dveh enačb dobimo kanonično obliko elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Če je $a = b$, dobimo krožnico (glej sliko 24). Predstavljamo si lahko, da dobimo elipso tako, da točka (x, y) kroži po krožnici, v vsaki legi pa ordinato skrčimo v razmerju b/a; parameter t pri tem meri kot do točke na krožnici. Torej je elipsa štisnjena"krožnica.



Slika 24

2. *Cikloida* ima parametrične enačbe $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$, kjer je $a > 0$ in $t \in \mathbb{R}$. Geometrijsko nastane kot krivulja, ki jo oriše točka ana obodu krožnice s polmerom a, ko se brez drsenja kotali po realni osi, v začetku, pri $t = 0$ pa se op[azovana obodna točka ujema s koordinatnim izhodiščem (glej sliko 25)

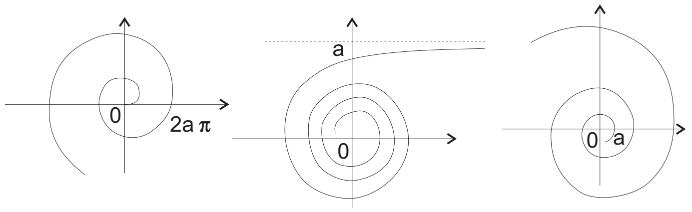


Slika 25

Pogosto je parameter $t = \phi$, *polarni kot*, ki lahko zavzame vsako vrednost na realni osi (pozitivno in negativno). Ker je zveza med kartezičnimi in polarnimi koordinatami dana z enačbama $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$, dobimo iz $x = x(\phi)$, $y = y(\phi)$, da se tudi polarna razdalja spreminja s kotom ϕ. Tako pridemo do *polarne oblike enačbe* krivulje: $r = r(\phi)$, kjer je r (polarna razdalja) lahko le pozitivna vrednost.

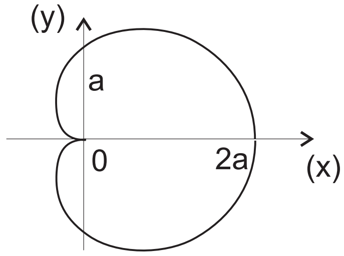
ZGLEDI. 1. Krožnica s polmerom $a > 0$ v centralni legi je podana s preprosto enačbo $r = a$, navpična premica, ki preseka abscisno os v točki a pa z $r = a/\cos\phi$. Tu je polarni kot v mejah med $-\pi/2$ in $\pi/2$.

2. Zelo zanimive in v naravi prisotne krivulje so različne spirale. *Arhimedova spirala* ima polarno enačbo $r = a\phi$. Tu je $a > 0$ in $\phi \geq 0$. *Hiperbolična spirala* je dana z enačbo $r = a/\phi$, $a > 0, \phi > 0$, *logaritemska* pa z $r = a\mathrm{e}^{m\phi}$. Tu je $a > 0$ in $m \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$, in parameter $\phi \in \mathbb{R}$. Če je $m > 0$ se spirala z rastočim ϕ odpira, za $m < 0$ pa zapira okrog koordinatnega izhodišča. Vse tri spirale so prikazane na sliki 26.



Slika 26

3. Še ena lepa krivlja v polarni obliki je *srčnica* (*kardioida*), dana z enačbo $r = a(1 + \cos\phi)$, kjer je $a > 0$ in $0 \leq \phi \leq \pi$. Prikazana je na sliki 27.



Slika 27

Tudi te krivulje lahko obravnavamo z odvodom, tako da najprej izračunamo diferenciale dx in dy, kot funkcije parametra t ali polarnega kota ϕ in nato upoštevamo, da je $y' = dy/dx$. V polarni obliki upoštevamo, da je $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$ in zato $dx = (r'\cos\phi - r\sin\phi)d\phi$ in $dy = (r'\sin\phi + r\cos\phi)d\phi$. Tako lahko npr. določimo enačbe tangent v poljubni točki take krivulje, poiščemo točke, v katerih so tangente vodoravne ali navpične, pa tudi druge zanimive točke.

ZGLED. 1. Za cikloido $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ je npr. $dx = a(1 - \cos t)dt$, $dy = a\sin t$ in zato $y' = \mathrm{ctg}(t/2)$. Zato je tangenta nanjo vodoravna v točkah, kjer je $\mathrm{ctg}(t/2) = 0$, torej $t = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, navpična pa v točkah, kjer ima funkcija $\mathrm{ctg}(t/2)$ pol, torej $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. Znano je, da logaritemska spirala s polarno enačbo $r = a\mathrm{e}^{m\phi}$ seka vsak poltrak iz izhodišča pod istim kotom. To spoznamo takole. Kot med poltrakom in krivuljo je v bistvu kot med poltrakom in tangento na krivuljo v presečišču, zato najprej izračunajmo smerni koeficient poljubne tangente. Ker je $r' = am\mathrm{e}^{m\phi}$ je $dx = a\mathrm{e}^{im\phi}(m\cos\phi - \sin\phi)d\phi$ in $dy = a\mathrm{e}^{im\phi}(m\sin\phi + \cos\phi)d\phi$. Torej je $y' = (m\sin\phi + \cos\phi)/(m\cos\phi + \sin\phi)$ naklon tangente na logaritemsko spiralo pri polarnem kotu ϕ. Spomnimo se, da je to isto kot $\mathrm{tg}\alpha$, kjer je α naklonski kot tangente. Naklonski kot poltraka je seveda ϕ, kot med njima

pa iskani kot $\beta = \alpha - \phi$ (glej sliko 27c). Njegov tangens je po znanih trigonometričnih formulah in po krajšem računu enak

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\phi}{1 + \mathrm{tg}\alpha \mathrm{tg}\phi} = \frac{(m \sin\phi + \cos\phi)\cos\phi - (m\cos\phi - \sin\phi)\sin\phi}{(m\cos\phi - \sin\phi)\cos\phi + (m\sin\phi + \cos\phi)\sin\phi} = \frac{1}{m}.$$

Vidimo, da je kot β neodvisen od ϕ, torej konstanten.

3. Integriranje funkcij

Poleg odvajanja funkcij je za uporabo pomembno, da jih znamo tudi integrirati. Brez integriranja npr. ne bi mogli reševatiu diferencialnih enačb (glej zadnji razdelek).

(a) Nedoločeni integral

Iskanje nedoločenega integrala neke funkcije je obraten problem kot iskanje odvoda: Dana je (zvezna) funkcija f, iščemo tako odvedljivo funkcijo F, da je $F'(x) = f(x)$ za vsak x.

Nedoločeni integral ni enolično določen, funkciji F lahko prištejemo katerokoli konstanto: $(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x)$. Poljubna dva nedoločena integrala se razlikujeta le za aditivno konstanto: Če je $G'(x) = F'(x)$, je $(G(x) - F(x))' = 0$ in zato $G(x) = F(x) + C$ po posledici Lagrangevega izreka.

Nedoločeni integral zapišemo z integralskim znakom: $F(x) = \int f(x)dx$. Zapis izhaja iz Leibnizove pisave odvoda $y' = \frac{dy}{dx}$. Če je $\frac{dy}{dx} = f(x)$, je $dy = f(x)dx$ in $y = \int f(x)dx$. Funkcijo, ki jo integriramo, imenujemo na kratko *integrand.*

ZGLED. $\int 2xdx = x^2 + C$, $\int \cos xdx = \sin x + C$. Tu je C poljubna konstanta.

Za preproste funkcije lahko njihov integral kar uganemo in ga zapišemo v tabelo.

Tabela elementarnih integralov

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C \qquad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}x + C$$

$$\int \mathrm{e}^x dx = \mathrm{e}^x + C \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}x + C$$

$$\int a^x = \frac{a^x}{\ln a} + C \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$\int \sin xdx = -\cos x + C \qquad \int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}x + C$$

$$\int \cos xdx = \sin x + C \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln(x + \sqrt{x^2+a}) + C$$

V zadnjem primeru z odvajanjem naknadno preverimo, da je dobljena funkcija res nedoločen integral dane funkcije. Pri drugih funkcijah z ugibanjem ne gre. Potrebno je poznati nekatera splošna pravila za integriranje. Oglejmo si tri osnovne metode.

Metoda dekompozicije

Integrand skušamo preoblikovati, največkrat prevesti na vsoto ali razliko znanih integralov. Pri tem upoštevamo, da velja:
1) $\int(u(x)+v(x))dx = \int u(x)dx + \int v(x)dx$
2) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$.
Ti dve pravili preverimo z odvajanjem (up3tevamo, da podobno velja za odvode).

ZGLEDI. (a) $\displaystyle\int((2x-1)^2+3x^2)dx = \int(7x^2-4x+1)dx = 7\int x^2dx - 4\int xdx + \int dx = 7x^3/3 - 2x^2 + x + C$
(b) $\displaystyle\int \frac{x^2+4}{x^2+1}dx = \int dx + 3\int\frac{dx}{x^2+1} = x + 3\mathrm{arctg}x + C$

Metoda substitucije

Uvedemo novo integracijsko spremenljivko t, tako da je $x = x(t)$ odvedljiva funkcija. Pri tem se spremeni tudi diferencial $dx = x'(t)dt$ in s tem celoten integrand:

$$\int f(x)dx = \int f(x(t))x'(t)dt$$

Če smo substitucijo $x = x(t)$ izbrali pametno, je novi integral preprostejši od prejšnjega in ga znamo rešiti direktno.

ZGLEDI. (a) $\displaystyle\int\frac{dx}{2x-1} = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln t + C = \frac{1}{2}\ln(2x-1)+C$; uvedli smo substitucijo $x = \frac{1}{2}t+1$ oziroma $2x-1=t$. Na sploh je $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)$, če je $\int f(x)dx = F(x)$.
(b) $\displaystyle\int \mathrm{tg}x dx = -\int\frac{dt}{t} = -\ln t + C = -\ln\cos x + C$. Zdaj je dobra izbira $x = \arccos t$ oziroma $\cos x = t$, saj je $-\sin x dx = dt$.
(c) $\displaystyle\int\frac{3x^2dx}{\sqrt{x^3+1}} = \int\frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t}+C = 2\sqrt{x^3+1}+C$. Tu smo izbrali $x^3+1=t$ in dobili $3x^2dx = dt$. Še bolje bi bilo izbrati $x^3+1=t^2$. S tem bi hkrati odpravili tudi kvadratni koren iz drugega integrala in dobili še bolj preprost integral.

Metoda integracije po delih (per partes)

Formula za integracijo per partes je $\int udv = uv - \int vdu$, kjer sta u in v funkciji spremenljivke x. Izpeljemo jo iz dejstva, da je $uv = \int d(uv) = \int(udv+vdu) = \int udv + \int vdu$. Integriranje po delih uporabljamo, kadar je integrand produkt dveh raznorodnih funkcij, npr. produkt polinoma in eksponentne (logaritemske, trigonometrične) funkcije ali produkt eksponentne in trigonometrične funkcije.

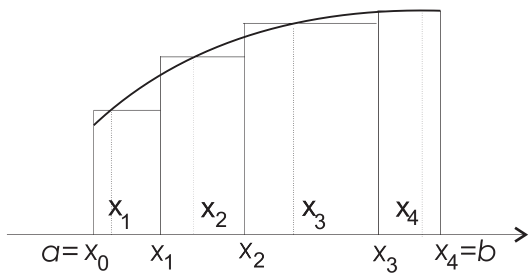
ZGLEDI. (a) $\displaystyle\int x\ln x dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$. Izbrali smo $u = \ln x$ in $dv = xdx$.
(b) $\displaystyle\int x^2\mathrm{e}^x dx = x^2\mathrm{e}^x - 2\int x\mathrm{e}^x dx = x^2\mathrm{e}^x - 2(x\mathrm{e}^x - \int\mathrm{e}^x dx) = x^2\mathrm{e}^x - 2x\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^x + C = (x^2-2x+2)\mathrm{e}^x$. Zdaj smo morali dvakrat integrirati per partes. Prvič smo izbrali $u = x^2$, drugič $u = x$, obakrat pa $dv = \mathrm{e}^x$.

Pri nekaterih tipih integralov, npr. pri integriranju racionalnih funkcij, ali pri integralih, kjer nastopajo kvadratni koreni iz kvadratnih izrazov, so potrebni posebni prijemi. V teorijo integriranja takih funkcij se tu ne bomo spuščali. Naj zadošča preprost zgled, kjer racionalno funkcijo pred integracijo razstavimo na ti. parcialne ulomke. Uporabimo torej neko varianto metode dekompozicije.

ZGLED. Zaradi $\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1})$ je $\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x+1}\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1} + C$.

(b) Določeni integral

Izberemo poljubno delitev intervala $[a,b]$ na n podintervalov z $n-1$ vmesnimi točkami: $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$. Dolžina k-tega podintervala je $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, na njem si izberemo poljubno točko $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ in sestavimo t.i. *integralsko vsoto* funkcije f na intervalu $[a,b]$, definirano z $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ (glej sliko 28).



Slika 28

DEFINICIJA. Število I imenujemo *določeni integral* realne funkcije f na intervalu $[a,b]$, če velja

$$I = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Ta limita ne obstaja vedno; res pa se da dokazati, da obstaja za vsako zvezno funkcijo f na intervalu $[a,b]$ (dokaz izpustimo). Kadar limita obstaja, rečemo, da je funkcija f na intervalu $[a,b]$ integrabilna. V bodoče bomo integrirali samo preproste funkcije. Ker je vsaka elementarna funkcija zvezna na vsakem intervalu, na katerem je definirana, bodo praktično vse naše funkcije integrabilne.

ZGLED. Izračunajmo po definiciji določeni integral $\int_a^b x dx$, tako da za poseno točko izberemo aritmetično sredino podintervala, tj. $\xi_k = (x_k + x_{k-1})/2$. Dobimo

$$\int_a^b x dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k + x_{k-1}}{2}(x_k - x_{k-1}) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(x_k^2 - x_{k-1}^2) = \frac{b^2-a^2}{2}.$$

Izračun je bil dokaj enostaven, ker je bil integrand preprost. V bolj zapletenih primerih to ne bi delovalo.

Lastnosti določenega integrala

Za uspešno integriranje je potrebno poznati nekatere osnovne lastnosti določenega integrala. Brez dokazovanja naštejmo nekaj teh lastnosti. Izpeljali bi jih lahko iz definicije (podobne lastnosti bi veljale za integralsko vsoto, limita pa bi jih ohranjala).

1. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du$.

   Vidimo, da ime integracijske spremenljivke ni pomembno.

2. $\int_a^b (cf(x) + dg(x))dx = c\int_a^b f(x)dx + d\int_a^b g(x)dx$.

   Rečemo, da je določeni integral linearni funkcional (deluje linearno na funkcije).

3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, če $a < c < b$.

   Rečemo, da je določeni integral aditivna funkcija integracijskega območja.

4. $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$.

   Z zamenjavo mej se predznak integrala spremeni. Posledica je $\int_a^a f(x)dx = 0$. Poleg tega zaradi točke 4 velja točka 3 tudi v primeru, ko $c \notin (a,b)$.

5. Iz $f(x) \leq g(x)$ sledi $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$, če $a < b$.
Rečemo, da je določeni integral monotoni funkcional.

6. $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$, če $a < b$.

   To takoj sledi iz točke 5.

7. Iz $m \leq f(x) \leq M$ na $[a,b]$ sledi $m \leq \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq M$.

   Tudi to dobimo iz točke 5. Izraz $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ imenujemo *povprečna vrednost* funkcije f na intervalu $[a,b]$. Vidimo, da leži med m in M.

   Omenimo še pomembno posledico točke 7. Če je f zvezna funkcija, obstaja $\xi \in [a,b]$, da velja $f(\xi) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ To sledi iz znanega dejstva, da zvezna funkcija zavzame vsako vrednost med najmanjšo in največjo.

Zveza med določenim in nedoločenim integralom

Računanje določenega integrala po definiciji je zelo komplicirano, zato je ugodno poznati še druge načine. Izpeljimo osnovno povezavo med določenim in nedoločenim integralom.

Naj bo f zvezna funkcija na intervalu $[a,b]$. Definirajmo $G(x) = \int_a^x f(t)dt,\ x \in [a,b]$. Tedaj je:

1. G zvezna funkcija zgornje meje x:

$$G(x+h) - G(x) = \int_x^{x+h} f(t)dt = hf(\xi) \to 0\ (h \to 0).$$

2. G odvedljiva funkcija zgornje meje x:

$$\frac{G(x+h) - G(x)}{h} = f(\xi) \to f(x)\ (h \to 0)$$

Torej je $G'(x) = f(x)$ za vsak x in G je nedoločeni integral funkcije f. Če je F poljuben drug nedoločeni integral funkcije f, je kot znano, $F(x) = \int_a^x f(t)dt + C$. Ker je $F(a) = C$, velja $F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)dt$.

Vstavimo točko $x = b$, pa dobimo *osnovno formulo integralskega računa*:

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Metode za računanje določenega integrala

1. **Z osnovno formulo**. Najprej izračunamo nedoločeni integral, nato pa vstavimo meje.

ZGLED: $\int_0^\pi \sin x dx = -\cos x|_0^\pi = 2$.

2. **Substitucija**. Izberemo *monotono* funkcijo $x = x(t)$, kjer je $\alpha \leq t \leq \beta$ in $x(\alpha) = a,\ x(\beta) = b$. Dobimo $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x(t))x'(t)dt$.

ZLED: (a) V integral $\int_0^1 \sqrt{x+1}dx$ uvedemo substitucijo $\sqrt{x+1} = t$ oziroma $x = t^2 - 1$. Dobimo $dx = 2tdt$, integral pa je enak $2\int_1^{\sqrt{2}} t^2 dt = 2(2\sqrt{2} - 1)/3$.
(b) Če v integral $I = \int_0^{\mathrm{e}} \frac{\ln^2 x}{x} dx$ uvedemo substitucijo $x = \mathrm{e}^t$, $0 \leq t \leq 1$, dobimo $I = \int_0^1 t^2 dt = 1/3$.

3. **Metoda per partes**. Formula je podobna kot pri nedoločenem integralu, le da upoštevamo tudi meje: $\int_a^b u dv = uv|_a^b - \int_a^b v du$.

ZLED: $\int_0^\pi x \sin x dx = (-x\cos x)_0^\pi + \int_0^\pi \cos x dx = \pi + \sin x|_0^\pi = \pi$.

(c) Posplošeni integral

Pod tem pojmom razumemo bodisi integral zvezne funkcije na neomejenem intervalu (poltraku ali celi realni osi) bodisi integral funkcije, ki ni definirana v izolirani točki omejenega intervala.

1. *Neomejen integracijski interval*

Po definicije je tak posplošen integral enak

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx$$

ZGLEDI. (a) $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} dx = \lim_{b\to\infty}(1 - \mathrm{e}^{-b}) = 1$, (b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{2x dx}{x^2+1} = \lim_{b\to\infty} \ln(b^2+1) = \infty$.

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \lim_{a\to-\infty, b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$$

ZGLED. Pri integralu $I = \displaystyle\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-x^2} dx$ ocenimo integrand z $\mathrm{e}^{-x^2} \leq 1/(1+x^2)$ (glej razdelek o limitah). Ker sta obe funkciji pozitivni in je $I \leq \displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} = 2 \leq \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \pi$, je tudi prvi integral končen.

2. *Neomejene funkcije*

Naj ima funkcija najprej singularno točko v desnem krajišču. Potem je po definiciji

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon \to 0} \int_a^{b-\epsilon} f(x)dx.$$

ZGLEDI. (a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1-x} = \lim_{\epsilon \to 0}(1 - \ln\epsilon) = \infty$, (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2\lim_{\epsilon \to 0}(1 - \sqrt{\epsilon}) = 2.$

Če ima funkcija f singularnost v levem krajišču, je

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{a+\epsilon}^{b} f(x)dx,$$

če ima f singularnost v točki a.

ZGLED. $\displaystyle\int_0^1 \ln x dx = \lim_{\epsilon \to 0}(\epsilon - \epsilon\ln\epsilon - 1) = -1.$

Kadar je singularnost v vmesni točki c, $a < c, b$, integral zapišemo v obliki $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ in problem prevedemo na oba prejšnja primera.

Z uporabo posplošenih integralov je mogoče izpeljati priročen kriterij za konvergenco vrst s pozitivnimi členi.

TRDITEV. *Naj bo funkcija f na poltraku $[1, \infty)$ pozitivna in padajoča. Potem velja $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(n) < \infty$ natanko takrat, ko je $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)dx < \infty$.*

Dokaz. Ker je $f(x) > 0$ in $f(x) \geq f(y)$ za $x \leq y$, velja za vsak $n \geq 1$ in za vsak $x \in [n, n+1]$ ocena $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$ in zato (s sumacijo po vseh n) tudi

$$\sum_{n=2}^{\infty} f(n) \leq \int_1^{\infty} f(x)dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

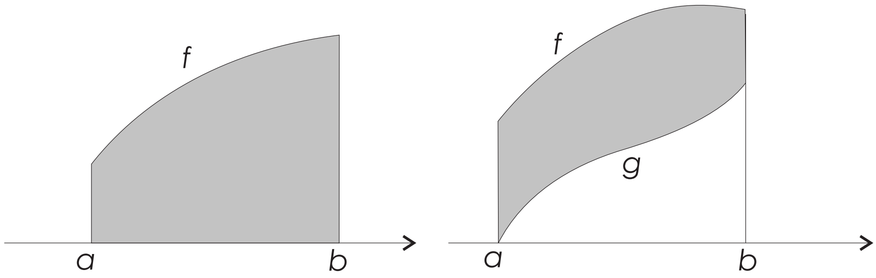
ZGLED. Vrsta s členi $1/n$ divergira, ker je $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \infty$, vrsta s členi $1/n^2$ pa konvergira, ker je $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = 1.$

(č) Uporaba določenega integrala

Brez integriranja modernih matematičnih metod v naravoslovju ni. Večina zahtevnejših fizikalnih količin in izrekov ni mogoče niti formulirati oziroma obravnavati brez integralov. tu si bomo ogledali le nekaj bolj preprostih geometrijskih aplikacij.

1. *Računanje ploščin likov.*

Če je $f(x) \geq 0$ na $[a, b]$, je ploščina lika, ki ga na intervalu $[a, b]$ oklepajo krivulja $y = f(x)$, abscisna os in obe ordinati v krajiščih (slika 29a), enaka $p = \displaystyle\int_a^b f(x)dx.$



Slika 29

Če je $f(x) \geq g(x)$ na $[a, b]$ (slika 29b), je ploščina med njima na $[a, b]$ enaka $p = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$.

ZGLEDI. (a) Ploščino kroga lahko izračunamo z integralom $p = 4\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx$. Uvedemo substitucijo $x = a\sin t$. Torej je $dx = a\cos t dt$ in

$$p = 4a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = 2a^2 \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t)dt = a^2\pi.$$

(b) Ploščino med sinusom in kosinusom na intervalu $[0, 2\pi]$ izračunamo z integralom

$$\int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\sin x - \cos x)dx = 2\sqrt{2}.$$

(c) Ploščino enega loka cikloide izračunamo z

$$p = \int_0^{2a\pi} y dx = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t)a(1 - \cos t)dt =$$

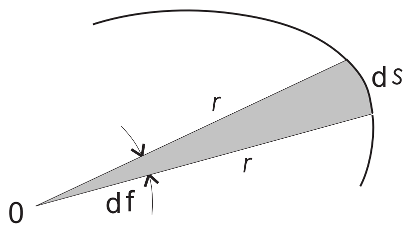
$$a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)dt = 4a^2 \int_0^{\pi/2} (1 + \cos^2 t)dt = 3a^2\pi.$$

Upoštevali smo, da je $y = a(1 - \cos t)$ in $dx = a(1 - \cos t)dt$.
(d) Ploščina pod krivuljo $y = 1/(1 + x^2)$ na $(-\infty, \infty)$ pa je enaka $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2} = \pi$.

Če je krivulja podana v polarnih koordinatah z enačbo $r = r(\phi)$, $\alpha \leq \phi \leq \beta$, je ploščina krivuljnega izseka podana s formulo:

$$p = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\phi)d\phi.$$

To formulo izpeljemo iz definicije določenega integrala. Pri tem uopštevamo, da je izraz $\frac{1}{2}r^2 d\phi$ enak ploščini enakokrakega trikotnika s krakom r in vmesnim kotom $d\phi$ (slika 30).



Slika 30

ZGLED. (a) Ploščino kroga bi lažje izračunali s formulo $p = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2 d\phi = a^2\pi$.
(b)Ploščina enega polnega zavoja Arhimedove spirale $r = a\phi$ je enaka $p = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2\phi^2 d\phi = 4a^2\pi^3/3$.

2. *Računanje ločnih dolžin.*

Za krivuljo z enačbo v eksplicitni obliki $y = f(x)$ je

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}dx,$$

saj je $ds^2 = dx^2 + dy^2 = (1 + y'2)dx^2$.

ZGLED. Obseg krožnice je enak štirikratni dolžini krivulje $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ na intervalu $[0, a]$. Po kratkem računu dobimo $s = 4a \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 4a \arcsin 1 = 2a\pi$.

Če je krivulja podana v parametrični obliki, je formula za njeno dolžino

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}dt.$$

ZGLED. (a) Obseg krožnice, podane v parametrični obliki z $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, je spet $s = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t}dt = 2a\pi$.
(b) Dolžina enega loka cikloide z enačbo $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ je

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2\sin^2 t}dt = 2a\int_0^{2\pi} \sin(t/2)dt = 8a.$$

To predstavlja štiri premere kotaleče se krožnice.

Krivulje v polarni obliki obravnavamo kot parametrične krivulje s parametrom π. V tem primeru je $ds^2 = dx^2 + dy^2 = ((r'\cos\phi - r\sin\phi)^2 + (r'\sin\phi + r\cos\phi)^2)d\phi^2 = (r^2 + r'^2)d\phi^2$. Formula je zdaj torej

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{r(\phi)^2 + r'(\phi)^2}d\phi.$$

ZGLED. Spet izračunajmo obseg kroga $r = a$ $(r' = 0)$. Dobimo $s = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2}d\phi = 2a\pi$.

3. *Računanje prostornine rotacijskih teles.*

Kadar se krivulja $y = f(x)$ zavrti okrog abscisne osi, je prostornina dobljene vrtenine na intervalu enaka

$$V = \pi\int_a^b y^2dx.$$

ZGLED. Prostornino stožca s polmerom r in višino h dobimo z vrtenjem premice $y = rx/h$ okrog abscisne osi na intervalu $[0, h]$. Torej je $V = \frac{\pi r^2}{h^2}\int_0^h x^2dx = \pi r^2h/3$.

4. *Računanje površine rotacijskih teles.*

Formula je zdaj

$$P = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}dx$$

ZGLED. Površina paraboloida $y = \sqrt{x}$ na intervalu [0,1] je

$$P = 2\pi \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \sqrt{2x+1}dx = \frac{1}{3\sqrt{2}}(3\sqrt{3}-1).$$

Vpeljali smo substitucijo $\sqrt{2x+1} = t$.

4. Taylorjeva formula in Taylorjeva vrsta

Taylorjeva formula

Imejmo funkcijo f, ki je poljubnokrat odvedljiva na realni osi. Po osnovni formuli integralskega računa je

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt,$$

kar lahko z večkratno uporabo integracije po delih zapišemo

$$f(x) - f(a) = (x-a)f'(a) + \int_a^x (x-t)f''(t)dt =$$

$$= (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}f''(a) + \frac{1}{2}\int_a^x (x-t)^2 f'''(t)dt =$$

$$= (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!}f'''(a) + \frac{1}{3!}\int_a^x (x-t)^3 f^{iv}(t)dt.$$

Splošno dobimo t.i. *Taylorjevo formulo*

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!}f'''(a) + ... + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) +$$

$$+\frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt.$$

Prvi del

$$P_n(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!}f'''(a) + ... + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)$$

imenujemo *Taylorjev polinom*, drugi del

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$$

pa *ostanek Taylorjeve formule* (v integralski obliki). Ostanek lahko za $n+1$-krat zvezno odvedljive funkcije zapišemo tudi v dugi obliki. Ker je $m \le f^{(n+1)}(t) \le M$, pri čemer sta m in M natančni meji, je

$$\frac{m}{n!}\int_a^x (x-t)^n dt \le R_n(x) \le \frac{M}{n!}\int_a^x (x-t)^n dt$$

oziroma

$$\frac{m}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \le R_n(x) \le \frac{M}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Ker je $f^{(n+1)}(t)$ zvezna funkcija na $[a,x]$ in je po zgornjem $m \leq (n+1)!R_n(x)/(x-a)^{n+1} \leq M$, obstaja vsaj ena točka $\xi \in [a,x]$, tako da velja $f^{(n+1)}(\xi) = (n+1)!R_n(x)/(x-a)^{n+1}$ oziroma

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

To je ostanek v t.i. *Lagrangevi obliki.*

Če je $n+1$-ti odvod funkcije f zvezen, lahko ostanek zapišemo še v eni obliki. Po izreku o povprečni vrednosti, dobimo iz integralske oblike

$$R_n(x) = \frac{x-a}{n!}(x-\xi)^n f^{(n+1)}(\xi)$$

za neko točko ξ, ki leži med a in x. To je t.i. *Cauchyjeva oblika* ostanka.

Včasih se da pokazati, da za nekatere vrednosti x (vsaj v bližini točke a) z naraščanjem n preko vsake meje tudi ostanek $R_n(x)$ konvergira proti 0. V tem primeru imamo namesto končne Taylorjeve formule t.i. *Taylorjevo vrsto*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Pravimo, da smo funkcijo f *razvili* okrog točke a v potenčno (Taylorjevo) vrsto. V posebnem primeru, kadar je $a = 0$, govorimo raje o *McLaurinovi vrsti*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Primeri Taylorjevih (McLaurinovih) razvojev

1. **Eksponentna funkcija in vrsta**

$f(x) = \mathrm{e}^x,\ f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^x,\ f^{(n)}(0) = 1.$ Torej dobimo

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$$

Ker je ostanek v Lagrangevi obliki enak $R_n(x) = \frac{\mathrm{e}^\xi}{(n+1)!}x^{n+1},\ 0 < \xi < x$, in ga lahko ocenimo z $|R_n(x)| \leq \frac{x^{n+1}\mathrm{e}^x}{(n+1)!} \to 0,\ (n \to \infty)$, eksponentna vrsta konvergira za vsak $x \in \mathbb{R}$.

2. **Vrsti za sinus in za kosinus**

$f(x) = \sin x,\ f^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \cos x,\ f^{(2n)}(x) = (-1)^n \sin x,\ f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n,$ $f^{(2n)}(0) = 0$. Tako imamo

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...$$

Podobno kot prej vidimo, da vrsta konvergira za vsak $x \in \mathbb{R}$.

Za funkcijo $f(x) = \cos x$ imamo $f^{(2n)}(x) = (-1)^n \cos x,\ f^{(2n+1)}(x) = (-1)^{n-1} \sin x$ in zato

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ...$$

Vrsta spet konvergira za vsak $x \in \mathbb{R}$.

3. **Vrsta za logaritemsko funkcijo**

Sedaj vzemimo funkcijo $f(x) = \ln(1+x)$, za katero je $f(0) = 0$. Odvodi pa so po vrsti $f'(x) = \frac{1}{1+x}$, $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$, $f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$, itd. Splošno je

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n} \quad \text{in} \quad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

Torej dobimo

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ...$$

Ta vrsta pa konvergira samo za $-1 < x \leq 1$, kar najlažje spoznamo po kvocientnem kriteriju za absolutno konvergenco v primeru $-1 < x < 1$. V točki -1, dobimo divergentno harmonično vrsto, v točki 1 pa konvergentno alternirajočo vrsto. Isto bi lahko spoznali tudi iz ostanka v Lagrangevi in Cauchyjevi obliki (glej Vidav), od koder bi tudi videli, da pri pogoju $-1 < x \leq 1$ vrsta konvergira ravno proti $\ln(1+x)$.

4. **Binomska vrsta**

Vzemimo funkcijo $f(x) = (1+x)^m$, kjer je m poljubno realno število. Sedaj je $f^{(n)}(x) = m(m-1)...(m-n+1)(1+x)^{m-n}$ in $f^{(n)}(0) = m(m-1)...(m-n+1)$. Torej dobimo vrsto

$$(1+x)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} x^n = 1 + \binom{m}{1} x + \binom{m}{2} x^2 + \binom{m}{3} x^3 + ...$$

Vrsta sedaj konvergira (absolutno) za $-1 < x < 1$, kar najhitreje vidimo s kvocientnim kriterijem. Da pri tem pogoju konvergira ostanek proti 0, je veliko težje videti (glej Vidav), zato se dokazu odpovejmo.

Zgled. 1. V primeru $m = -1$ zaradi $\binom{-1}{n} = (-1)^n$ dobimo

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + ...,$$

se pravi geometrijsko vrsto, ki, kot vemo, konvergira pri $|x| < 1$. Če v njej zamenjamo x z $-x$, pridemo do običajne vrste

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + ...,$$

2. Za $m = 1/2$ dobimo $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + ...$, za $m = -1/2$ pa $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + ...$ Obakrat velja konvergenca pri $-1 < x \leq 1$.

Uporaba Taylorjeve formule in Taylorjeve vrste

(a) Pri risanju funkcij si lokalno lahko pomagamo z aproksimativnimi formulami (začetnimi odseki Taylorjeve vrste), npr. $\mathrm{e}^x \approx 1 + x$, $\mathrm{e}^{-x} \approx 1 - x$, $\cos x \approx 1 - x^2/2$, $\sin x \approx x$, ali $\sin x \approx x - x^3/6$ itd. Ti približki so začetni Taylorjevi polinomi. Z rastočim n čedalje bolje opisujejo vedenje funkcije f v bližini začetne točke a.

(b) Z začetnimi členi Taylorjeve vrste si lahko pomagamo tudi pri računanju limit velikokrat odvedljivih funkcij (namesto L'Hospitalovega pravila), npr.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3/6 - ...}{x^3} = 1/6.$$

(c) Ostanek Taylorjeve formule je v bližini točke a zelo majhen. To dejstvo lahko izkoristimo pri ugotavljanju, ali je v stacionarni točki a res ekstrem. Naj bo npr. $f'(a) = f''(a) = ... = f^{(n-1)}(a) = 0$ in $f^{(n)}(a) \neq 0$. Teda je po Taylorjevi formuli reda n

$$f(x) - f(a) = \frac{(x-a)^n}{n!}\left[f^{(n)}(a) + \int_a^x \left(\frac{x-t}{x-a}\right)^n f^{(n+1)}(t)dt\right].$$

Če je n sodo število, je predznak desne strani v bližini točke a odvisen samo od predznaka $f^{(n)}(a)$: če je to število pozitivno, dobimo minimum, če negativno pa maksimum. Če pa je n liho število, se ne glede na predznak pri $f^{(n)}(a)$ predznak desne strani spreminja glede na to, ali je $x > a$ ali $x < a$. V tem primeru pa imamo prevoj.

(č) Vrsta za eksponentno funkcijo je ugodna za računanje njenih vrednosti na veliko decimalk natančno, ker razmeroma hitro konvergira. Izkoristimo jo lahko tudi za izpeljavo znamenite *Eulerjeve formule*

$$\mathrm{e}^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Če v vrsto za e^x formalno vstavimo ix namesto x (i je imaginarna enota), dobimo po združitvi realnih in imaginarnih členov

$$\mathrm{e}^{ix} = (1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ...) + i(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ...) = \cos x + i \sin x.$$

To formulo bomo uporabili pri diferencialnih enačbah.

(d) *Računanje logaritmov na več decimalk natančno.* Uporabljamo razvoje v vrsto

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ...)$$

(za $-1 < x < 1$) in

$$\ln(a+1) + \ln(a-1) - 2\ln a = \ln(1 - a^{-2}) = \ln\frac{1-(2a^2-1)^{-1}}{1+(2a^2-1)^{-1}} =$$

$$= -2(\frac{1}{2a^2-1} + \frac{1}{3(2a^2-1)^3} + ...)$$

za $a > 1$. V prvega vstavimo npr. $x = 1/3$ pa dobimo $\ln 2$, vrednost $\ln 3$ nato izračunamo iz drugega, če vstavimo $a = 2$. Po istih formulah izračunamo tudi logaritme večjih naravnih števil. Če bi npr. $ln2$ računali iz osnovne logaritemske vrste, bi dobili $\ln 2 = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + ...$ Na desni imamo tu znano alternirajočo vrsto, za katero sicer vemo, da je konvergentna, vendar je njena konvergenca silno počasna.

(e) *Računanje korenov.* Npr. $\sqrt{2} = \sqrt{1+1} = 1 + 1/2 - 1/8 + ...$ prepočasi konvergira, zato $5\sqrt{2} = \sqrt{50} = 7\sqrt{\frac{50}{49}} = 7(1 - \frac{1}{50})^{-1/2} = 7(1 + 1/100 + 3/2.100^2 + ...)$.

IV. FUNKCIJE DVEH SPREMENLJIVK IN DIFERENCIALNE ENAČBE

1. Funkcije dveh spremenljivk

Funkcije dveh spremenljivk so definirane na podmnožicah koordinatne ravnine. Če je D taka podmnožica, so njeni elementi točke (x, y), predstavljene z dvema koordinatama, x in y. Razdalja med dvema takima točkama je *evklidska*:

$$d((x, y), (a, b)) = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}.$$

Epsilonsko okolico točke (a, b) sestavljajo vse tiste točke (x, y), ki so od (a, b) oddaljene za manj kot ϵ, torej

$$V_\epsilon(a, b) = \{(x, y); d((x, y), (a, b)) < \epsilon\}.$$

Zaporedje točk $(x_n, y_n) \in D$ konvergira proti točki (a, b), če so od nekega indeksa dalje vsi njegovi členi v epsilonski okolici točke (a, b). Preprosto se da preveriti, da zaporedje (x_n, y_n) konvergira proti (a, b) natanko takrat, ko x_n konvergira k a in y_n konvergira k b.

Definicija in zveznost funkcije dveh spremenljivk

Definicija. *Funkcija dveh spremenljivk* je predpis, ki vsaki točki (x, y) iz ravninske množice D (definicijskega območja) priredi natanko določeno realno število z.

Odvisnost števila z od točke (x, y) zapišemo $z = f(x, y)$. Pri tem sta x in y neodvisni spremenljivki, z pa odvisna spremenljivka.

Graf funkcije $G_f = \{(x, y, z); z = f(x, y)\}$ je množica v trirazsežnem prostoru. Kadar je funkcija f zvezna, pomeni graf neko ploskev nad ravninskim območjem D.

Zgled. $z = c$, $z = ax + by + c$ (ravnina), $z = x^2 + y^2$(rotacijski paraboloid), $z = xy$ (hiperbolični paraboloid), $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ (polkrogla).

Podobno kot smo to storili pri funkciji ene spremenljivke, tudi sedaj definiramo limito funkcije dveh spremenljivk.

Definicija. Število c je limita funkcije dveh spremenljivk f v točki (a, b), če za vsako zaporedje točk $(x_n, y_n) \in D \setminus \{(a, b)\}$, ki konvergira k (a, b), ustrezno zaporedje funkcijskih vrednosti $f(x_n, y_n)$ konvergira k c.

Zapis: $c = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$. Seveda limita ne obstaja vedno.

Zgled. Funkcija $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ npr. nima limite v točki $(0, 0)$. Ko se približujemo točki $(0, 0)$ iz različnih smeri, dobivamo različne vrednosti. Vzdolž koordinatnih osi dobimo npr. 0, vzdolž premice $y = x$ dobimo $1/2$, vzdolž premice $y = -x$ pa $-1/2$.

Definicija. Funkcija je v točki $(a, b) \in D$ zvezna, če je tam njena vrednost enaka limiti, $f(a, b) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$.

Zveznost funkcije dveh spremenljivk po tej definiciji ni isto kot zveznost po vsaki spremenljivki posebej. To lahko vidimo iz prejšnjega zgleda, če dodatno definiramo $f(0,0)=0$.

Parcialni odvodi in totalni diferencial

Parcialna odvoda po x ali po y definiramo kot limiti parcialnih diferenčnih kvocientov.

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$
$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{k\to 0} \frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}.$$

Parcialna odvoda torej izračunamo tako, da odvajamo funkcijo na x ali na y, pri čemer smatramo drugo spremenljivko za konstanto.

Zgled. $z = 3x^2y,\ z = x\sin\frac{x}{y}$.

Prav tako lahko definiramo višje parcialne odvode:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x}),\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}),\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}),\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y})$$

Če so zvezni, so mešani odvodi enaki ne glede na vrstni red odvajanja. To dejstvo večkrat s pridom uporabljamo.

Definicija. Pravimo, da je funkcija f dveh spremenljivk v točki (x,y) odvedljiva (diferenciabilna), če obstajata konstanti A,B, da velja

$$\lim_{h\to 0,k\to 0} \frac{f(x+h,y+k)-f(x,y)-(Ah+Bk)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

Če je funkcija f odvedljiva, je $A = \frac{\partial f}{\partial x}$ in $B = \frac{\partial f}{\partial y}$. Pogosto pišemo $h = dx$ in $k = dy$.

Definicija. Izraz $Ah + Bk = \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy$ imenujemo *totalni diferencial* funkcije f.

Običajno zapišemo $df = \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy$ ali $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy$.

Zgled. Izračunajte totalni diferencial za $z = 3x^2y$ in $z = x\sin\frac{x}{y}$.

Totalni diferencial uporabljamo npr. pri ocenjevanju napak. Tako je za produkt $z = xy$ totalni diferencial $dz = ydx + xdy$, za kvocient $z = \frac{x}{y}$ pa

$$dz = \frac{ydx - xdy}{y^2}.$$

Totalni diferencial pomeni oceno za *absolutno napako.* Pogosto pa je pomebnejša *relativna napaka.* Ocena zanjo pa je $\frac{dz}{z}$. Pri produktu dobimo

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}$$

(relativni napaki faktorjev se seštejeta), pri kvocientu pa

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}$$

(relativni napaki se odštejeta).

Odvajanje posrednih funkcij

Naj bo $z = z(u, v)$, kjer je $u = u(x, y)$ in $v = v(x, y)$. Spremenljivka z je torej posredna funkcija spremenljivk x in y, spremenljivki u in v sta le posrednika. Za odvode na x in y velja v tem primeru naslednje *verižno pravilo*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

Verižno pravilo izpeljemo tako, da na dva načina izračunamo totalni diferencial funkcije z. Enkrat gledamo z kot funkcijo spremenljivk x in y. Tedaj dobimo $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$. Drugič pa opazujemo z kot funkcijo spremenljivk u in v, torej $dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv$. Seveda pa sta v tem primeru u in v spet funkciji spremenljivk x in y, torej $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$ in $dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy$. Skupaj torej dobimo

$$\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = dz = \frac{\partial z}{\partial u}(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy) + \frac{\partial z}{\partial v}(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy).$$

S primerjanjem koeficientov pri dx in dy na obeh straneh enakosti dobimo formule za verižno pravilo.

Možno je tudi, da sta u in v funkciji samo ene spremenljivke, ali da je z funkcija samo ene spremenljivke, ki pa je sama funkcija dveh spremenljivk.

Zgled. 1. Če je $u = u(x),\ v = v(x)$, izra unajte odvod z po spremenljivki x za naslednje izraze: $z = u + v,\ z = uv,\ z = u/v,\ z = u^v$.

2. Funkcijo dveh spremenljivk $z = f(x, y)$ pogosto želimo izraziti s polarnima koordinatama r in ϕ. To ni težko, če se spomnimo enačb, ki povezujejo kartezične in polarne koordinate: $x = r\cos\phi,\ y = r\sin\phi$. Parcialna odvoda na polarni koordinati $\frac{\partial z}{\partial r}$ in $\frac{\partial z}{\partial \phi}$ lahko po verižnem pravilu izrazimo s parcialnima odvodoma na kartezični koordinati $\frac{\partial z}{\partial x}$ in $\frac{\partial z}{\partial y}$. Dobimo

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\phi + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\phi$$
$$\frac{\partial z}{\partial \phi} = -\frac{\partial z}{\partial x}r\sin\phi + \frac{\partial z}{\partial y}r\cos\phi.$$

Kadar hočemo, obratno, kartezične parcialne odvode izraziti s polarnimi, moramo ta sistem enačb razrešiti na $\frac{\partial z}{\partial x}$ in $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Ekstremi funkcij več spremenljivk

Definicija. Zvezna funkcija dveh spremenljivk $f(x, y)$ ima v točki (a, b) lokalni ekstrem, če ima razlika $f(a + h, b + k) - f(a, b)$ isti predznak pri vseh dovolj majhnih vrednostih h in k. Ekstrem je maksimum, če je ta razlika negativna, in minimum, če je pozitivna.

Trditev. *Za odvedljivo funkcijo dveh spremenljivk je potreben pogoj za nastop ekstrema v točki (a, b) stacionarnost točke (a, b), se pravi,* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0.$

Dokaz. Funkciji $f(x, b)$ in $f(a, y)$ imata v točki a oziroma b tudi ekstrem, zato morata biti odvoda enaka 0.

Pogoj stacionarnosti ni tudi zadosten za nastop ekstrema. Zgled: $z = xy$ v točki $(0,0)$. Ta točka je stacionarna, ker sta oba prva parcialna odvoda v njej enaka 0, ni pa ekstrem, ker v smeri $y = x$ funkcija z narašča, v smeri $y = -\ x$ pa pada. Rečemo, da ima v točki $(0,0)$ funkcija *sedlo.*

Zadostni pogoji za ekstrem funkcije dveh spremenljivk

Imejmo stacionarno točko (a,b). Vrednosti funkcije f gledamo na premicah skozi točko (a,b), torej opazujemo funkcijo ene spremenljivke $g_k(x) = f(x, k(x-a)+b)$ za vsak možen k. Po verižnem pravilu imamo

$$g_k'(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$$

in

$$g_k''(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)k + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)k^2.$$

Če za vsak $k \in \mathbb{R}$ velja $g_k''(a) > 0$ (ali če za vsak $k \in \mathbb{R}$ velja $g_k''(a) < 0$), imajo v točki a vse funkcije g_k lokalni minimum (ali lokalni maksimum), zato bo isto veljalo za funkcijo dveh spremenljivk v točki (a,b). Toda izraz za $g_k''(a)$ je kvadratna funkcija spremenljivke k in bo imela za vsak k enak predznak, če je diskriminanta negativna. Torej mora biti izraz

$$D(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2,$$

ki je enak negativni diskriminanti, deljeni s 4, v točki (a,b) pozitiven. Če je $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$, dobimo maksimum, za $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$ pa maksimum. Dokazali smo izrek

Izrek. *Če je v stacionarni točki (a,b) izraz $D(a,b) > 0$, ima funkcija f v (a,b) lokalni ekstrem in sicer maksimum, če je $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) < 0$, in minimum, če je $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) > 0$.*

Če je $D(a,b) < 0$, ekstrema v točki (a,b) ni. Če pa je $D(a,b) = 0$, ne moremo reči, kaj se zgodi.

Opomba. Izraz $D(x,y)$ je enak determinanti matrike, sestavljene iz drugih parcialnih odvodov

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \end{bmatrix}$$

Zgled. 1. $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 4x - y - 5$, $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Prva funkcija ima samo en minimum, v točki $(3,2)$, druga pa sedlo v točki $(0,0)$ in minimum v točki (1,1).

2. **Metoda najmanjših kvadratov**. Pogosto zvezo med dvema količinama, ki ju lahko merimo, opisuje funkcija $y = f(x,a,b)$, ki je odvisna npr. še od dveh (včasih tudi več) parametrov a in b. Parametre še ne poznamo natančno. Skušamo pa jih določiti tako, da se bo funkcija čimbolje prilagajala danim eksperimentalnim podatkom (x_1,y_1), (x_2,y_2), ..., (x_n,y_n). To dosežemo npr. z iskanjem minimuma funkcije dveh spremenljivk

$$F(a,b) = \sum_{k=1}^{n} (f(x_k,a,b) - y_k)^2.$$

Zgled. Iskanje linearne zveze $y = a + bx$. Postavimo $F(a,b) = \sum_{k=1}^{n}(a + bx_k - y_k)^2$ in izračunamo parcialna odvoda ter ju izenačimo z 0.

$$\frac{\partial F}{\partial a} = 2\sum_{k=1}^{n}(a + bx_k - y_k) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial b}=2\sum_{k=1}^{n}x_k(a+bx_k-y_k)=0$$

Za spremenljivki a in b dobimo sistem linearnih enačb

$$an+b\sum_{k=1}^{n}x_k=\sum_{k=1}^{n}y_k$$

$$a\sum_{k=1}^{n}x_k+b\sum_{k=1}^{n}x_k^2=\sum_{k=1}^{n}x_ky_k$$

ki je enolično rešljiv, če sta vsaj dve točki v zaporedju $x_1,x_2,...,x_n$ med seboj različni. Iz njega izračunamo

$$b=(n\sum_{k=1}^{n}x_ky_k-\sum_{k=1}^{n}x_k\sum_{k=1}^{n}y_k)/(n\sum_{k=1}^{n}x_k^2-(\sum_{k=1}^{n}x_k)^2)$$

in nato še

$$a=(\sum_{k=1}^{n}y_k-b\sum_{k=1}^{n}x_k)/n.$$

Ker je $\dfrac{\partial^2 F}{\partial a^2}=2n>0$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial b^2}=2\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x_k^2$, $(\dfrac{\partial^2 F}{\partial a\partial b})^2=2\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x_k$ in $D=\dfrac{\partial^2 F}{\partial a^2}\dfrac{\partial^2 F}{\partial b^2}-(\dfrac{\partial^2 F}{\partial a\partial b})^2$ $=4n\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x_k^2-4(\sum_{k=1}^{n}x_k)^2=4n\sum_{k=1}^{n}(x_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k)^2>0$, vidimo, da v stacionarni točki vedno nastopi minimum.

Opomba. Vse doslej smo se zanimali le za funkcije dveh spremenljivk. Na isti način pa bi lahko obravnavali tudi funkcije treh ali več spremenljivk. Parcialne odvode na vsako spremenljivko bi definirali v bistvu na isti način (druge spremenljivke imamo za konstante). Tudi zanje bi se izkazalo, da je stacionarnost točke (vsi parcialni odvodi v tej točki so 0) potreben pogoj za nastop ekstrema. Seveda pa so zadostni pogoji v tem primeru precej bolj komplicirani.

Vezani ekstremi

Včasih iščemo ektreme funkcije dveh spremenljivk $z=f(x,y)$, pri čemer pa spremenljivki x in y ne tečeta prosto po območju odvedljivosti funkcije f, ampak sta med seboj povezani z enačbo $g(x,y)=0$. Iz te enačbe bi v načelu lahko eno spremenljivko izrazili z drugo, vstavili v dano funkcijo in tako dobili ekstremalni problem za funkcijo ene spremenljivke.

Pogosto pa ravnamo drugače. Ker je diferencial vezi identično enak 0, velja zveza $\frac{\partial g}{\partial x}dx+\frac{\partial g}{\partial y}dy=0$ in diferenciala dx in dy nista linearno neodvisna (enega bi lahko izrazili z drugim). Raje pa uvedemo tako imenovan Lagrangev multiplikator. Pri poljubnem λ je

$$df=(\frac{\partial f}{\partial x}-\lambda\frac{\partial g}{\partial x})dx+(\frac{\partial f}{\partial y}-\lambda\frac{\partial g}{\partial y})dy.$$

Pogoj za ekstrem je seveda $df=0$, zato določimo x,y in λ tako, da bodo izpolnjeni pogoji $\frac{\partial f}{\partial x}-\lambda\frac{\partial g}{\partial x}=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}-\lambda\frac{\partial g}{\partial y}=0$ in $g(x,y)=0$ (če hočemo, da je ekstrem na krivulji, ki jo določa enačba vezi).

Ekvivalenten je naslednji Lagrangev postopek:

Sestavimo novo funkcijo

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)$$

in ji poiščemo ekstrem. Potrebno je seveda rešiti sistem enačb

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \; \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \text{ in } \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$$

(zadnja enačba nam ponovno da pogoj $g(x, y) = 0$). Iz tega sistema izračunamo neznanke x, y in λ, vsaka rešitev (x, y) je stacionarna točka, možna ekstremalna točka.

Zgled. Poiskati želimo npr. polosi elipse z enačbo $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$ (elipso dobimo, kadar je $ac - b^2 > 0$ in $a \neq c > 0$). Polosi sta dve, večja in manjša. Ker je ta elipsa v centralni legi, ju dobimo kot največjo in najmanjšo možno razdaljo točke na elipsi do koordinatnega izhodišča. Zadošča opazovati kvadrat razdalje. Iščemo torej ekstreme kvadrata razdalje $f(x, y) = x^2 + y^2$ pri pogoju $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$. Nastavek

$$F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - \mu(ax^2 + 2bxy + cy^2 - 1)$$

nam da sistem enačb, ki je v bistvu problem lastnih vrednosti za matriko $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$, torej $Ax = \lambda x$, kjer je $\lambda = 1/\mu$. Iskani kvadrat razdalje je ravno μ, torej sta μ in λ pozitivni števili. Večko polos kot kvadratni koren iz reciproične vrednosti manjše lastne vrednosti, manjšo polos pa kot kvadratni koren iz reciproične vrednosti večje lastne vrednosti. Določimo lahko tudi smer teh dveh polosi, če izračunamo še lastne vektorje.

Oglejmo si konkreten primer elipse: $3x^2 + 2xy + y^2 = 1$. Matrika je $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ z lastnima vrednostma $\lambda_1 = 2 - \sqrt{2}$ in $\lambda_2 = 2 + \sqrt{2}$ (kar nam da polosi $\sqrt{1 + \sqrt{2}/2}$ in $\sqrt{1 - \sqrt{2}/2}$) in lastnima vektorjema (smerema polosi) $x_1 = (1 - \sqrt{2}, 1)^T$ in $x_2 = (1, \sqrt{2} - 1)^T$.

2. Navadne diferencialne enačbe

V naravoslovnih vedah pogosto opazujemo spreminjanje ene količine v odvisnosti od spreminjanja druge. Sprememba (rast) je matematično dana z odvodom ali diferencialom, torej so matematični model za določene pojave enačbe, v katerih nastopajo neznane funkcije in njihovi odvodi. Imenujemo jih *diferencialne enačbe*. Rešitev so odvedljive funkcije, ki tej enačbi zadoščajo.

Zgledi. $y' = \cos x$, $y' = 2y$, $y'' + 4y = 0$, $x^3 y''' + xy' = 1$ so primeri *navadnih* diferencialnih enačb. Prvi dve sta prvega reda, tretja drugega in četrta tretjega. Iščemo dovolj odvedljivo funkcijo, ki zadošča dani enačbi. Primer *parcialne* diferencialne enačbe drugega reda je $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Tu iščemo funkcijo dveh spremenljivk $u = u(x, y)$, ki zadošča tej enačbi. V tem razdelku bomo obravnavali nekaj najbolj preprostih tipov navadnih diferencialnih enačb.

(A) Diferencialna enačba 1. reda

To je navadna diferencialna enačba, v kateri nastopa samo prvi odvod neznane funkcije, torej enačba oblike $F(x, y, y')$. Če od tod izrazimo y', dobimo enačbo v eksplicitni obliki:

$$y' = f(x, y),$$

kjer je na desni strani f znana (običajno zvezna) funkcija dveh spremenljivk. Kakšna od spremenljivk lahko tudi manjka, kot smo videli v prvih dveh primerih $y' = \cos x$ in $y' = 2y$ zgoraj. Radi bi poiskali enkrat odvedljivo funkcijo, ki zadošča enačbi. Njen graf $y = y(x)$ imenujemo *rešitvena krivulja*.

Geometrijski pomen enačbe $y' = f(x,y)$ je naslednji. Desno stran lahko izračunamo v vsaki točki (x,y) definicijskega območja funkcije f. Ker pomeni odvod naklon (smer) grafa iskane funkcije, rečemo, da je z enačbo podano *polje smeri*. To je, v vsaki točki je predpisana smer, v kateri mora potekati rešitvena krivulja. To polje smeri si lahko nazorno grafično predstavimo tako, da si načrtamo družino krivulj, vzdolž katerih je smer konstantna. Te krivulje imenujemo *izokline*. Če sledimo predpisani smeri, lahko vsaj približno narišemo tudi rešitvene krivulje. Vidimo, da je rešitvenih krivulj neskončno mnogo, odvisno od točke, v kateri začnemo.

ZGLEDI. (a) $y' = y/x$. Izokline so krivulje $y/x = k$, $k \in \mathbb{R}$, torej premice $y = kx$ skozi koordinatno izhodišče. To so hkrati tudi rešitvene krivulje, saj se smer na premici $y = kx$ ujema s k.

(b) $y' = -2xy$. Izokline so tu hiperbole $xy = -k/2$, $k \in \mathbb{R}$. Z vstavljanjem v diferencialno enačbo se lahko prepričamo, da so rešitvene krivulje enake $y = Ce^{-x^2}$, kjer je C poljubna konstanta.

Iz teh zgledov vidimo, da je splošna rešitev diferencialne enačbe prvega reda odvisna še od ene konstante. V splošnem torej dobimo enoparametrično družino rešitvenih krivulj. Če poleg enačbe predpišemo še eno točko (x_0, y_0), skozi katero mora potekati rešitvena krivulja, oziroma pogoj $y(x_0) = y_0$, izberemo s tem iz družine eno samo rešitev, ki ustreza poleg enčbi tudi *začetnemu pogoju*.

ZGLED. Če v prejšnjem zgledu (a) zahtevamo $y(1) = 1$,a dobimo $k = 1$ oziroma rešitev $y = x$. Če isto zahtevamo v zgledu (b), dobimo $C = \mathrm{e}$ oziroma rešitev $y = \mathrm{e}^{1-x^2}$.

Tudi obratno vsaki enoparametrični družini krivulj ustreza diferencialna enačba 1. reda. Poiščemo jo tako, da krivulje odvajamo po spremenljivki x in iz obeh enačb izločimo konstanto C.

Ortogonalne trajektorije dane družine krivulj so take krivulje, ki v vsaki svoji točki sekajo eno od krivulj dane družine pod pravim kotom. Tej ortogonalni družini priprada diferencialna enačba, ki je v preprosti zvezi z diferencialno enačbo prvotne družine krivulj. Samo odvod y' nadomestimo z $-1/y'$.

ZGLED Diferencialna enačba za družino premic $y = kx$ je enačba $y' = y/x$. Diferencialna enačba ortogonalnih trajektorij pa je $-1/y' = y/x$ oziroma $y' = -x/y$. Brez težav se s posrednim odvajanjem prepričamo, da tej enačbi ustrezajo krivulje v implicitni obliki $x^2 + y^2 = r^2$, torej koncentrične krožnice s središčem v izhodišču, kar je tudi nazorno jasno.

Doslej še nismo spoznali nobene metode, kako diferencialno enačbo prvega reda res rešimo. Vedno to ne gre z elemntarnimi analitičnimi sredstvi. Naslednji tip enačb je najpreprostejši primer enačb, ki jih lahko uženemo že z dvema integracijama.

Enačbe z ločljivimi spremenljivkami

To so enačbe oblike $y' = f(x)g(y)$, kjer sta f in g znani zvezni funkciji. Spremenljivki na desni strani sta ločeni v dva faktorja. Če preidemo na zapis z diferenciali, lahko dosežemo, da sta vsak na svoji strani enačbe: $dy/g(y) = f(x)dx$. Integriramo na obeh straneh in dobimo enačbo oblike $G(y) = F(x) + C$, ki povezuje spremenljivki x in y, torej implicitno obliko rešitvene krivulje. Včasih, a ne vedno, uspe od tod eksplicitno izraziti y kot funkcijo spremenljivke x (in splošne konstante C).

ZGLED. Enačba $y' = -2xy$, ki jo poznamo od prej, je enačba z ločljivimi spremenljvikami. Najprej dobimo $dy/y = -2xdx$ in nato z integracijo $\ln y = -x^2 + \ln C$. Če odpravimo logaritme, dobimo splošno rešitev $y = C\mathrm{e}^{-x^2}$, ki jo tudi že poznamo.

Na enačbe z ločljivimi spremenjivkami lahko prevedemo tudi nekatere druge enačbe. Tako npr. v enačbo oblike

$$y' = g(y/x),$$

kjer je g poljubna funkcija uvedemo novo spremenljivko $u = y/x$ in dobimo enačbo z ločljivimi spremenljivkami $xu' + u = g(u)$ oziroma

$$xu' = g(u) - u.$$

Primeri iz geometrije, fizike in drugih ved

1. Enačba za eksponentno rast je enačba oblike $y' = ky$. Tu pomeni y' odvod po času t, k pa je sorazmernostni faktor. Enačba pove, da je hitrost rasti dane količine y premosorazmerna sami količini. (Če je $k > 0$, gre za rast, če je $k < 0$ pa za upadanje.) Tako se vedejo (vsaj na omejenem intervalu) številni naravni pojavi; rečemo da gre za naravno rast (npr. rast populacije, rast lesne mase v gozdu itd.). Enačba ima ločljive spremenljivke, splošno rešitev hitro najdemo v obliki $y = C\mathrm{e}^t$. Začetnemu pogoju $y(0) = y_0$ pa ustreza le krivulja $y = y_0\mathrm{e}^t$.

2. Radioaktivni razpad uravnava enačba $\frac{dy}{dt} = -ky$, kjer je k je pozitivna konstanta (npr. 1,4 . $10^{-11}s^{-1}$ za radij). To je poseben primer enačbe za eksponentno rast (pravzaprav upadanje). Rešitev je $y = y_0\mathrm{e}^{-kt}$. Od tod lahko npr. izračunamo *razpolovno dobo*, ko se količina radioaktivne snovi zmanjša na polovico. Vstavimo $y = y_0/2$ in dobimo $\mathrm{e}^{-kt_0} = 1/2$ oziroma $t_0 = (\ln 2)/k$ (pri radiju $\sim 5.10^{10}s \approx 2000$ let).

3. Na enačbe z ločljivi spremenljivkami pogosto naletimo pri reševanju geometrijskih problemov. Poiščimo npr. krivulje, katerih odsek na normali je konstanten (enak a). Odsek na normali je dolžina daljice na normali med presečiščem normale s krivuljo $y = y(x)$ in presečiščem z abscisno osjo. Izračunamo ga po formuli $y\sqrt{1 + y'^2}$, kjer je y ordinata ustrezne točke, v kateri potegnemo normalo. Diferencialna enačba se torej glasi $y\sqrt{1 + y'^2} = a$, od koder dobimo $(x + c)^2 + y^2 = a^2$, kjer je c poljubna konstanta. Iskane krivulje so torej krožnice s polmerom a in središčem na abscisni osi.

4. V epidemiologiji nas zanima število zdravih osebkov $x(t)$ in število bolnih osebkov $y(t)$ v trenutku t v neki populaciji velikosti N. Predpostavimo, da je v začetku (v trenutku $t = 0$) v populaciji samo en bolan in $N - 1$ zdravih osebkov. Hitrost okužbe je v vsakem trenutku premosorazmerna številu stikov med zdravimi in obolelimi osebki, torej (pri idealnem mešanju osebkov) produktu zdravih in bolnih osebkov. Obolevanje potemtakem uravnava diferencialna enačba z ločljivimi spremenljivkami $\frac{dy}{dt} = kxy$, kjer je $k > 0$ oziroma $y' = k(N - y)y$. Njena rešitev, ki zadošča tudi začetnemu pogoju $y(0) = 1$, je

$$y(t) = \frac{N\mathrm{e}^{kNt}}{N - 1 + \mathrm{e}^{kNt}}.$$

Njen graf je t.i. *logistična krivulja* (v obliki ležeče črke S), ki se pojavi vedno pri omejeni rasti. Zakonitost je odkril in raziskal belgijski matematik P.F. Verhulst že leta 1838.

Zanimiva je tudi krivulja $y = y'(t)$, ki meri hitrost obolevanja. Maksimum ima pri $t_1 = \frac{1}{kN}\ln(N - 1)$, ko je $y(t_1) = N/2$. Torej je hitrost obolevanja največja takrat, ko je obolelih približno polovica osebkov.

(B) Linearna diferencialna enačba prvega reda

To je enačba oblike

$$y' + f(x)y = g(x),$$

kjer sta $f(x)$ in $g(x)$ dani zvezni funkciji. Enačba je homogena, če je $g(x) = 0$ in nehomogena, če je $g(x) \neq 0$. Homogena enačba ima ločljive spremenljivke in jo znamo rešiti. Splošna rešitev homogene enačbe je vedno oblike $y = Cy_0$, kjer je y_0 ena netrivialna rečitev.

Nehomogeno enačbo lahko rešujemo na dva načina:

1. Če uganemo eno (partikularno) rešitev y_1, je splošna rešitev oblike $y = y_1 + Cy_0$. Razlika $y - y_1$ dveh rešitev nehomogene enačbe namreč vedno reši homogeno enačbo.

2. Partikularno rešitev lahko poiščemo z metodo *variacije konstante.* Kot samo ime pove, variiramo konstanto, ki nastopa v splošni rešitvi $y = Cy_0(x)$ homogene enačbe. To je, C smatramo za funkcijo in ta nastavek vstavimo v prvotno nehomogeno enačbo. Iz nje najprej izračunamo C' in z integracijo še $C = C(x) + C_1$. Torej je potem splošna rešitev nehomogenew enačbe 1. reda enaka $y = (C_0(x)+C_1)y_0(x) = C_0(x)y_0(x)+C_1y_0(x)$, kjer je C_1 sedaj prava konstanta, $y_1 = C_0(x)y_0(x)$ pa posebna (partikularna) rešitev nehomogene enačbe.

ZGLEDI. (a) Enačba $y' - y = \mathrm{e}^{2x}$ ima homogeni del enak $y' - y = 0$, kar je enačba z ločljivimi spremenljivkami in s splošno rešitvijo $y = C\mathrm{e}^x$. Eno rešitev nehomogene enačbe lahko takoj uganemo: $y_1 = \mathrm{e}^{2x}$ (z odvajanjem se prepričajte, da res zadošča prvotni enačbi). Torej je splošna rešitev $y = \mathrm{e}^{2x} + C\mathrm{e}^x$.
Do iste rešitve bi lahko prišli tudi z variacijo konstante. Odvajamo funkcijo $y = C(x)\mathrm{e}^x$ in vstavimo v enačbo, pa dobimo $C'\mathrm{e}^x + C\mathrm{e}^x - C\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{2x}$ oziroma $C' = \mathrm{e}^x$, se pravi $C(x) = \mathrm{e}^x + C$. Torej je $y = (\mathrm{e}^x + C)\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{2x} + C\mathrm{e}^x$.

(b) Homogeni del enačbe $xy' + y = \sin x$ hitro rešimo in dobimo $y = C/x$. Ker režitve nehomogene enačbe zdaj ne moremo kar uganiti, uporabimo metodo variacije konstante. Z nastavkom $y = C(x)/x$ gremo v enačbo in najdemo $C'(x) = \sin x$, $C(x) = -\cos x$ in $y = (-\cos x + C)/x = -\cos x/x + C/x$.
Konkretno diferencialno enačbo rešimo še hitreje, če opazimo, da velja $(xy)' = \sin x$, od koder z eno samo integracijo najdemo $xy = -\cos x + C$, kar nam da isto splošno rešitev kot prej.

Mnoge diferencialne enačbe se s primerno substitucijo prevedejo na linearne enačbe prvega reda, med njimi npr. ti. *Bernoullijeva enačba*

$$y' + f(x)y = g(x)y^n, \; n \neq 1.$$

Tu uvedemo novo odvisno spremenljivko $z = 1/y^{n-1}$.

ZGLEDI. (a) Iz enačbe $xy' + y = y^2$ dobimo z uvedbo spremenljivke $z = 1/y$ enačbo $-xz' + z = 1$, ki jo hitro uženemo, saj ima celo ločljive spremenljivke. Dobimo $z = 1 + Cx$ oziroma $y = 1/(1 + Cx)$.

(b) Tudi epidemiološka enačba je take oblike, saj jo lahko zapišemo $y' - kNy = -ky^2$. Delimo z $-y^2$ in uvedemo $z = 1/y$, pa dobimo linearno diferencialno enačbo 1. reda $z' + kNz = k$ in začetni pogoj $z(0) = 1$. Njena rešitev je $z = (1 + (N - 1)\mathrm{e}^{-kNt})/N$, od koder dobimo za y isto rešitev kot prej.

(C) Linearna diferencialna enačba 2. reda s konstantnimi koeficienti

Naslednji tip diferencialnih enačb, ki jih lahko rešimo, so enačbe oblike

$$ay'' + by' + cy = f(t),$$

kjer so $a, b, c \in \mathbb{R}$ in f znana zvezna funkcija. Če je $f = 0$, je enačba *homogena*, sicer *nehomogena*.

Homogeno enačbo rešujemo z nastavkom $y = \mathrm{e}^{\lambda t}$. Ko ga vstavimo v enačbo in krajšamo z eksponentnim faktorjem, dobimo t.i. *karakteristično enačbo*

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0,$$

ki ima v splošnem dva (lahko tudi enaka) kompleksna korena λ_1 in λ_2. (Karakteristično enačbo dobimo iz diferencialne enačbe torej tako, da namesto i-tega odvoda neznane funkcije y zapišemo i-to potenco neznanke λ.)

Splošna rešitev homogene enačbe je odvisna še od dveh poljubnih konstant in je oblike

$$y = c_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + c_2\mathrm{e}^{\lambda_2 t},$$

če sta korena različna, in

$$y = (c_1 t + c_2)\mathrm{e}^{\lambda t},$$

če sta korena enaka λ. Preprosto se je prepričati, da je to res rešitev enačbe. Za dokaz dejstva, da drugih rešitev ni, pa bi morali morali poznati nekaj več teorije takih enačb, čemur se odpovejmo.

Splošna rešitev nehomogene enačbe je potem oblike $y = y_1 + y_h$, kjer je y_h splošna rešitev homogene enačbe in y_1 ena od rešitev nehomogene enačbe. To posebno rešitev včasih uganemo, ali pa pridemo do nje po podobni metodi *variacije konstant*, kot pri linearni enačbi 1. reda. Izpeljavi metode se odpovejmo, kasneje jo bomo ilustrirali na posebnem zgledu.

Kadar sta korena karakteristične enačbe kompleksna, sta konjugirano kompleksna $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, ker ima enačba realne koeficiente. V tem primeru lahko namesto kompleksne oblike splošne rešitve homogene (ali nehomogene) enačbe zapišemo realno obliko: $y = c_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + c_2\mathrm{e}^{\lambda_2}t = c_1\mathrm{e}^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t) + c_2\mathrm{e}^{\alpha t}(\cos\beta t - i\sin\beta t) = c_1'\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t + c_2'\mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t$, kjer je $c_1' = c_1 + c_2$ in $c_2' = i(c_1 - c_2)$. S primerno transformacijo lahko rešitev zapišemo tudi v obliki $y = A\mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\beta t + \delta)$.

ZGLEDI. 1. Rešimo enačbo $y'' + 4y = \sin t$. Karakteristična enačba je $\lambda^2 + 4 = 0$, ki ima konjugirano kompleksni rešitvi $\lambda_1 = 2i$ in $\lambda_2 = -2i$. Splošna rešitev homogene enačbe je torej $y_h = c_1\cos 2t + c_2\sin 2t$. Eno rešitev nehomogene enačbe lahko uganemo, saj mora biti v zvezi s sinusno funkcijo; dobimo $y_1 = \frac{1}{3}\sin t$. Torej je skupna rešitev $y = \frac{1}{3}\sin t + c_1\sin 2t + c_2\cos 2t$.

Kako bi na tem primeru uporabili metodo variacije konstant? V formuli za splošno rešitev homogene enačbe imejmo c_1 in c_2 za funkciji spremenljivke t. Z odvajanjem na t dobimo $y' = c_1'\cos 2t + c_2'\sin 2t - 2c_1\sin 2t + 2c_2\cos 2t$. Zahtevajmo $c_1'\cos 2t + c_2'\sin 2t = 0$, pa imamo $y' = -2c_1\sin 2t + 2c_2\cos 2t$. S ponovnim odvajanjem najdemo $y'' = -2c_1'\sin 2t + 2c_2'\cos 2t - 4c_1\cos 2t - 4c_2\sin 2t$. To vstavimo v prvotno enačbo, pa dobimo $-c_1'\sin 2t + c_2'\cos 2t = \sin t$, kar je še druga enačba za odvoda c_1' in c_2'. Iz sistema dveh linearnih enačb izračunamo $c_1' = -\cos t\sin^2 t$, $c_2' = \cos^2 t\sin t - \frac{1}{2}\sin t$, integriramo, da dobimo $c_1(t) = -\frac{1}{3}\sin^3 t + c_1$, $c_2(t) = -\frac{1}{3}\cos^3 t + \frac{1}{2}\cos t + c_2$ in končno $y = \frac{1}{3}\sin t + c_1\cos 2t + c_2\sin 2t$.

2. Enačba $y'' + 2\alpha y' + \omega_0^2 y = 0$ opisuje lastno dušeno nihanje matematičnega nihala (pri majhnih odklonih iz mirovne lege). Tu je $\alpha > 0$ koeficient dušenja in ω_0 krožna frekvenca nihala.

Korena karakteristične enačbe $\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_0^2 = 0$ sta $\lambda_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$ in $\lambda_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$. Lahko ločimo tri primere:

(i) $\alpha^2 > \omega_0^2$ (močno dušenje). Rešitev: $y = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$, števili λ_1, λ_2 realni in negativni.

(ii) $\alpha^2 = \omega_0^2$ (mejni primer). Rešitev: $y = (c_1 t + c_2)e^{-\alpha t}$, $\lambda_1 = \lambda_2 = -\alpha$.

(iii) $\alpha^2 < \omega_0^2$ (šibko dušenje). Rešitev: $y = Ae^{-\alpha t}\cos(\beta t + \delta)$, $\lambda_1 = -\alpha + i\beta$, $\lambda_2 = -\alpha - i\beta$, $\beta = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$.

Samo v zadnjem primeru gre za pravo (dušeno) nihanje. Če pa bi bil $\alpha = 0$, dušenja ne bi bilo in bi imeli harmonično nihanje.

Sistem linearnih diferencialnih enačb 1. reda s konstantnimi koeficienti

Pogosto se hkrati spreminja več količin v odvisnosti od časa in od teh količin samih. Denimo, da gre za dve količini x, y in da je hitrost spreminjanja od njiju linearno odvisna (pri čemer so koeficienti konstantni). Tedaj govorimo o sistemu dveh linearnih diferencialnih enačb 1. reda s konstantnimi. To je sistem oblike

$$x' = ax + by + f(t)$$
$$y' = cx + dy + g(t)$$

kjer so a, b, c, d znana realna števila in f, g znani zvezni realni funkciji. Če uvedemo vektorske oznake $z = (x, y)^\perp$, $z' = (x', y')^\perp$, $h(t) = (f(t), g(t))^\perp$ in $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, lahko sistem zapišemo v matrični obliki: $z' = Az + h(t)$. Kadar je $h(t) = 0$, govorimo o *homogenem* sistemu, sicer pa je sistem *nehomogen*.

Sistem dveh linearnih diferencialnih enačb 1. reda lahko takoj prevedemo na eno linearno diferencialno enačbo 2. reda. Oglejmo si npr. homogeni sistem:

$$x' = ax + by$$
$$y' = cx + dy.$$

Prvo enačbo odvajamo, nato iz obeh enačb 1. reda izločimo y, nazadnje pa iz te in iz odvajane enačbe izločimo še y', pa dobimo za x enačbo 2. reda

$$x'' - (a + d)x' + (ad - bc)x = 0,$$

ki ima karakteristično enačbo

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0.$$

Brez posebnih težav se lahko prepričamo, da je ta enačba enaka enačbi $\det(\lambda I - A) = 0$, kjer je A matrika zgornjega sistema. Torej je leva stran karakteristične enačbe enaka karakterističnemu polinomu matrike A (glej razdelek 4 v II.poglavju), korena λ_1, λ_2 karakteristične enačbe pa sta lastni vrednosti matrike A.

Splošna rešitev za x je enaka

$$x = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t},$$

rešitev za y potem poiščemo iz ene izmed prvotnih enačb, npr. iz prve, če je $b \neq 0$:

$$y = (x' - ax)/b = d_1 e^{\lambda_1 t} + d_2 e^{\lambda_2 t},$$

kjer je $d_1 = (\lambda_1 - a)c_1/b$ in $d_2 = (\lambda_2 - a)c_2/b$.

ZGLEDI 1. Za sistem $x' = -y,\ y' = x$ takoj dobimo najprej enačbo $x'' = -x$ z rešitvijo $x = c_1 \cos t + c_2 \sin t$. Nato iz $y = -x'$ poiščemo še $y = -c_1 \sin t + c_2 \cos t$. Od tod npr. vidimo, da je

$$x^2 + y^2 = c_1^2 + c_2^2 = c^2,$$

kjer je c pozitivna konstanta. Torej so rešitvene krivulje sistema koncentrične krožnice s središčem v koordinatnem izhodišču. Slednje dobimo lahko tudi direktno iz diferencialne enačbe $dx/dy = -y/x$, ki jo dobimo z medsebojnim deljenjem obeh strani sistema (s tem izločimo pomožno spremenljivko t).

2. Na podoben način uženemo homogeni sistem $x' = 3x - 2y,\ y' = 2x - 2y$. Ker sta karakteristični števili oziroma lastni vrednosti ustrezne matrike enaki -1 in 2, dobimo rešitev $x = 2c_1 \mathrm{e}^{-t} + c_2 \mathrm{e}^{2t},\ y = 2c_1 \mathrm{e}^{-t} + (c_2/2)\mathrm{e}^{2t}$.

Uporaba sistemov diferencialnih enačb je pogosta v proučevanju ekosistemov. Če imamo npr. dve različni populaciji živih bitij, ki živita na istem prostoru (in se med seboj borita za hrano in prostor), lahko predpostavimo, da se število osebkov ene populacije spreminjai zaradi notranjega razvoja populacije (razmnoževanja, naravnega umiranja) in zaradi enakih vplivov konkurenčne populacije. Pogosto da se ti vplivi linearno seštevajo in tedaj dobimo kot matematični model ravno homogeni sistem dveh linearnih diferencialnih enačb 1. reda. Spremenljivki x in y sta velikosti tekmujočih populacij, x' oziroma y' njuna rast (hitrost spreminjanja), koeficienti $a, d > 0,\ b, c < 0$ pa premosorazmernostni faktorji različnih vplivov). Ekološki sistem je stabilen, če ostane v (dinamičnem) razvnovesju, tj. če se nobena populacija ne poveča enormo na račun druge oziroma če nobena ne izumre. Preprost matematični premislek glede oblike rešitve pove, da je sistem stabilen natanko takrat, ko sta obe lastni vrednosti ustrezne matrike (ali vsaj njuna realna dela) negativni števili. V tem primeru nobena rešitev, ki je linearna kombinacija eksponentnih funkcij časa, ne more neomejeno naraščati.

Nelinearni sistem diferencialnih enačb 1. reda

Naravni pojavi navadno niso linearni, zato so nelinearni sistemi veliko bolj zanimivi (bližje resničnosti). Vendar so običajno težje rešljivi kot linearni sistemi. Za zaključek si oglejmo samo preprost primer nelinearnega sistema:

$$x' = ax - bxy$$

$$y' = cxy - dy$$

kjer so $a, b, c, d > 0$ dana števila.

Tak sistem dobimo npr. pri obravnavi enostavnega modela, ko se ena vrsta živali (roparji, plenilci) prehranjuje z drugo vrsto živali (hrana, plen). Hitrost spremembe v populaciji plena x' je enaka naravni rasti v populaciji, ki je proporcionalna njeni velikosti (člen ax) in hitrosti zmanjševanja populacije zaradi uničenja s strani roparjev, ki pa je proporcionalna številu možnih medsebojnih kontaktov med plenom in roparji (člen $-bxy$). Po drugi strani je hitrost spremembe v populaciji roparjev y' enaka povečanju števila roparjev zaradi obilne hrane (člen cxy) in naravnemu zmanjšanju populacije roparjev zaradi umiranja (člen $-dy$). Tak model so res postavili v obdobju po 1. svetovni vojni glede populacije belih rib (plen) in morskih psov (roparji) v Kvarnerskem zalivu (D'Ancona, Volterra).

Rešitev sistema, ki je ne moremo dobiti analitično, pač pa le numerično, sta periodični funkciji časa $x(t)$ in $y(t)$ (glej sliko 1), pri čemer maksimumi (in podobno minimumi) pri y nekoliko zaostajajo za maksimumi (minimumi) pri x, kar se da lepo razložiti.

Analitično pa lahko iz $dy/dx = y(cx-d)/x(a-by)$ dobimo zvezo med x in y, namreč

$$a \ln y - by = cx - d \ln x + C,$$

ki predstavlja konveksno sklenjeno krivuljo (glej sliko 2). Ciklično gibanje po tej krivulji v pozitivnem smislu pomeni števijsko naraščanje in upadanje plena in roparjev, kar se tudi da prav lepo razložiti.