Matematika (Lesarstvo)

Matjaž Željko

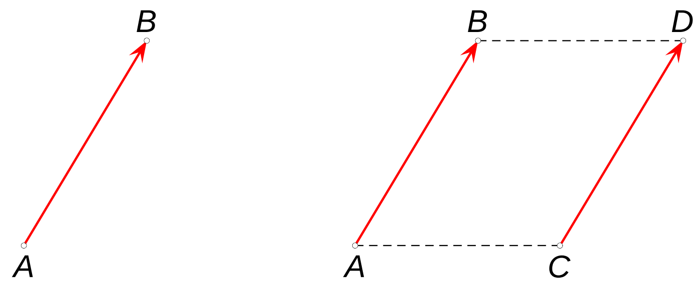
BF – Lesarstvo

11. teden

(Zadnja sprememba: 4. januar 2011)

Vektorji v prostoru

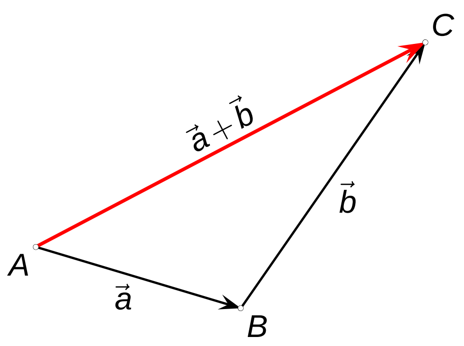
Urejen par (A,B) točk v prostoru določa *vektor*, ki ga označimo z $\overrightarrow{AB}$. Vektor ponazorimo z usmerjeno daljico od točke A do točke B. Smer vektorja označimo s puščico. Usmerjeni daljici $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{CD}$ določata isti vektor natanko tedaj, ko sta vzporedni, enako dolgi in kažeta v isto smer.



Dolžina vektorja $\overrightarrow{AB}$, z oznako $\|\overrightarrow{AB}\|$, je dolžina daljice AB. Torej $\|\overrightarrow{AB}\| = |AB|$.

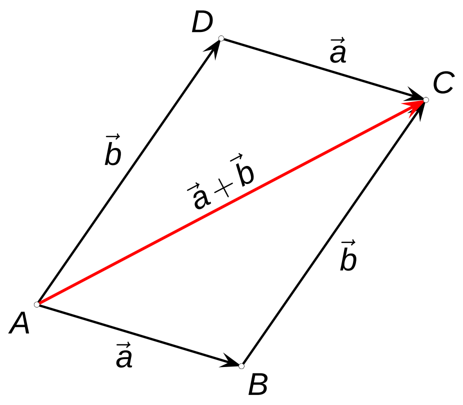
Vsota vektorjev

Naj bosta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ poljubna vektorja. Vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ lahko premaknemo tako, da konec vektorja $\vec{a}$ sovpada z začetkom vektorja $\vec{b}$. Potem je vektor $\vec{a}+\vec{b}$ usmerjena daljica od začetka vektorja $\vec{a}$ do konca vektorja $\vec{b}$.



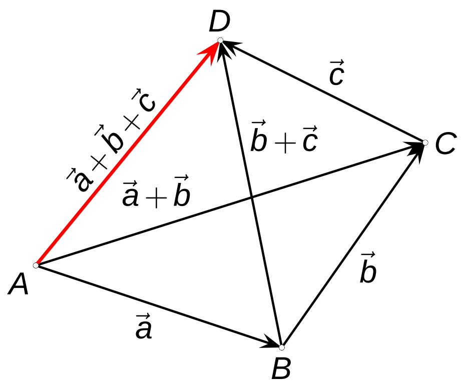
Drugače povedano: če imata vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ skupno začetno točko, je njuna vsota $\vec{a}+\vec{b}$ usmerjena diagonala paralelograma, ki ima vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ za stranici, in sicer tista usmerjena diagonala, ki ima začetek v skupni točki vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$. Iz te definicije je tudi razvidno, da je

$$\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}.$$



Vsoto treh vektorjev izračunamo tako, da vsoti dveh prištejemo tretjega. Vrstni red seštevanja ni pomemben, saj za seštevanje vektorjev velja *asociativnostni zakon*.

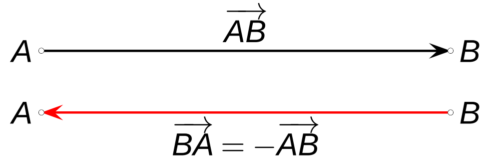
$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}).$$



Vektor, ki se začne in konča v isti točki, imenujemo *ničelni vektor* in ga označimo z $\vec{0}$. Za vsak vektor $\vec{a}$ torej velja

$$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}.$$

Naj bo $\overrightarrow{AB}$ vektor. Vektor $\overrightarrow{BA}$ je *nasprotni vektor* k vektorju $\overrightarrow{AB}$ in ga označimo z $-\overrightarrow{AB}$.



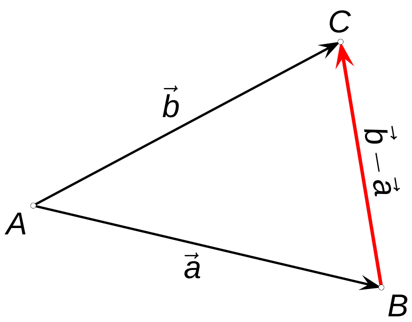
Nasprotni vektor k vektorju $\vec{a}$ označimo z $-\vec{a}$. Tedaj velja

$$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}.$$

Razlika vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ je tak vektor $\vec{x}$, da je

$$\vec{a}+\vec{x}=\vec{b}.$$

Razliko vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ označimo z $\vec{b}-\vec{a}$ in velja $\vec{x}=\vec{b}-\vec{a}=\vec{b}+(-\vec{a})$.



Povzemimo osnovne lastnosti seštevanja vektorjev.

- *Komutativnost seštevanja:* $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ za poljubna vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$
- *Asociativnost seštevanja:* $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ za poljubne vektorje $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$
- *Obstoj nevtralnega elementa za seštevanje:* Obstaja vektor $\vec{0}$, da je $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ za vsak vektor $\vec{a}$
- *Obstoj nasprotnega elementa za seštevanje:* Za vsak vektor $\vec{a}$ obstaja vektor $-\vec{a}$, da je $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$

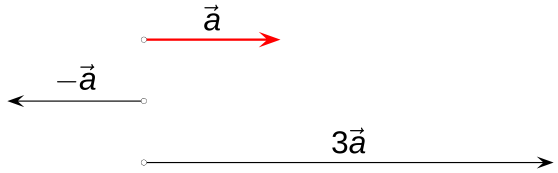
Te štiri lastnosti povemo na kratko takole: Množica vektorjev je *Abelova grupa*.

Seštevanje vektorjev zadošča *trikotniški neenakosti*

$$\|\vec{a}+\vec{b}\|\leq\|\vec{a}\|+\|\vec{b}\|.$$

Množenje vektorja s skalarjem

Naj bo $\lambda \in \mathbb{R}$. Produkt $\lambda\vec{a}$ je vektor z dolžino $|\lambda| \cdot \|\vec{a}\|$. Če je $\lambda > 0$, ima vektor $\lambda\vec{a}$ enako smer kot vektor $\vec{a}$. Če je $\lambda < 0$, ima vektor $\lambda\vec{a}$ enako smer kot vektor $-\vec{a}$. Če je $\lambda = 0$, je $\lambda\vec{a}$ ničelni vektor.



Množenje vektorja s skalarjem zadošča zahtevam

- $(\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a})$.
- $(\lambda+\mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$.
- $\lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$.
- $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.

Linearna odvisnost in neodvisnost

Naj bodo $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_n}$ vektorji v prostoru. Izraz

$$\lambda_1\vec{a_1} + \lambda_2\vec{a_2} + \ldots + \lambda_n\vec{a_n}$$

imenujemo *linearna kombinacija vektorjev* $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_n}$.
Ti vektorji so *linearno neodvisni*, če iz enakosti

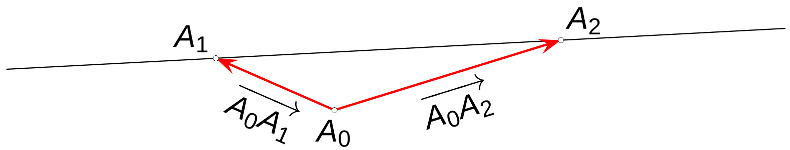
$$\lambda_1\vec{a_1} + \lambda_2\vec{a_2} + \ldots + \lambda_n\vec{a_n} = \vec{0}$$

sledi $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

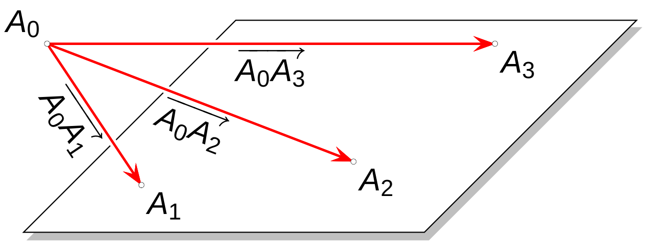
Ti vektorji so *linearno odvisni*, če niso linearno neodvisni. Torej obstajajo števila $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, **ki niso vsa enaka 0**, da je

$$\lambda_1\vec{a_1} + \lambda_2\vec{a_2} + \ldots + \lambda_n\vec{a_n} = \vec{0}.$$

- Vektor $\vec{0}$ je linearno odvisen, saj je $1 \cdot \vec{0} = \vec{0}$.
- Naj bodo A_0, A_1 in A_2 nekolinearne točke v ravnini. Potem sta vektorja $\overrightarrow{A_0A_1}$ in $\overrightarrow{A_0A_2}$ linearno neodvisna.



- Naj bodo A_0, A_1, A_2 in A_3 nekomplanarne točke v prostoru. Potem so vektorji $\overrightarrow{A_0A_1}$, $\overrightarrow{A_0A_2}$ in $\overrightarrow{A_0A_3}$ linearno neodvisni.

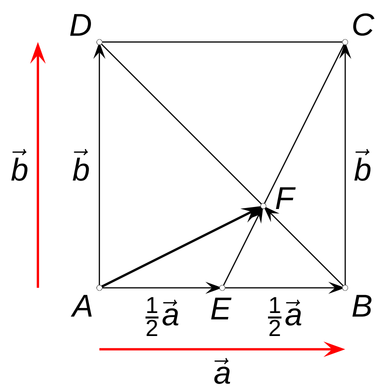


Zgled

Naj bo točka E razpolovišče stranice AB kvadrata $ABCD$. Označimo s F presečišče daljic BD in CE. V kakšnem razmerju deli točka F daljico BD?

Vektorja $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ in $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ sta linearno neodvisna. Ker leži točka F na daljici BD, velja $\overrightarrow{BF} = \lambda\overrightarrow{BD} = \lambda(\vec{b} - \vec{a})$ in je

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a}).$$



Ker leži točka F tudi na daljici EC, velja $\overrightarrow{EF} = \mu\overrightarrow{EC} = \mu(\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b})$ in je

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} = \tfrac{1}{2}\vec{a} + \mu(\tfrac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}).$$

Sledi

$$\vec{a}+\lambda(\vec{b}-\vec{a})=\tfrac{1}{2}\vec{a}+\mu(\tfrac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}),$$

kar lahko preoblikujemo v

$$\left(\tfrac{1}{2}-\lambda-\tfrac{1}{2}\mu\right)\vec{a}+(\mu-\lambda)\vec{b}=\vec{0}.$$

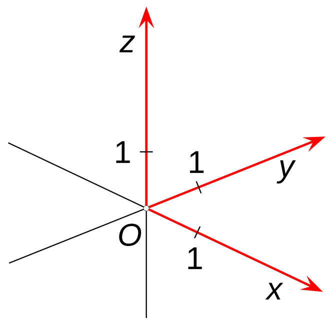
Ker sta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ linearno neodvisna, je

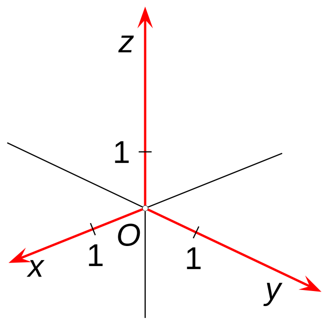
$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}-\lambda-\tfrac{1}{2}\mu &= 0,\\ \mu-\lambda &= 0.\end{aligned}$$

Torej je $\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\lambda$, kar nam da $\lambda=\mu=\frac{1}{3}$. Sledi $\overrightarrow{BF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$ in točka F deli daljico BD v razmerju $1:2$.

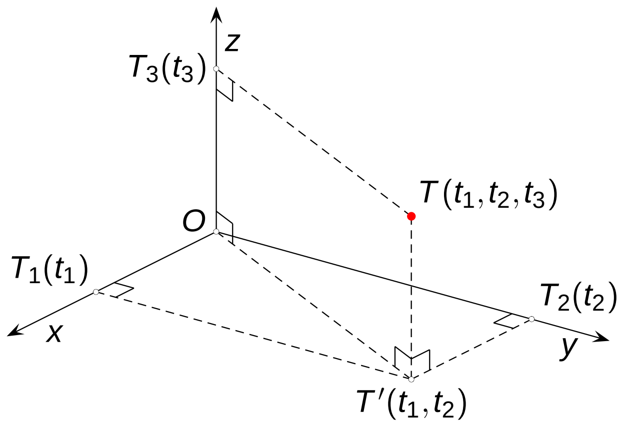
Koordinatni sistem v prostoru

Izberimo v prostoru poljubno točko O in položimo skoznjo tri paroma pravokotne številske premice in sicer tako, da je točka O na vseh treh premicah slika števila 0. Premice imenujemo *koordinatne osi*, točko O *koordinatno izhodišče*, vse skupaj pa sestavlja *pravokotni koordinatni sistem v prostoru*. Premice običajno označimo z x, y in z tako, da če zavrtimo os x okoli osi z za $\frac{\pi}{2}$ v pozitivni smeri, preide v os y.



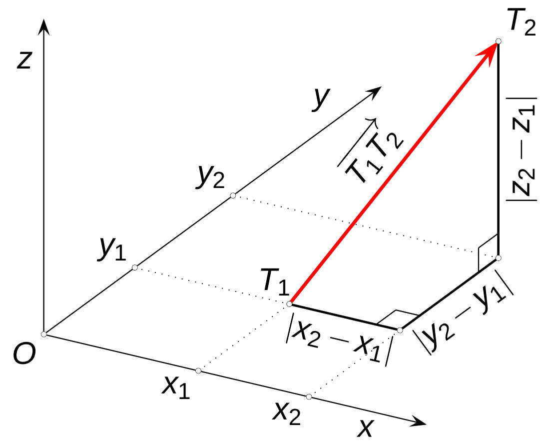


Za poljubno točko T v prostoru označimo s T_1, T_2 in T_3 pravokotne projekcije točke T na koordinatne osi. Točki T_1 ustreza realno število t_1, točki T_2 ustreza realno število t_2, točki T_3 pa ustreza realno število t_3. Torej smo točki T priredili trojico realnih števil (t_1,t_2,t_3), ki jo imenujemo *koordinate točke T*.



Razdaljo med dvema točkama izračunamo po Pitagorovem izreku kot dolžino diagonale ustreznega kvadra. Za točki $T_1(x_1,y_1,z_1)$ in $T_2(x_2,y_2,z_2)$ je

$$\operatorname{dist}(T_1,T_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$



Krajevni vektor

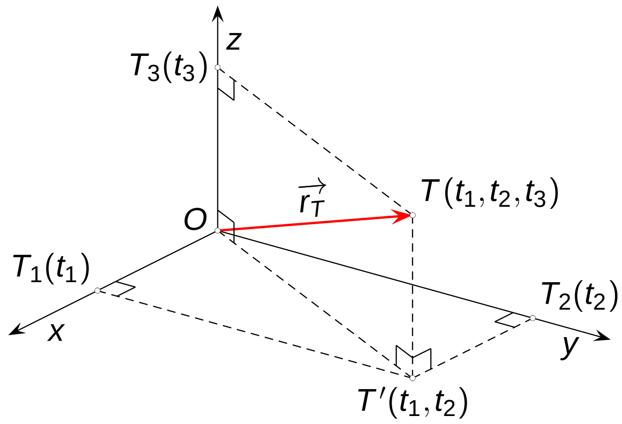
Krajevni vektor točke T je usmerjena daljica od točke O do točke T in ga označimo z $\vec{r_T}$. Skratka: $\vec{r_T} = \overrightarrow{OT}$.

Ker je točka T enolično določena s trojico (t_1, t_2, t_3), je s temi koordinatami tudi enolično določen krajevni vektor točke T. Torej lahko označimo $\vec{r_T} = (t_1, t_2, t_3)$.

Razdaljo med točko T in koordinatnim izhodiščem O izračunamo po Pitagorovem izreku kot dolžino diagonale ustreznega kvadra. *Dolžina vektorja* $\vec{r_T}$ je tako enaka

$$\|\vec{r_T}\| = \mathrm{dist}(T, O) = \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}.$$

Krajevni vektor



Vektorske operacije v koordinatnem zapisu

Če je $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ in $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, je

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2).$$

Ničelni vektor je $\vec{0} = (0, 0, 0)$, k vektorju $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ nasprotni vektor pa je $-\vec{a} = (-x_1, -y_1, -z_1)$. Za vektorja $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ in $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ je tako

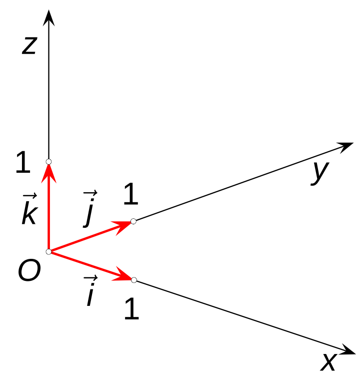
$$\vec{b} - \vec{a} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Če je $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ in $\lambda \in \mathbb{R}$, je

$$\lambda\vec{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1).$$

Baza prostora $\mathbb{R}^3$

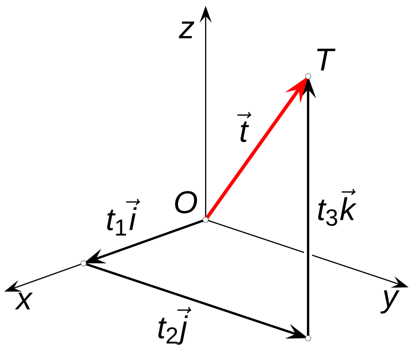
Vpeljimo vektorje $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ in $\vec{k} = (0, 0, 1)$. To so vektorji dolžine 1, ki kažejo v pozitivnih smereh koordinatnih osi. Vektorje $\vec{i}$, $\vec{j}$ in $\vec{k}$ imenujemo *standardni bazni vektorji prostora $\mathbb{R}^3$*.



Za poljubno točko T naj bo (t_1,t_2,t_3) njen krajevni vektor. Torej je

$$(t_1,t_2,t_3) = t_1(1,0,0) + t_2(0,1,0) + t_3(0,0,1) = t_1\vec{i} + t_2\vec{j} + t_3\vec{k},$$

kar pomeni, da lahko vsak vektor v $\mathbb{R}^3$ izrazimo kot linearno kombinacijo vektorjev $\vec{i}, \vec{j}$ in $\vec{k}$. Ti vektorji so linearno neodvisni, saj iz $\lambda_1\vec{i} + \lambda_2\vec{j} + \lambda_3\vec{k} = (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = \vec{0}$ sledi $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.



Zgled

Izračunaj $7\vec{a} - 5\vec{b}$ za $\vec{a} = (2,-1,3)$ in $\vec{b} = (-4,2,5)$.

$$\begin{aligned} 7\vec{a} - 5\vec{b} &= 7(2,-1,3) - 5(-4,2,5) = \\ &= (14,-7,21) - (-20,10,25) = (34,-17,-4) \end{aligned}$$

Zgled

Določi $\vec{a}$ in $\vec{b}$, če je $\vec{a} - 2\vec{b} = (-1,2,2)$ in $2\vec{a} + 3\vec{b} = (1,0,-1)$.

1. način Iz $\vec{a} - 2\vec{b} = (-1,2,2)$ sledi $\vec{a} = 2\vec{b} + (-1,2,2)$. Torej je

$$\begin{aligned} 2\vec{a} + 3\vec{b} &= 2(2\vec{b} + (-1,2,2)) + 3\vec{b} = \\ &= 7\vec{b} + (-2,4,4), \end{aligned}$$

kar nam da

$$7\vec{b} = (1,0,-1) - (-2,4,4) = (3,-4,-5).$$

Sledi $\vec{b} = (\frac{3}{7}, -\frac{4}{7}, -\frac{5}{7})$ in $\vec{a} = (-1,2,2) + 2(\frac{3}{7}, -\frac{4}{7}, -\frac{5}{7}) = (-\frac{1}{7}, \frac{6}{7}, \frac{4}{7})$.

2. način Naloge se lahko lotimo tudi tako, da pišemo $\vec{a} = (a_1,a_2,a_3)$ in $\vec{b} = (b_1,b_2,b_3)$. Iz enačbe sledi

$$\begin{aligned} (a_1 - 2b_1, a_2 - 2b_2, a_3 - 2b_3) &= (-1,2,2), \\ (2a_1 + 3b_1, 2a_2 + 3b_2, 2a_3 + 3b_3) &= (1,0,-1). \end{aligned}$$

Dobimo sistem 6 enačb s 6 neznankami:

$$\begin{aligned} a_1 - 2b_1 &= -1, \\ a_2 - 2b_2 &= 2, \\ a_3 - 2b_3 &= 2, \\ 2a_1 + 3b_1 &= 1, \\ 2a_2 + 3b_2 &= 0, \\ 2a_3 + 3b_3 &= -1, \end{aligned}$$

ki pa ga je možno obravnavati kot 3 sisteme s po dvema enačbama.

Iz

$$\begin{aligned} a_1 - 2b_1 &= -1, \\ 2a_1 + 3b_1 &= 1, \end{aligned}$$

sledi $a_1 = -\frac{1}{7}$, $b_1 = \frac{3}{7}$. Iz

$$\begin{aligned} a_2 - 2b_2 &= 2, \\ 2a_2 + 3b_2 &= 0, \end{aligned}$$

sledi $a_2 = \frac{6}{7}$, $b_2 = -\frac{4}{7}$. Iz

$$\begin{aligned} a_3 - 2b_3 &= 2, \\ 2a_3 + 3b_3 &= -1, \end{aligned}$$

pa sledi $a_3 = \frac{4}{7}$, $b_3 = -\frac{5}{7}$. Torej je $\vec{a} = (-\frac{1}{7}, \frac{6}{7}, \frac{4}{7})$ in $\vec{b} = (\frac{3}{7}, -\frac{4}{7}, -\frac{5}{7})$.

Skalarni produkt vektorjev

Skalarni produkt vektorjev $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ in $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ je število $\vec{a} \cdot \vec{b}$, definirano s predpisom

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

Neposredno iz definicije sledi, da za skalarni produkt velja

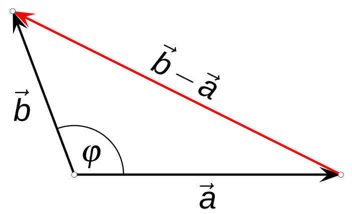
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$,
- $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b})$,
- $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$,
- $\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0$ in $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0$ natanko tedaj, ko je $\vec{a} = \vec{0}$,
- $\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$.

Standardni bazni vektorji $\vec{i}, \vec{j}$ in $\vec{k}$ so enotski in paroma pravokotni:

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 \text{ in } \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0.$$

Označimo s φ kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$. V trikotniku z dolžinami stranic $\|\vec{a}\|$, $\|\vec{b}\|$ in $\|\vec{b} - \vec{a}\|$ velja *kosinusni izrek*

$$\|\vec{b} - \vec{a}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos\varphi. \tag{1}$$



Ker pa je

$$\begin{aligned} \|\vec{b} - \vec{a}\|^2 &= (\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = \vec{b} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{a} = \\ &= \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}, \end{aligned} \tag{2}$$

iz (2) in (1) sledi, da je

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos\varphi.$$

Zgled

Izračunaj skalarni produkt vektorjev $\vec{a} = (1, 2, 3)$ in $\vec{b} = (-1, 0, 2)$.

Skalarni produkt je $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2 = 5$.

Zgled

Določi kot med vektorjema $\vec{a} = (-1, 3, 0)$ in $\vec{b} = (1, -2, 2)$.

Skalarni produkt vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ je

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (-1) \cdot 1 + 3 \cdot (-2) + 0 \cdot 2 = -7.$$

Ker je $\|\vec{a}\| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{10}$ in $\|\vec{b}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$, velja

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|} = \frac{-7}{3\sqrt{10}},$$

kar nam da $\varphi = \arccos \frac{-7}{3\sqrt{10}} \approx 137.55°$.

Zgled

Vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ oklepata kot $\frac{2\pi}{3}$. Izračunaj $(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(-3\vec{a}+\vec{b})$, če je $\|\vec{a}\|=2$ in $\|\vec{b}\|=3$.

Označimo $\varphi=\frac{2\pi}{3}$ in računajmo

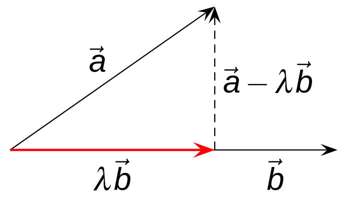
$$\begin{aligned}
(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(-3\vec{a}+\vec{b}) &= -3\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}-6\vec{b}\cdot\vec{a}+2\vec{b}\cdot\vec{b}= \\
&= -3\vec{a}\cdot\vec{a}-5\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{b}= \\
&= -3\|\vec{a}\|^2-5\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cos\varphi+2\|\vec{b}\|^2= \\
&= -3\cdot 2^2-5\cdot 2\cdot 3\cdot(-\tfrac{1}{2})+2\cdot 3^2= \\
&= -12+15+18=21.
\end{aligned}$$

Zgled

Izračunaj pravokotno projekcijo vektorja $\vec{a}=(-1,1,0)$ na vektor $\vec{b}=(1,2,3)$.

Pravokokotna projekcija je tak vektor $\vec{a}_{\vec{b}}=\lambda\vec{b}$, da je $(\vec{a}-\lambda\vec{b})\perp\vec{b}$. Torej je

$$(\vec{a}-\lambda\vec{b})\cdot\vec{b}=0.$$



Sledi $\vec{a}\cdot\vec{b}=\lambda\|\vec{b}\|^2$, kar nam da $\lambda=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}$ in $\vec{a}_{\vec{b}}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}\vec{b}$. V danem primeru je

$$\begin{aligned}
\vec{a}\cdot\vec{b} &= (-1,1,0)\cdot(1,2,3)=-1\cdot 1+1\cdot 2+0\cdot 3=1 \\
\|\vec{b}\|^2 &= \vec{b}\cdot\vec{b}=1^2+2^2+3^2=14.
\end{aligned}$$

Sledi $\vec{a}_{\vec{b}}=\frac{1}{14}(1,2,3)$.

Pravokotna projekcija

V prejšnjem zgledu smo videli, da je pravokotna projekcija vektorja $\vec{a}$ na vektor $\vec{b}$ enaka $\vec{a}_{\vec{b}}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}\vec{b}$.

Če vektor $\vec{b}$ nadomestimo z enotskim vektorjem $\vec{e}=\frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}$ v smeri vektorja $\vec{b}$, sledi

$$\vec{a}_{\vec{b}}=\left(\vec{a}\cdot\frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}\right)\frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}=(\vec{a}\cdot\vec{e})\vec{e}.$$

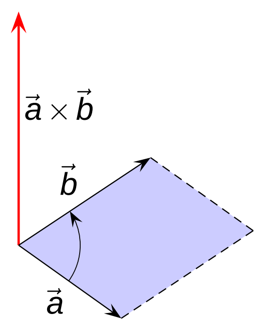
(Orientirana) dolžina pravokotne projekcije vektorja $\vec{a}$ na enotski vektor $\vec{e}$ je torej enaka

$$\vec{a}\cdot\vec{e}.$$

Vektorski produkt vektorjev

Vektorski produkt vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ je vektor $\vec{a}\times\vec{b}$, določen s pogoji

1. $\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\sin\varphi$, kjer je φ kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$
2. vektor $\vec{a}\times\vec{b}$ je pravokoten na vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$
3. vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{a}\times\vec{b}$ sestavljajo *pozitivno orientirano* trojico vektorjev. Torej: če imajo vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{a}\times\vec{b}$ skupno začetno točko in gledamo v smeri vektorja $\vec{a}\times\vec{b}$, se vidi najkrajše vrtenje vektorja $\vec{a}$ v $\vec{b}$ v smeri gibanja kazalcev na uri.



Dokazati je možno, da za vektorski produkt velja

- $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$,
- $(\lambda\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times(\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a}\times\vec{b})$,
- $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$,
- $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}$ natanko tedaj, ko sta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ linearno odvisna. Posebej: $\vec{a}\times\vec{a} = \vec{0}$ za vsak vektor $\vec{a}$.

Ker so standardni bazni vektorji $\vec{i}, \vec{j}$ in $\vec{k}$ enotski in paroma pravokotni, je

$$\begin{aligned}
\vec{i}\times\vec{i} = \vec{j}\times\vec{j} = \vec{k}\times\vec{k} &= \vec{0},\\
\vec{i}\times\vec{j} = -\vec{j}\times\vec{i} &= \vec{k},\\
\vec{j}\times\vec{k} = -\vec{k}\times\vec{j} &= \vec{i},\\
\vec{k}\times\vec{i} = -\vec{i}\times\vec{k} &= \vec{j}.
\end{aligned}$$

Torej lahko za vektorja $\vec{a} = (x_1,y_1,z_1) = x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$ in $\vec{b} = (x_2,y_2,z_2) = x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$ zapišemo

$$\begin{aligned}
\vec{a}\times\vec{b} &= (x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})\times(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}) =\\
&= x_1x_2\vec{i}\times\vec{i}+x_1y_2\vec{i}\times\vec{j}+x_1z_2\vec{i}\times\vec{k}+\\
&\quad y_1x_2\vec{j}\times\vec{i}+y_1y_2\vec{j}\times\vec{j}+y_1z_2\vec{j}\times\vec{k}+\\
&\quad z_1x_2\vec{k}\times\vec{i}+z_1y_2\vec{k}\times\vec{j}+z_1z_2\vec{k}\times\vec{k} =\\
&= (y_1z_2-z_1y_2)\vec{i}+(z_1x_2-x_1z_2)\vec{j}+(x_1y_2-y_1x_2)\vec{k}.
\end{aligned}$$

Vektorski produkt vektorjev je torej

$$\begin{aligned}
\vec{a}\times\vec{b} &= (x_1,y_1,z_1)\times(x_2,y_2,z_2) =\\
&= (y_1z_2-z_1y_2,\, z_1x_2-x_1z_2,\, x_1y_2-y_1x_2).
\end{aligned}$$

Iz pogoja $\|\vec{a}\times\vec{b}\| = \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\sin\varphi$ vidimo, da je dolžina vektorja $\vec{a}\times\vec{b}$ enaka ploščini paralelograma, napetega na vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

Vektorski produkt najlažje izračunamo s pomočjo trivrstične determinante

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = (y_1z_2-z_1y_2)\vec{i}-(x_1z_2-z_1x_2)\vec{j}+(x_1y_2-y_1x_2)\vec{k}.$$

Zgled

Izračunaj vektorski produkt vektorjev $\vec{a} = (1,2,3)$ in $\vec{b} = (-1,0,2)$.

Vektorski produkt je

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (4,-5,2).$$

Zgled

Izračunaj $(2\vec{a}+3\vec{b})\times(\vec{a}+5\vec{b})$ za $\vec{a} = (-1,1,2)$ in $\vec{b} = (1,3,-2)$.

Računajmo

$$\begin{aligned}
(2\vec{a}+3\vec{b})\times(\vec{a}+5\vec{b}) &= 2\overbrace{\vec{a}\times\vec{a}}^{=\vec{0}}+10\vec{a}\times\vec{b}+3\vec{b}\times\vec{a}+15\overbrace{\vec{b}\times\vec{b}}^{=\vec{0}} =\\
&= 10\vec{a}\times\vec{b}-3\vec{a}\times\vec{b} = 7\vec{a}\times\vec{b} =\\
&= 7\vec{a}\times\vec{b} = 7\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 1 & 2\\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 7(-8,0,-4) =\\
&= (-56,0,-28).
\end{aligned}$$

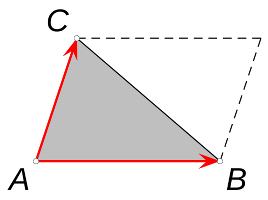
Do enakega rezultata pridemo tudi, če izračunamo $2\vec{a}+3\vec{b} = (1,11,-2)$ in $\vec{a}+5\vec{b} = (4,16,-8)$ ter

$$(1,11,-2)\times(4,16,-8) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 11 & -2\\ 4 & 16 & -8 \end{vmatrix} = (-56,0,-28).$$

Zgled

Določi ploščino trikotnika z oglišči v točkah $A(1,2,-1)$, $B(-1,0,2)$ in $C(2,-1,0)$.

Trikotnik je napet na vektorja $\vec{b} = \overrightarrow{AB} = (-2,-2,3)$ in $\vec{c} = \overrightarrow{AC} = (1,-3,1)$. Ploščina trikotnika ABC je enaka polovici ploščine paralelograma, napetega na vektorja $\vec{b}$ in $\vec{c}$, torej $p = \frac{1}{2}\|\vec{b}\times\vec{c}\|$. Računajmo:



$$\vec{b}\times\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (7,5,8).$$

Sledi $p = \frac{1}{2}\|\vec{b}\times\vec{c}\| = \frac{1}{2}\sqrt{7^2+5^2+8^2} = \frac{1}{2}\sqrt{138}$.

Zgled

Vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ oklepata kot $\frac{\pi}{6}$. Izračunaj ploščino paralelograma, napetega na vektorja $\vec{a}+2\vec{b}$ in $-3\vec{a}+\vec{b}$, če je $\|\vec{a}\| = 2$ in $\|\vec{b}\| = 3$.

Označimo $\varphi = \frac{\pi}{6}$ in računajmo

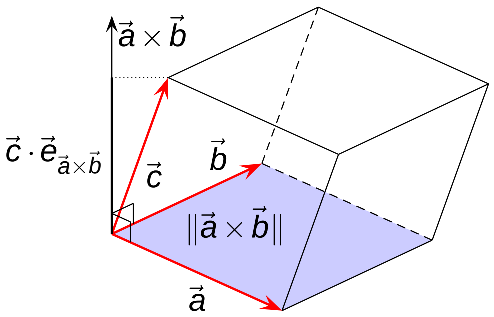
$$\begin{aligned}(\vec{a}+2\vec{b})\times(-3\vec{a}+\vec{b}) &= -3\overbrace{\vec{a}\times\vec{a}}^{=\vec{0}}+\vec{a}\times\vec{b}-6\vec{b}\times\vec{a}+2\overbrace{\vec{b}\times\vec{b}}^{=\vec{0}} = \\ &= 7\vec{a}\times\vec{b}.\end{aligned}$$

Sledi

$$\begin{aligned} p &= \|(\vec{a}+2\vec{b})\times(-3\vec{a}+\vec{b})\| = \|7\vec{a}\times\vec{b}\| = \\ &= 7\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\sin\varphi = 7\cdot 2\cdot 3\cdot(\tfrac{1}{2}) = 21.\end{aligned}$$

Mešani produkt

Mešani produkt vektorjev $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ je skalar $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$, ki ga označimo z $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$.
Absolutna vrednost mešanega produkta $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ je enaka prostornini paralelepipeda, napetega na vektorje $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$.



Če so vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ neničelni, je $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = 0$ natanko tedaj, ko ležijo vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ v isti ravnini.
Privzemimo sedaj, da neničelni vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ ne ležijo v isti ravnini. Mešani produkt $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ je potem pozitiven natanko tedaj, ko tvorijo vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ pozitivno orientirano trojico v $\mathbb{R}^3$.

Izrek (Cikličnost mešanega produkta)

Za poljubne vektorje $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ velja

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\vec{b},\vec{c},\vec{a}) = (\vec{c},\vec{a},\vec{b}).$$

Naj bo $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$ in $\vec{c}=(x_3,y_3,z_3)$. Potem je

$$\begin{aligned}(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} &= (y_1z_2-z_1y_2,\, z_1x_2-x_1z_2,\, x_1y_2-y_1x_2)\cdot(x_3,y_3,z_3),= \\ &= y_1z_2x_3-z_1y_2x_3+z_1x_2y_3-x_1z_2y_3+x_1y_2z_3-y_1x_2z_3\end{aligned}$$

kar najlažje izračunamo s pomočjo determinante:

$$\begin{aligned}(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} &= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \\ &= x_1(y_2z_3-z_2y_3)-y_1(x_2z_3-z_2x_3)+z_1(x_2y_3-y_2x_3).\end{aligned}$$

Spomnimo se, da lahko vrednost trivrstične determinante izračunamo s pomočjo **Sarrusovega pravila** tako, da na desni pripišemo prva dva stolpca ter seštejemo produkte na glavnih diagonalah (polne črte) in odštejemo produkte na stranskih diagonalah (črtkane črte):

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} x_1 & y_1 & z_1 & x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & x_3 & y_3 \end{array}\right. = x_1y_2z_3+y_1z_2x_3+z_1x_2y_3- \\ -z_1y_2x_3-x_1z_2y_3-y_1x_2z_3.$$

Zgled

Izračunaj prostornino paralelepipeda, napetega na vektorje $\vec{a}=(-2,1,3)$, $\vec{b}=(1,-2,2)$ in $\vec{c}=(-3,0,1)$.

Prostornina je absolutna vrednost mešanega produkta; tj. $V=\left|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\right|$. Računajmo

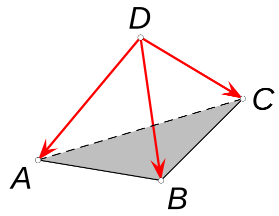
$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix}=4-6+0-18-1-0=-21.$$

Torej je $V=\left|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\right|=21$.

Zgled

Izračunaj prostornino piramide z oglišči v točkah $A(1,2,3)$, $B(-1,2,0)$, $C(2,1,-3)$ in $D(1,-1,0)$.

Označimo $\vec{a}=\overrightarrow{DA}=(0,3,3)$, $\vec{b}=\overrightarrow{DB}=(-2,3,0)$ in $\vec{c}=\overrightarrow{DC}=(1,2,-3)$. Prostornina piramide je $\frac{1}{6}$ prostornine paralelepipeda, napetega na vektorje $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$; tj. $V=\frac{1}{6}\left|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\right|$. Računajmo



$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}=0+0-12-0-18-9=-39.$$

Torej je $V=\frac{1}{6}\left|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\right|=\frac{39}{6}=\frac{13}{2}$.

Zgled

Volumen paralelepipeda, napetega na $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ je 1. Koliko je volumen paralelepipeda, napetega na $2\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{a}+2\vec{c}$, $\vec{b}+\vec{c}$?

$$
\begin{aligned}
(2\vec{a}-\vec{b},\vec{a}+2\vec{c},\vec{b}+\vec{c}) &= \Big((2\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+2\vec{c})\Big)\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \\
&= (2\underbrace{\vec{a}\times\vec{a}}_{=\vec{0}}+4\vec{a}\times\vec{c}-\vec{b}\times\vec{a}-2\vec{b}\times\vec{c})\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \\
&= 4(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{b}-\underbrace{(\vec{b}\times\vec{a})\cdot\vec{b}}_{=0}-\underbrace{2(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{b}}_{=0}+ \\
&\quad \underbrace{4(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{c}}_{=0}-(\vec{b}\times\vec{a})\cdot\vec{c}-\underbrace{2(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{c}}_{=0} = \\
&= -4(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}+(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = -3(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}.
\end{aligned}
$$

Iskani volumen je $\left|(2\vec{a}-\vec{b},\vec{a}+2\vec{c},\vec{b}+\vec{c})\right| = 3\left|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\right| = 3.$

Zgled

Ali lahko določimo vrednost parametra λ tako, da bodo vektorji $\vec{a}=(-1,1,2)$, $\vec{b}=(\lambda,0,1)$ in $\vec{c}=(1,2,-1)$ ležali v isti ravnini?

Vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ bodo komplanarni natanko tedaj, ko bo vrednost mešanega produkta enaka 0; tj. $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=0$. Računajmo

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ \lambda & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0+1+4\lambda+2+\lambda-0 = 5\lambda+3.$$

Torej je $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = 5\lambda+3 = 0$, kar nam da $\lambda = -\frac{3}{5}$.

Dvojni vektorski produkt

Izrek

Za poljubne vektorje $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ velja

$$
\begin{aligned}
(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} &= (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a} \qquad (3)\\
\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) &= (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c} \qquad (4)
\end{aligned}
$$

Enakost (4) sledi iz enakosti (3), če upoštevamo, da je

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = -(\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{a} = (\vec{c}\times\vec{b})\times\vec{a}.$$

Enakost (3) pa najlažje dokažemo tako, da postavimo

$$
\begin{aligned}
\vec{a} &= x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k},\\
\vec{b} &= x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k},\\
\vec{c} &= x_3\vec{i}+y_3\vec{j}+z_3\vec{k},
\end{aligned}
$$

in izračunamo obe strani v formuli (3). □

Izrek (Jacobijeva identiteta)

Za poljubne vektorje $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ velja

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}+(\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{a}+(\vec{c}\times\vec{a})\times\vec{b}=\vec{0}.$$

Identiteto dokažemo z uporabo formule

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}.$$

Izraz na levi strani je tako enak

$$(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}+(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}-(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}+(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}=\vec{0}.$$

Izrek (Lagrangeova identiteta)

Za poljubne vektorje $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ in $\vec{d}$ velja

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d}) - (\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c}).$$

Produkt $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})$ lahko prepoznamo kot mešani produkt vektorjev $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}\times\vec{d}$. Torej je

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = (\vec{a},\vec{b},\vec{c}\times\vec{d}) = (\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{d}))\cdot\vec{a},$$

kjer zadnja enakost drži zaradi cikličnosti mešanega produkta. Sledi

$$\begin{aligned}(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) &= (\vec{a},\vec{b},\vec{c}\times\vec{d}) = (\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{d}))\cdot\vec{a} = \\ &= ((\vec{b}\cdot\vec{d})\vec{c} - (\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{d})\cdot\vec{a} = (\vec{b}\cdot\vec{d})(\vec{c}\cdot\vec{a}) - (\vec{b}\cdot\vec{c})(\vec{d}\cdot\vec{a}) \\ &= (\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d}) - (\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c}).\end{aligned}$$

Lagrangeovo identiteto

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d}) - (\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c})$$

pogosto uporabljamo v primeru, ko je $\vec{a}=\vec{c}$ in $\vec{b}=\vec{d}$. Tedaj je

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = (\vec{a}\cdot\vec{a})(\vec{b}\cdot\vec{b}) - (\vec{a}\cdot\vec{b})(\vec{b}\cdot\vec{a}),$$

kar lahko zapišemo tudi v obliki $\|\vec{a}\times\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2\cdot\|\vec{b}\|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2$ oziroma

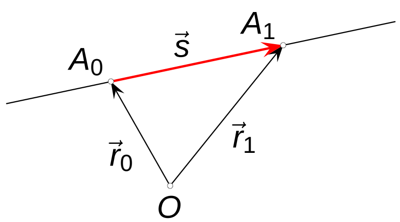
$$\|\vec{a}\times\vec{b}\|^2 + (\vec{a}\cdot\vec{b})^2 = \|\vec{a}\|^2\cdot\|\vec{b}\|^2.$$

Premica

Naj bosta A_0 in A_1 različni točki v prostoru ter $\vec{r}_0$ in $\vec{r}_1$ njuna krajevna vektorja. Potem obstaja natanko ena premica, ki ti dve točki vsebuje. Naj bo $\vec{r}$ krajevni vektor poljubne točke na premici. Potem sta vektorja $\vec{r}-\vec{r}_0$ in $\vec{s}=\vec{r}_1-\vec{r}_0$ linearno odvisna in lahko zapišemo $\vec{r}-\vec{r}_0=\lambda\vec{s}$ oziroma

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda\vec{s}. \tag{5}$$

Vektor $\vec{s}$ imenujmo *smerni vektor* premice, enačbo (5) pa *vektorska enačba premice*.



Če je $\vec{r}=(x,y,z)$, $\vec{r}_0=(x_0,y_0,z_0)$ in $\vec{s}=(x_1,y_1,z_1)$, lahko gornjo enačbo zapišemo v *parametrični obliki*

$$x = x_0+\lambda x_1, \quad y = y_0+\lambda y_1, \quad z = z_0+\lambda z_1.$$

Če predpostavimo, da smerni vektor ne leži v nobeni od koordinatnih ravnin (tj. $x_1y_1z_1\neq 0$), lahko iz vsake izmed gornjih enačb izrazimo λ in izenačimo. Dobimo *normalno enačbo premice*

$$\frac{x-x_0}{x_1} = \frac{y-y_0}{y_1} = \frac{z-z_0}{z_1}. \tag{6}$$

Če pa je npr. $x_1=0$, pa v (6) namesto ulomka $\frac{x-x_0}{x_1}$ zapišemo pogoj $x=x_0$.

Zgled

Zapiši parametrično in normalno enačbo premice skozi točki $A_0(0,1,-2)$ in $A_1(3,-2,1)$.

Smerni vektor premice je

$$\vec{s}=(3,-2,1)-(0,1,-2)=(3,-3,3)=3(1,-1,1).$$

Za smerni vektor lahko vzamemo kar vektor $(1,-1,1)$. Parametrična enačba premice se tako glasi

$$\vec{r}=(0,1,-2)+\lambda(1,-1,1),$$

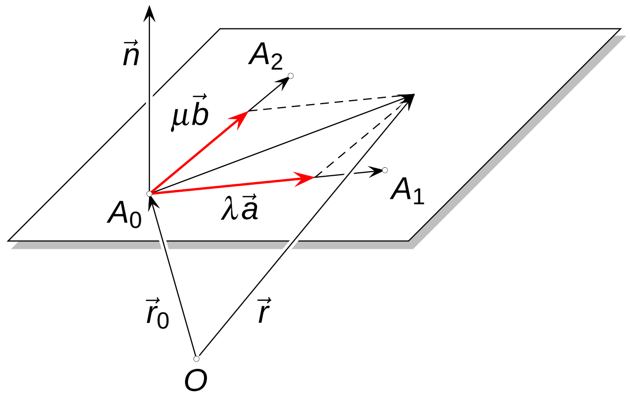
normalna pa

$$\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{1}.$$

Ravnina

Naj bodo A_0, A_1 in A_2 take točke v prostoru, da sta vektorja $\vec{a}=\overrightarrow{A_0A_1}$ in $\vec{b}=\overrightarrow{A_0A_2}$ linearno neodvisna. Potem točke A_0, A_1 in A_2 določajo natanko eno ravnino. Če je $\vec{r}$ krajevni vektor poljubne točke na ravnini, velja $\vec{r}-\vec{r}_0=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$. Torej je

$$\vec{r}=\vec{r}_0+\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}. \tag{7}$$



Po definiciji vektorskega produkta je vektor $\vec{n}=\vec{a}\times\vec{b}$ pravokoten na ravnino, ki jo vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ napenjata. Torej je $\vec{n}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0)=0$. Sledi

$$\vec{r}\cdot\vec{n}=\vec{r}_0\cdot\vec{n}. \tag{8}$$

Enačbo (8) imenujemo *normalna enačba ravnine*, vektor $\vec{n}$ pa *normala ravnine*. Običajno zapišemo normalno enačbo ravnine v obliki

$$\vec{r}\cdot\vec{n}=d, \tag{9}$$

saj je število $\vec{r}\cdot\vec{n}$ enako za vse točke na ravnini, torej tudi za $\vec{r}=\vec{r}_0$.
Če je $\vec{r}=(x,y,z)$, $\vec{n}=(a,b,c)$ in $\vec{r}_0\cdot\vec{n}=d$, lahko gornjo enačbo zapišemo kot

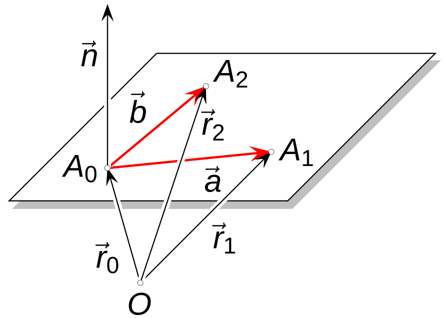
$$ax+by+cz=d. \tag{10}$$

Zgled

Zapiši enačbo ravnine skozi točke $A_0(3,1,-2)$, $A_1(3,-2,1)$ in $A_2(-1,0,1)$.

Označimo $\vec{a}=\vec{r}_1-\vec{r}_0=(3,-2,1)-(3,1,-2)=(0,-3,3)$ in $\vec{b}=\vec{r}_2-\vec{r}_0=(-1,0,1)-(3,1,-2)=(-4,-1,3)$.
Normala ravnine je

$$\vec{n}=\vec{a}\times\vec{b}=(-6,-12,-12).$$



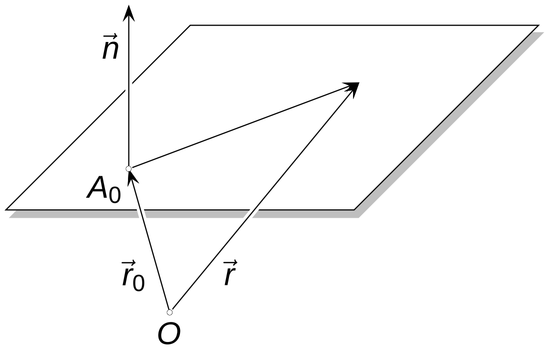
Ker dolžina normale ni pomembna, lahko postavimo $\vec{n}=(1,2,2)$. Enačba ravnine je $(x,y,z)\cdot(1,2,2)=(3,1,-2)\cdot(1,2,2)$, kar lahko zapišemo v obliki

$$x+2y+2z=1.$$

Zgled

Zapiši enačbo ravnine, ki vsebuje točko $A_0(1,1,2)$ in je pravokotna na vektor $\vec{a} = (-1,2,-2)$.

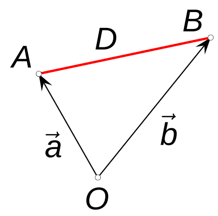
Vektor $\vec{a}$ je normala te ravnine: $\vec{n} = \vec{a}$. Enačba ravnine se zato glasi $(x,y,z)\cdot(-1,2,-2) = (1,1,2)\cdot(-1,2,-2)$ oziroma $-x+2y-2z = -3$.



Razdalja med točkama

Če imata točki A in B krajevna vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$, je razdalja med njima enaka

$$D = \|\vec{b} - \vec{a}\|.$$



Zgled

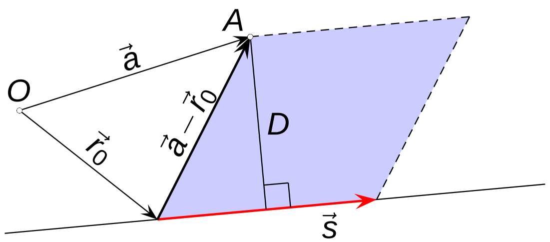
Izračunaj razdaljo med točkama $A(-2,1,3)$, $B(3,0,-1)$.

Za $\vec{a} = (-2,1,3)$ in $\vec{b} = (3,0,-1)$ je $\vec{b} - \vec{a} = (5,-1,-4)$ in

$$D = \sqrt{5^2 + (-1)^2 + (-4)^2} = \sqrt{42}.$$

Razdalja med točko in premico

Naj ima točka A krajevni vektor $\vec{a}$, premica pa naj bo podana z enačbo $\vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda\vec{s}$. Če točka A ne leži na tej premici, razpenjata vektorja $\vec{s}$ in $\vec{a} - \vec{r}_0$ paralelogram, katerega ploščina je enaka $\|\vec{s} \times (\vec{a} - \vec{r}_0)\|$. Ker je ploščina paralelograma enaka tudi $D\|\vec{s}\|$, sledi



$$D = \frac{\|\vec{s} \times (\vec{a} - \vec{r}_0)\|}{\|\vec{s}\|}.$$

Opazimo lahko, da je gornja formula pravilna tudi, če točka A leži na dani premici, saj je tedaj $D = 0$ in tudi $\vec{s} \times (\vec{a} - \vec{r}_0) = \vec{0}$.

Zgled

Izračunaj razdaljo med točko $A(2,2,0)$ in premico z enačbo

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{5}.$$

Iz podatkov razberemo $\vec{a} = (2,2,0)$, $\vec{s} = (4,3,5)$ in $\vec{r}_0 = (1,0,2)$. Potem je $\vec{a} - \vec{r}_0 = (1,2,-2)$ in

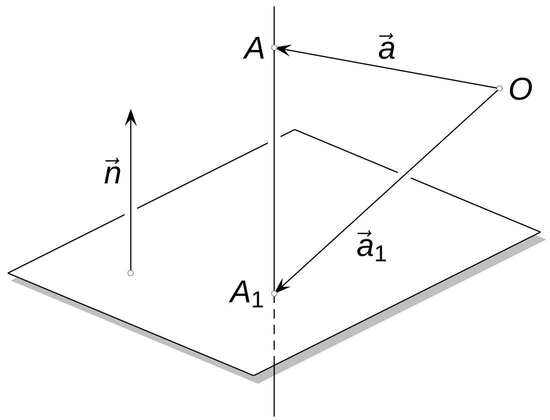
$$\vec{s} \times (\vec{a} - \vec{r}_0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (-16,13,5).$$

in

$$D = \frac{\|\vec{s} \times (\vec{a} - \vec{r}_0)\|}{\|\vec{s}\|} = \frac{\sqrt{(-16)^2 + 13^2 + 5^2}}{\sqrt{4^2 + 3^2 + 5^2}} = \frac{\sqrt{450}}{\sqrt{50}} = 3.$$

Razdalja med točko in ravnino

Dana je točka A s krajevnim vektorjem $\vec{a}$ in ravnina z enačbo $\vec{r}\cdot\vec{n}=d$. Razdaljo med točko in ravnino izračunamo tako, da točko pravokotno projeciramo na ravnino (točka A_1) ter izračunamo razdaljo med točkama A in A_1.



Premica, ki poteka skozi točko A in seka ravnino pravokotno, ima enačbo $\vec{r}=\vec{a}+\lambda\vec{n}$. Če z $\vec{a}_1$ označimo krajevni vektor točke A_1, velja

$$\vec{a}_1 = \vec{a}+\lambda\vec{n}, \qquad (11)$$
$$\vec{a}_1\cdot\vec{n} = d \qquad (12)$$

Ko (11) vstavimo v (12), dobimo $\lambda=\frac{d-\vec{a}\cdot\vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}$. Torej je $D=\|\vec{a}_1-\vec{a}\|=|\lambda|\cdot\|\vec{n}\|$ oziroma

$$D=\frac{|d-\vec{a}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}.$$

Gornja formula velja tudi v primeru, ko leži točka A na ravnini, saj je $D=0$ in $d-\vec{a}\cdot\vec{n}=0$, ker vektor $\vec{a}$ ustreza enačbi ravnine $\vec{r}\cdot\vec{n}=d$.

Zgled

Izračunaj razdaljo med točko $A(1,2,-1)$ in ravnino z enačbo

$$-3x+y+2z=5.$$

Iz podatkov razberemo $\vec{a}=(1,2,-1)$, $\vec{n}=(-3,1,2)$ in $d=5$. Torej je

$$d-\vec{a}\cdot\vec{n}=5-(1,2,-1)\cdot(-3,1,2)=5-(-3+2-2)=8$$

in

$$\|\vec{n}\|=\sqrt{(-3)^2+1^2+2^2}=\sqrt{14}.$$

Sledi

$$D=\frac{|d-\vec{a}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}=\frac{8}{\sqrt{14}}.$$

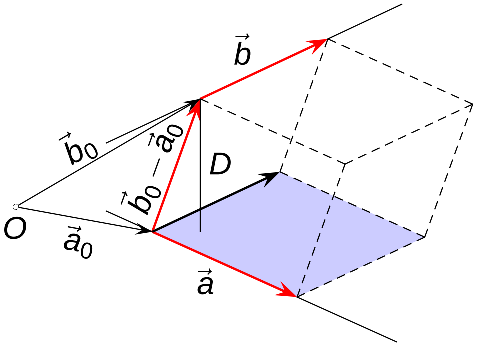
Razdalja med premicama

V prostoru sta podani premici z enačbama $\vec{r}=\vec{a}_0+\lambda\vec{a}$ in $\vec{r}=\vec{b}_0+\lambda\vec{b}$.

Privzeti smemo, da premici nista vzporedni, saj lahko v tem primeru izračunamo razdaljo med premicama kot razdaljo med eno premico in poljubno točko na drugi premici.

Privzemimo še, da se premici ne sekata.

Vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{b}_0 - \vec{a}_0$ so linearno neodvisni in je zato prostornina paralelepipeda, napetega na te tri vektorje, enaka $|(\vec{a},\vec{b},\vec{b}_0 - \vec{a}_0)|$. Prostornino pa lahko izračunamo tudi kot produkt ploščine osnovne ploskve (tj. $\|\vec{a}\times\vec{b}\|$) in višine D, ki je hkrati tudi neznana razdalja med premicama. Sledi



$$D = \frac{|(\vec{a},\vec{b},\vec{b}_0 - \vec{a}_0)|}{\|\vec{a}\times\vec{b}\|}.$$

Gornja formula velja tudi, če se premici sekata, saj je v tem primeru $D = 0$, velja pa tudi $(\vec{a},\vec{b},\vec{b}_0 - \vec{a}_0) = 0$, saj leži $\vec{b}_0 - \vec{a}_0$ v ravnini, napeti na $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

Zgled

Izračunaj razdaljo med premico skozi točki $A(0,-2,1)$ in $B(-3,1,2)$ ter premico, podano z enačbama

$$x = 2 \text{ in } \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{2}.$$

Vektorska oblika enačbe premice skozi točki $A(0,-2,1)$ in $B(-3,1,2)$ je $\vec{r} = \vec{a}_0 + \lambda\vec{a}$, kjer je $\vec{a}_0 = (0,-2,1)$ in $\vec{a} = (-3,3,1)$. Vektorska oblika enačbe druge premice pa je $\vec{r} = \vec{b}_0 + \lambda\vec{b}$, kjer je $\vec{b}_0 = (2,-1,3)$ in $\vec{b} = (0,3,2)$. Torej je

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (3,6,-9), \qquad \|\vec{a}\times\vec{b}\| = \sqrt{126} = 3\sqrt{14},$$

$$\vec{b}_0 - \vec{a}_0 = (2,1,2) \text{ in } D = \frac{|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{b}_0 - \vec{a}_0)|}{\|\vec{a}\times\vec{b}\|} = \frac{|-6|}{3\sqrt{14}} = \frac{2}{\sqrt{14}}.$$

Zgled

Določi presečišče premice z enačbo $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$ z ravnino z enačbo $x - 2y + z = -5$.

Pišimo

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1} = t.$$

Potem je

$$x = t+1, \quad y = 2t, \quad z = t-1.$$

Iz enačbe ravnine sledi

$$\overbrace{(t+1)}^{x} - 2\overbrace{(2t)}^{y} + \overbrace{(t-1)}^{z} = -5,$$

kar nam da $-2t = -5$ oz. $t = \frac{5}{2}$. Presečišče je v točki $(\frac{7}{2}, 5, \frac{3}{2})$.

Zgled

Določi presečišče ravnin z enačbama

$$x - 2y - 4z = -3 \text{ in } 2x + y - 3z = -1.$$

Iz prve enačbe izrazimo $x = -3 + 2y + 4z$ in ga vstavimo v drugo enačbo

$$2(-3 + 2y + 4z) + y - 3z = -1.$$

Sledi $5y + 5z = 5$ in

$$y = -z + 1.$$

Torej je

$$x = -3 + 2(-z+1) + 4z = 2z - 1.$$

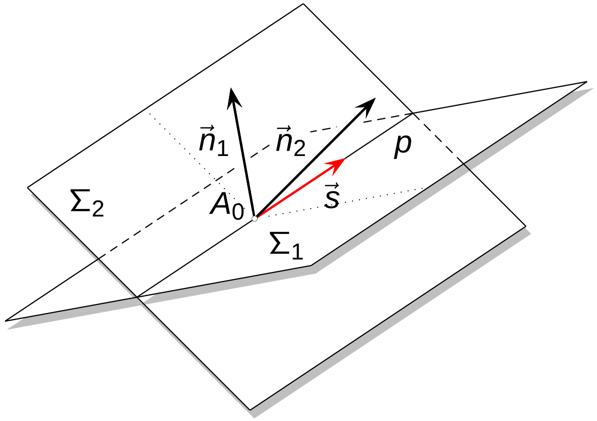
Enačbo premice lahko zapišemo tudi v obliki

$$(x,y,z) = (2z-1, -z+1, z) = (-1,1,0) + z(2,-1,1).$$

Presečišče dveh ravnin lahko določimo tudi splošno. Če sta ravnini podani z enačbama

$$\vec r\cdot\vec n_1 = d_1 \quad \text{in} \quad \vec r\cdot\vec n_2 = d_2,$$

je smerni vektor premice p, ki je presečišče ravnin, enak $\vec s = \vec n_1\times\vec n_2$. Da bi bila premica p natančno določena, potrebujemo še neko točko A_0 na tej premici.



Ker ravnina Σ, ki jo določata $\vec n_1$ in $\vec n_2$, seka premico p pravokotno, lahko za točko A_0 (s krajevnim vektorjem $\vec r_0$) izberemo to presečišče. Vstavimo $\vec r_0 = \lambda_1\vec n_1 + \lambda_2\vec n_2$ v enačbi obeh ravnin in dobimo sistem

$$\begin{aligned} \lambda_1\|\vec n_1\|^2 + \lambda_2\vec n_1\cdot\vec n_2 &= d_1,\\ \lambda_1\vec n_1\cdot\vec n_2 + \lambda_2\|\vec n_2\|^2 &= d_2. \end{aligned}$$

ki ima rešitev

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{d_1\|n_2\|^2 - d_2\vec n_1\cdot\vec n_2}{\|\vec n_1\|^2\cdot\|\vec n_2\|^2 - (\vec n_1\cdot\vec n_2)^2},\\ \lambda_2 &= \frac{d_2\|n_1\|^2 - d_1\vec n_1\cdot\vec n_2}{\|\vec n_1\|^2\cdot\|\vec n_2\|^2 - (\vec n_1\cdot\vec n_2)^2}. \end{aligned}$$

Upoštevamo Lagrangeovo identiteto $\|\vec n_1\|^2\cdot\|\vec n_2\|^2 - (\vec n_1\cdot\vec n_2)^2 = \|\vec n_1\times\vec n_2\|^2$ in dobljeno upoštevamo v enačbi $\vec r_0 = \lambda_1\vec n_1 + \lambda_2\vec n_2$.

Računajmo

$$\begin{aligned} \vec r_0 &= \frac{d_1\|n_2\|^2 - d_2\vec n_1\cdot\vec n_2}{\|\vec n_1\times\vec n_2\|^2}\vec n_1 + \frac{d_2\|n_1\|^2 - d_1\vec n_1\cdot\vec n_2}{\|\vec n_1\times\vec n_2\|^2}\vec n_2 =\\ &= \frac{d_1(\|n_2\|^2\vec n_1 - (\vec n_1\cdot\vec n_2)\vec n_2) + d_2(\|n_1\|^2\vec n_2 - (\vec n_1\cdot\vec n_2)\vec n_1)}{\|\vec n_1\times\vec n_2\|^2} =\\ &= \frac{d_1(\vec n_2\times\vec n_1)\times\vec n_2 + d_2(\vec n_1\times\vec n_2)\times\vec n_1)}{\|\vec n_1\times\vec n_2\|^2}. \end{aligned}$$

Izrek

Nevzporedni ravnini z enačbama $\vec r\cdot\vec n_1 = d_1$ in $\vec r\cdot\vec n_2 = d_2$ se sekata v premici z enačbo

$$\vec r = \frac{d_1(\vec n_2\times\vec n_1)\times\vec n_2 + d_2(\vec n_1\times\vec n_2)\times\vec n_1)}{\|\vec n_1\times\vec n_2\|^2} + \lambda\vec n_1\times\vec n_2.$$

Zgled

Določi presečišče ravnin z enačbami

$$\begin{aligned} 2x + y + 3z &= 1,\\ 3x + 3y - z &= 2 \ \textit{in}\\ x - y + z &= -3. \end{aligned}$$

Poiskati moramo rešitev sistema 3 enačb s 3 neznankami. Iz zadnje enačbe izrazimo $x = y - z - 3$. Sledi

$$\begin{aligned} 2(y - z - 3) + y + 3z &= 1 \ \text{in}\\ 3(y - z - 3) + 3y - z &= 2, \end{aligned}$$

kar lahko poenostavimo v

$$\begin{aligned} 3y + z &= 7 \ \text{in}\\ 6y - 4z &= 11. \end{aligned}$$

Torej je $z = 7 - 3y$ in

$$6y - 4(7 - 3y) = 11,$$

kar nam da $18y = 39$ in

$$\begin{aligned} y &= \frac{39}{18} = \frac{13}{6}, \\ z &= 7 - 3y = \frac{1}{2}, \\ x &= y - z - 3 = \frac{13}{6} - \frac{1}{2} - 3 = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Ravnine se torej sekajo v točki $(-\frac{4}{3}, \frac{13}{6}, \frac{1}{2})$.

Tudi presečišče treh ravnin lahko določimo splošno. Ravnine naj bodo podane z enačbami

$$\vec{r} \cdot \vec{n}_1 = d_1, \quad \vec{r} \cdot \vec{n}_2 = d_2 \quad \text{in} \quad \vec{r} \cdot \vec{n}_3 = d_3.$$

Če so normale ravnin linearno neodvisni vektorji, so tudi vektorji

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2, \quad \vec{n}_2 \times \vec{n}_3, \quad \vec{n}_3 \times \vec{n}_1$$

linearno neodvisni in lahko iskani vektor $\vec{r}$ razvijemo po tej bazi. Torej

$$\vec{r} = \lambda_3 \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 + \lambda_1 \vec{n}_2 \times \vec{n}_3 + \lambda_2 \vec{n}_3 \times \vec{n}_1.$$

Potem je $\vec{r} \cdot \vec{n}_1 = \lambda_1 (\vec{n}_2 \times \vec{n}_3) \cdot \vec{n}_1 = d_1$, od koder sledi $\lambda_1 = \frac{d_1}{(\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3)}$. Podobno je še $\lambda_2 = \frac{d_2}{(\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3)}$ in $\lambda_3 = \frac{d_3}{(\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3)}$.

Izrek

Če so normale ravnin z enačbami

$$\vec{r} \cdot \vec{n}_1 = d_1, \quad \vec{r} \cdot \vec{n}_2 = d_2 \quad \textit{in} \quad \vec{r} \cdot \vec{n}_3 = d_3$$

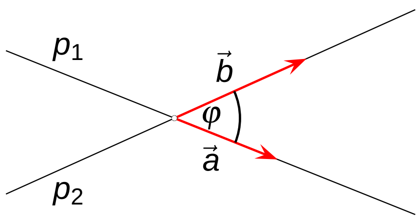
linearno neodvisne, se ravnine sekajo v eni točki in ta točka ima krajevni vektor

$$\vec{r} = \frac{1}{(\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3)} \left(d_1 \vec{n}_2 \times \vec{n}_3 + d_2 \vec{n}_3 \times \vec{n}_1 + d_3 \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \right).$$

Kot med premicama

Če se premici $\vec{r} = \vec{a}_0 + \lambda \vec{a}$ in $\vec{r} = \vec{b}_0 + \lambda \vec{b}$ sekata, je kot med njima enak kotu med smernima vektorjema. Torej

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}. \qquad (13)$$



Če pa se premici ne sekata, ju vzporedno premaknemo. Ker se pri vzporednem premiku smerni vektor ohranja, še vedno velja ista formula (13).

Kot med premico in ravnino

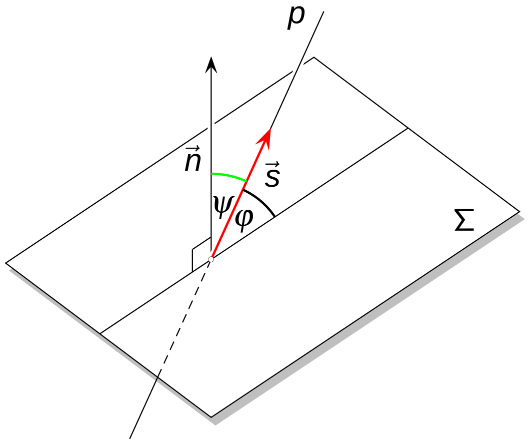
Kot med premico

$$\vec{r} = \vec{s}_0 + \lambda\vec{s}$$

in ravnino

$$\vec{n}\cdot\vec{r} = d$$

je enak komplementu kota ψ med premico in normalo ravnine. Torej je $\psi = \frac{\pi}{2} - \varphi$ in



$$\sin\varphi = \cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \cos\psi = \frac{\vec{s}\cdot\vec{n}}{\|\vec{s}\|\cdot\|\vec{n}\|}.$$

Kot med ravninama

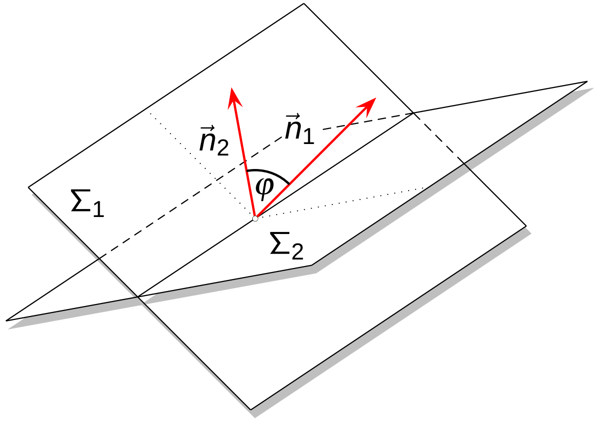
Kot med ravninama

$$\vec{n}_1\cdot\vec{r} = d_1$$

in

$$\vec{n}_2\cdot\vec{r} = d_2$$

je enak ali pa suplementaren kotu med normalama ravnin. Torej



$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{\|\vec{n}_1\|\cdot\|\vec{n}_2\|}.$$

Vektorske funkcije

Naj bo $I \subset \mathbb{R}$ interval. *Vektorska funkcija* je preslikava $r: I \to \mathbb{R}^3$. Namesto r lahko zapišemo tudi $\vec{r}$ ali $\mathbf{r}$, če želimo poudariti, da gre za funkcijo, katere zaloga vrednosti leži v $\mathbb{R}^3$.

Zaloga vrednosti Z_r funkcije r je podmožica v $\mathbb{R}^3$ in jo imenujemo *tir funkcije r*.

Pri vektorskih funkcijah pogosto označujemo neodvisno spremenljivko s t. Za vsak $t \in I$ je vrednost $r(t)$ točka v $\mathbb{R}^3$ in lahko zapišemo $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$, kjer so x, y, z funkcije, ki slikajo iz I v $\mathbb{R}$. Funkcije x, y, z imenujemo *komponente* vektorske funkcije r.

Zgled

Nariši tir vektorske funkcije r, podane s predpisom $r(t) = (\cos t, \sin t, t)$.

Za funkciji, podani s predpisoma

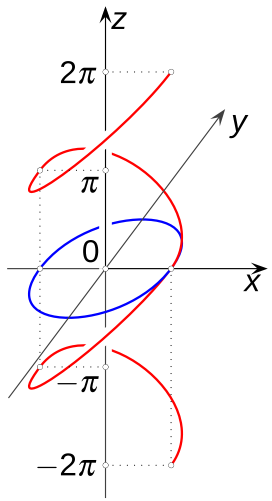
$$x(t) = \cos t,$$
$$y(t) = \sin t,$$

velja

$$x^2(t) + y^2(t) = 1.$$

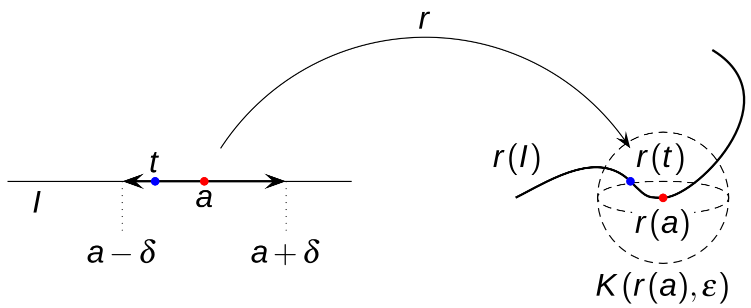
Torej leži vsaka točka tira funkcije r nad enotsko krožnico v ravnini.

Tir te funkcije imenujemo *vijačnica*. Dobimo jo lahko tudi tako, da (enakokrak) pravokotni trikotnik navijemo okoli valja.



Zveznost vektorske funkcije

Naj bo I interval. Vektorska funkcija $r : I \to \mathbb{R}^3$ je zvezna *zvezna v točki $a \in I$*, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da za točke, ki zadoščajo pogoju $|t - a| < \delta$, velja $\mathrm{dist}(r(t), r(a)) < \varepsilon$. Funkcija r je *zvezna na množici I*, če je za vsako točko $a \in I$ funkcija r zvezna v točki a.



Izrek

Vektorska funkcija $r : I \to \mathbb{R}^3$, podana po komponentah s funkcijami $x, y, z : I \to \mathbb{R}$ je zvezna natanko tedaj, ko so funkcije x, y, z zvezne.

Naj bosta $r, s : I \to \mathbb{R}^3$ vektorski funkciji, $\alpha : I \to \mathbb{R}$ pa skalarna funkcija. Potem je $t \mapsto \alpha(t) r(t)$ vektorska funkcija.
Za vsak $t \in I$ sta $r(t)$ in $s(t)$ vektorja v $\mathbb{R}^3$ in lahko izračunamo vsoto $r(t) + s(t) \in \mathbb{R}^3$, vektorski produkt $r(t) \times s(t) \in \mathbb{R}^3$ ter skalarni produkt $r(t) \cdot s(t) \in \mathbb{R}$.

Izrek

Če sta vektorski funkciji r in s zvezni, sta zvezni tudi vektorski funkciji $t \mapsto r(t) + s(t)$ in $t \mapsto r(t) \times s(t)$ ter skalarna funkcija $t \mapsto r(t) \cdot s(t)$. Če je skalarna funkcija α zvezna, je zvezna tudi vektorska funkcija $t \mapsto \alpha(t) r(t)$.

Odvod vektorske funkcije

Naj bo $a \in I$ notranja točka. Vektorska funkcija $r : I \to \mathbb{R}^3$ je odvedljiva v točki a, če obstaja limita

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(a+h) - r(a)}{h}.$$

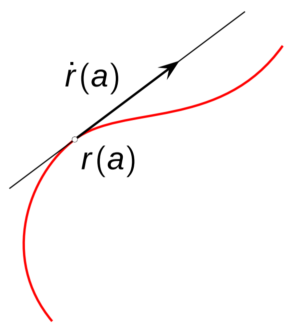
Vrednost te limite označimo z $\dot{r}(x)$ in imenujemo *odvod funkcije r v točki a*. Pravimo, da je funkcija r *odvedljiva na intervalu I*, če je odvedljiva v vsaki točki na tem intervalu.

Izrek

Vektorska funkcija $r : I \to \mathbb{R}^3$, podana po komponentah s funkcijami $x, y, z : I \to \mathbb{R}$ je odvedljiva v točki $a \in I$ natanko tedaj, ko so funkcije x, y, z odvedljive v točki $a \in I$. Velja $\dot{r}(a) = (\dot{x}(a), \dot{y}(a), \dot{z}(a))$.

Geometrijski pomen odvoda vektorske funkcije

Po definiciji je odvod vektorske funkcije r vektorska funkcija $\dot{r}$ in je smerni vektor tangentne premice na tir funkcije r v točki $r(a)$.



Zgled

Vektorska funkcija r je podana s predpisom $r(t) = (\cos t, \sin t, t)$. Zapiši enačbo tangente na krivuljo v točki, kjer krivulja prebada ravnino $z = \frac{5\pi}{4}$. Pod kakšnim kotom seka krivulja to ravnino?

Iz parametrizacije krivulje sledi, da v presečni točki T velja $t = \frac{5\pi}{4}$. Torej je $\vec{s} = T(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{5\pi}{4})$. Ker je $\dot{r} = (-\sin t, \cos t, 1)$, je smerni vektor tangente enak $\vec{s}_0 = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$. Enačba premice se torej glasi $\vec{r} = \vec{s} + \tau \vec{s}_0$ pri zgoraj določenih $\vec{s}$ in $\vec{s}_0$.

Normala ravnine ima enačbo $\vec{n} = (0,0,1)$, zato smerni vektor z njo oglepa kot, podan z $\cos\varphi = \frac{\vec{n}\cdot\vec{s}_0}{\|\vec{n}\|\cdot\|\vec{s}_0\|} = \frac{1}{1\cdot\sqrt{2}}$. Sledi $\varphi = \frac{\pi}{4}$, zato seka tangentna premica pod potom $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$.

Dolžina tira vektorske funkcije

Naj bo vektorska funkcija $r : I \to \mathbb{R}^3$ podana po komponentah:

$$r(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

Dolžina tira vektorske funkcije med točkama α in β je enaka

$$L = \int_\alpha^\beta \|\dot{r}(t)\|\, dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}\, dt.$$

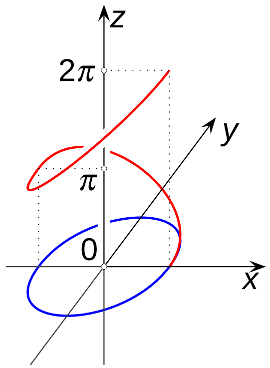
(Oznaka $\dot{x}^2(t)$ pomeni $(\dot{x}(t))^2$.)

Zgled

Izračunaj dolžino enega zavoja vijačnice.

Vijačnica je podana z vektorsko funkcijo r,

$$r(t) = (\cos t, \sin t, t).$$



Torej je

$$\dot{r}(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$$

in

$$\|\dot{r}(t)\| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Dolžina enega zavoja vijačnice je tako enaka

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\, dt = 2\pi\sqrt{2}.$$