Naloge - Živilstvo 2013-2014

Jan Kogoj

18. 4. 2014

1. Plavamo čez 5 m široko reko, ki teče s hitrostjo 2 m/s. Hitrost našega plavanja je 1 m/s. (a) Pod katerim kotom glede na tok reke moramo plavati, da bomo čim manj časa v vodi? Za koliko nas pri tem reka odnese s tokom? (b) Pod katerim kotom glede na tok reke moramo plavati, da nas bo reka čim manj odnesla?

   Rešitev: *Ločimo gibanje na dve komponenti - eno v smeri toka reke, eno pravokotno na tok. Gibanje v eni smeri je povsem neodvisno od gibanja v drugi smeri - z drugimi besedami, da pridemo na drugo stran reke, moramo premagati le $s = 5$ m v prečni smeri - najhitreje bomo to storili, če pustimo, da nas reka nosi s sabo, mi pa vso moč porabimo samo za gibanje pravokotno na tok. Za drug del naloge najprej iz časa, ki ga potrebujemo za prečkanje reke, izračunamo kako daleč nas odnese reka. Odmik od izhodišča v smeri toka označimo z d in kot glede na tok reke ϕ. Tedaj velja $d = t(v_{reke} - v_{plavanja} \cos\phi)$. Čas povežemo še s prečkanjem reke, $s = v_{plavanja} \sin\phi t$. Iz teh dveh enačb, dobimo enačbo, ki povezuje kot in razdaljo, za katero nas nosi voda. Minimalno razdaljo dobimo, ko je odvod te razdalje po kotu ϕ enak 0.*

2. Čolnu, ki se giblje s hitrostjo 4 m/s, se ustavi motor. Kolikšno pot napravi v naslednjih 10 s, če velja za pospešek enačba $a = -kv^2$ s koeficientom $k = 0.65$ m^{-1}? Kolikšna je hitrost čolna po 10 s? Kje in kdaj se ustavi?

   Rešitev: *Začnemo z definicijo pospeška $a = \frac{dv}{dt}$. Ko vstavimo podano odvisnost pospeška od hitrosti, moramo najprej ločiti spremenljivke - na eno stran denemo v, na drugo pa t. Dobljeno enačbo intergriramo: $\int_{v_0}^{v(t)} v^{-2}\mathrm{d}v = -k\int_0^t dt$. Rezultat integracije je enačba $1/v(t) - 1/v_0 = kt$, kar preoblikujemo v končni izraz za hitrost $v(t) = v_0/(v_0kt + 1)$. Pot izračunamo z integracijo hitrosti po času: $s = \int_0^t v(t)\mathrm{d}t = \int_0^t v_0/(v_0kt+1)\mathrm{d}t = 1/k\log(v_0kt+1)$, kjer zadnji izraz najlažje dobimo s pomočjo uvedbe nove spremenljivke. Za odgovor na zadnje vprašanje postavimo $v(t) = 0$ in premislimo kdaj(če) bo enačba izpolnjena.*

3. V zabaviščnem parku streljamo prosto padajočo tarčo. Kam moramo ciljati, če sprožimo v trenutku, ko tarča začne padati? Po kolikšnem času in na katerem mestu zadene izstrelek tarčo? V trenutku strela je tarča na isti višini kot izstrelek, v vodoravni smeri je od njega oddaljena 10 m, začetna hitrost izstrelka pa je 20 m/s. Kaj se zgodi, če sprožimo šele $0,1$ s po začetku padanja tarče?

   Rešitev: *Zopet obravnavajmo gibanje v navpični in v vodoravni smeri ločeno. Na izstrelek in na tarčo deluje enak gravitacijski pospešek, zato padata enako hitro. Če sta na začetku oba pri miru na isti višini, bosta cel čas na isti višini. Ciljati moramo torej naravnost v tarčo. Čas dobimo iz gibanja v vodoravni smeri - razdaljo 10 m izstrelek s hitrostjo 20 m/s premaga v času... Iz dobljenega časa določimo še razdaljo, ki jo je opravila tarča. Če sprožimo šele*

$\delta t = 0,1$ s po začetku padanja tarče, moramo poskrbeti, da z nagibom korigiramo razliko v hitrostih - zopet postavimo pogoj, da sta po času t tarča in izstrelek na isti višini, pri čemer je tarča padala $t + \delta t$ časa, izstrelek pa t. Enačba za gibanje v vodoravni smeri ostane enaka, z eno izjemo - upoštevati moramo projekcijo hitrosti ($v \cos(\phi)$, če je ϕ kot med vodoravnico in smerjo streljanja). Z reševanjem enačb in eliminacijo časa t se dokopljemo do kvadratne enačbe za $\cos(\phi)$: $\cos^2(\phi)[\delta t^4 + \frac{4s^2}{g^2}] + \cos(\phi) 2\frac{s\delta t^3}{v} - (\frac{4s^2}{g^2} - \frac{s^2 \delta t^2}{v^2}) = 0$.

4. Izračunaj maso in polmer Lune, če poznaš gravitacijski pospešek na Luni $g_L = 1,63$ m/s^2. Predpostavi, da sta gostoti Zemlje in Lune enaki. Za gravitacijski pospešek na Zemljinem površju vzemi $g_Z = 9,81$ m/s^2 in radij Zemlje naj bo $r_Z = 6400$ km. Primerjaj svoje izračune z dejanskimi vrednostmi: $m_Z \approx 81 m_L$, $r_Z \approx 4 r_L$ - je predpostavka od enakosti gostot pravilna? Gravitacijska konstanta je $G = 6,674$ 10^{-11} $\frac{Nm^2}{kg^2}$.

   Rešitev: *Povežemo silo gravitacije $F_{gr} = G\frac{m_{planeta} m}{r^2}$ s silo teže $F_g = mg$ in iz njiju izluščimo $g = G\frac{m_{planeta}}{r^2}$. Nato izračunamo gostoto Zemlje, $\rho_Z = \frac{m_Z}{V_Z} = \frac{3m_Z}{4\pi 4^3}$, pri čemer si za izračun mase pomagamo z gravitacijskim pospeškom. Gostoti Zemlje je po predpostavki enaka gostota Lune, iz česar nato z uporabo omenjenih enačb izračunamo maso in polmer Lune.*

5. Dekle nosi sveže mleko v posodi, od kmetije do doma. Na cesti je led, zaradi česar dekletu zdrsne. Dekle zakrili z rokami in se s tem spretnim manevrom obdrži na nogah, še več, posoda je še vedno polna mleka. Najmanj s kolikšno hitrostjo je dekle zavrtelo posodo v navpični smeri, da ni izteklo nič mleka? V kolikšnem času je napravila en obrat? Radij kroženja predstavlja dolžina dekletove roke - $0,7$ m.

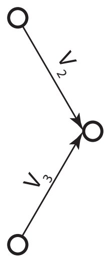
   Rešitev: *Mleko iz posode najlažje steče, ko je slednja v najvišji legi, obrnjena na glavo. Sila teže tedaj deluje naravnost navzdol. Da mleko ne izteče, mora biti sila teže $F_g = mg$ enaka centripetalni sili $F_{cp} = m\frac{v^2}{2}$. Iz zadnje enačbe izračunamo hitrost. Obhodni čas t_0 lahko dobimo s pomočjo kotne hitrosti $\omega = \frac{2\pi}{t_0} = \frac{v}{r}$.*

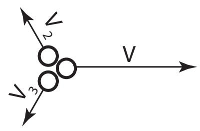
6. Kapljica vode, nabita z osnovnim nabojem $e_0 = 1,6$ 10^{-19} As, lebdi v električnem polju z jakostjo $E = 1000$ V/mm. Kolikšna je masa kapljice in kolikšen je njen polmer? Gostota vode znaša 1 kg/m^3

   Rešitev: *Kapljica miruje, torej je vsota vseh sil enaka nič - do rešitve naloge pridemo tako, da izenačimo silo teže z električno silo $F_{el} = eE$. Iz enakosti $F_g = F_{el}$ izluščimo maso kaplje in preko gostote vode dobimo volumen krogle. Ker za volumen krogle velja $V = 4\pi r^3/3$, iz zadnjega rezultata nato enostavno izračunamo še polmer kapljice.*

25. 4. 2014

7. Trije prijatelji se zaletavajo z vadbenimi žogami v rokah. Prvi miruje, medtem ko preostala dva pritečeta z enako hitrostjo 5 m/s tako, da je med njima kot 120°. Po trku se poprej gibajoča mladeniča opotečeta v smeri, iz katere sta prišla (torej zopet pod kotom 120°), prej mirujoči fant pa odleti s hitrostjo v_1' in oklepa kot 120° s hitrostjo preostalih dveh (glej skico). Kolikšna je hitrost v_1', če je masa vseh treh enaka in je bil trk prožen?





Rešitev: *Pri prožnem trku se poleg gibalne količine ohranja tudi kinetična energija. Najprej zapišemo enačbo za ohranitev gibalne količine (mase so enake, označimo jih z m). Osi si izberemo tako, da se v eni smeri prispevek gibalnih količin izniči. Če se opremo na sliko, bo to smer, pravokotna na smer gibanja fanta, ki je na začetku miroval. Zanimivo smer, smer gibanja na začetku mirujočega fanta, označimo z x. Hitrosti po trku označimo z* v' *in dobimo:* $mv_2^x + mv_3^x = mv_1'^x - mv_2'^x - v_3'^x$. *Projekcije* v^x *izračunamo s kotnimi funkcijami - ugotovimo* $v_2^x = v_3^x = 0.5v$, $v_2'^x = v_3'^x = 0.5v'$ *in* $v'^x = v'$. *Zapišemo še ohranitev kinetične energije:* $\frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}mv_3^2 = \frac{1}{2}m(v_1')^2 + \frac{1}{2}m(v_2')^2 + \frac{1}{2}m(v_3')^2$. *Na koncu upoštevamo še, da sta velikosti hitrosti drugega in tretjega vseskozi enaki, različna je le smer, in dobimo dve enačni z dvema neznankama, kar nato rešimo in dobimo zahtevani rezultat.*

8. Tovorni vlak z maso 2000 t se vozi po avstralski pustinji s hitrostjo 72 km/h in je zaradi pogostih trkov s kenguruji je zaščiten z odbijačem. Tokrat zadene 400 kg težko kravo, ki je pobegnila iz črede, in slednjo odnese s sebojna odbijaču. V času trka s kravo je vlak prepotoval 0.5 m. Za koliko je krava upočasnila vlak? Kolikšen je bil sunek sile krave na vlak? S kolikšno povprečno silo je krava delovala na vlak med trkom? S kolikšnim povprečnim pospeškom se je krava med trkom pospeševala?

Rešitev: *Tokrat gre za neprožni trk, zato obvelja le ohranitev gibalne količine:* $m_{vl}v_0^{vl} = m_{vl}v^{vl} + m_{kr}v^{kr}$. *Ker se krava giblje skupaj z vlakom, je njena hitrost enaka hitrosti vlaka. Iz enačbe izrazimo končno hitrost vlaka* v^{vl}. *Sunek sile je enak spremembi gibalne količine krave oziroma vlaka, kar je enostavno izračunati sedaj, ko poznamo vse hitrosti in mase. Povprečno silo izračunamo tako, da sunek sile delimo s časovnim intervalom, povprečni pospešek pa s pomočjo drugega Newtonovega zakona z nadalnjim deljenjem z maso. Za račun časovnega intervala uporabimo podatek, da je v času trka vlak prepotoval pol metra.*

9. Iz prhe pri tuširanju vsako sekundo iztečeta 2 L vode s hitrostjo 2 m/s. S kolikšno silo voda deluje na prho? Gostota vode je 1 kg/L.

Rešitev: *Računamo, kot da nam prha vodo iz mirovanja pospeši do končne hitrosti. Da* *to doseže, mora prha na vodo delovati z neko silo - po tretjem Newtonovem zakonu je sila vode na prho nasprotno enaka. Začnimo z računanjem sunka sile: $F\Delta t = \Delta G = mv_k$. Enačbo delimo s časom in dobimo $F = \frac{m}{t}v_k$. Sedaj še izrazimo maso s pomočjo gostote in volumskega toka kot $m = \Phi_V \rho$. V prejšnji enačbi nadomestimo maso s pravkar dobljenim izrazom in izračunamo silo. KOMENTAR: Do iste rešitve se dokopljemo z ugotovitvijo, da lahko uporabimo izraz za silo curka.*

10. Avtomobil z močjo 100 kW in maso $1,5$ t čaka pri rdeči luči. Ko se prižge zelena, voznik pohodi plin in avtomobil z vso močjo pospešuje do 100 km/h. Koliko časa potrebuje da doseže omenjeno hitrost? Kolikšno hitrost doseže po 4 s od začetka pospeševanja? Kolikšno pot opravi v teh 4 sekundah?

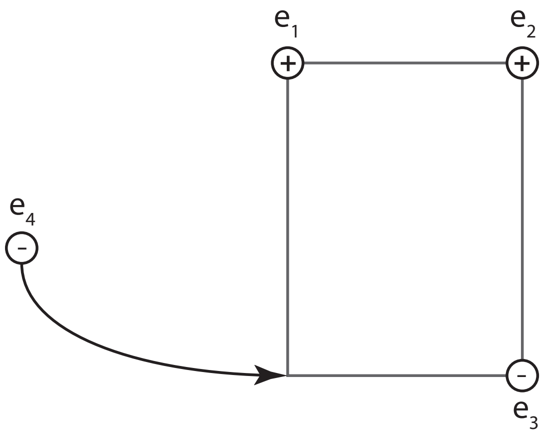
    Rešitev: *Moč pove, koliko dela telo opravi v časovni enoti - motor avtomobilu v tem primeru v eni sekundi dovede 100kJ dela, ki se izrazi kot kinetična energija. Za odgovor na prvo vprašanje moramo le izračunati, v kolikšnem času bo avto prejel toliko dela, da bo njegova kinetična energija ustrezala gibanju s hitrostjo 100 km/h. Podobno velja za drugo vprašanje, le da je tokrat smer reševanja obrnjena - iz spremembe kinetične energije izračunamo hitrost. Za zadnji del naloge se ne moremo poslužiti standarnih enačb gibanja, saj v našem primeru gibanje ni enakomerno pospešeno (za enakomerno pospešeno gibanje sta tako rezultanta sil kot pospešek konstantna - ker velja $P = Fv$ oziroma $F = \frac{P}{v}$ vidimo, da v našem primeru, ko je moč P konstantna, se sila spreminja s hitrostjo). Pot je zato potrebno izračunati po definiciji - $s = \int_0^t v(t)\mathrm{d}t$. Hitrost izrazimo iz kinetične energije in moči - $Pt = \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow v = (\frac{2Pt}{m})^{1/2}$, vstavimo v integral in dobimo $s = \frac{2}{3}(\frac{2Pt^3}{m})^{1/2}$.*

11. Burna reakcija med bonboni Mentos in Coca-colo je precej poznana - po določenih podatkih pridobljenih na internetu, naj bi 5 bonbonov Mentos v enem litru te gazirane pijače povzročili, da le-ta brizgne približno 1 m visoko. Kolikšno hitrost mora imeti tekočina, da doseže omenjeno višino? Namesto navpično bi lahko z nekoliko predelano (tako, da nam ne izteče vsa pijača še preden vanjo denemo bonbone) plastenko s prostornino 5 L, položeno na vozičku, dobili nekakšno raketo. Kolikšno končno hitrost bi dosegla taka raketa, če privzamemo, da ima prazna plastenka maso 250 g, da izteče vsa tekočina, da tekočina ves čas izteka z enako hitrostjo in je hitrost enaka kot če denemo 5 bonbonov v en liter Coca-cole? Coca-cola naj ima gostoto enako gostoti vode.

    Rešitev: *Prvi del naloge predstavlja enostavno ohranitev energije - kinetična energije se pretvarja v potencialno. Postavimo $\Delta E_{kin} = \Delta E_{pot} \rightarrow mv_0^2 = 2mgh$, iz česar izračunamo hitrost v_0. Za drugi del naloge uporabimo enačbo za raketni pogon, $v(t) = v_0 \ln(\frac{m_r+m_g}{m_r+m_g-\Phi_m t})$. Končno hitrost raketa doseže, ko oddano vso gorivo, torej $v = v_0 \ln(1 + \frac{m_g}{m_r})$. Maso goriva m_g izračunamo iz gostote pijače in prostornine plastenke.*

9. 5. 2014

12. V treh kotih plastičnega pravokotnika s stranicama $a = 40$ cm in $b = 50$ cm so postavljene majhne nabite kroglice z naboji $e_1 = 1$ nAs, $e_2 = 2$ nAs in $e_3 = -3$ nAs (glej skico). Koliko dela opravimo, da v prazno ogljišče prinesemo četrto nabito kroglico z nabojem $e_4 = -4$ nAs? Dielektrična konstanta ϵ_0 je $epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ As/Vm.



Rešitev: *Delo je enako spremembi električne energije W_el. Spremembo opišemo s tremi prispevki W_el^{14}, W_el^{24} in W_el^{34}, kjer smo pazljivi pri vstavljanju podatkov (naboji in razdalje).*

13. Na kolikšni višini nad Zemljo kroži geostacionarni satelit? S kolikšno hitrostjo ga moramo izstreliti iz površja Zemlje? Kolikšna je ubežna hitrost Zemlje? Masa Zemlje znaša $6 \cdot 10^{14}$ kg, njen polmer 6400 km, gravitacijska konstanta pa $G = 6.674 \cdot 10^{-11}$ $\mathrm{m^3/kgs^2}$.

    Rešitev: *Geostacionarni satelit je satelit, ki je venomer nad istim delom Zemlje, torej se vrti tako hitro kot Zemlja - v enem dnevu pride zopet na isto mesto. Njegova kotna frekvenca $\omega = 2\pi/t_0$ je torej $\omega = 2\pi/1dan = 7,27 \cdot 10^{-5} 1/s$. Ves čas ostaja tudi na isti višini, torej mora biti gravitacijski pospešek ravno enak centripetalnemu: $F_g = F_{cp}$ iz česar izračunamo radij kroženja in višino satelita h - $Gm_z/(R+h)^2 = \omega^2(R+h)$. Ubežno hitrost na Zemlji določimo s pomočjo ohranitve energije - s pomočjo začetne kinetične energije moramo namreč zapustiti potencialni "jamo" Zemlje. V mejnem primeru, mora biti kinetična energija velika ravno toliko kot je gravitacijska energija telesa na Zemlji - izenačimo $1/2mv^2 = Gmm_z/R$ in izračunamo hitrost. Podobno pristopimo k preostalem vprašanju, kjer pa moramo upoštevati, da ima satelit v geostacinarni orbiti še vedno del gravitacijske in kinetične energije.*

14. V cevko v obliki črke U, ki je napolnjena z vodo, na eni strani dolijemo neznano tekočino. Izračunaj gostoto neznane tekočine, če veš, da sega gladina neznane tekočine 12,3 mm nad gladino vode v drugem kraku, meja med tekočinama v prvem kraku pa je 135 mm pod gladino vode v drugem kraku! Gostota vode je 1000 $\mathrm{kg/m^3}$.

Kako bi izgledale tekočine v cevki, če bi namesto neznane tekočine nalili 1 mm živega srebra z gostoto 13500 kg/m^3?

Rešitev: *Ker tekočina v cevi miruje, mora biti vsota vseh sil enaka nič. Izberimo si del tekočine, ki v prvem kraku sega do meje voda/neznana tekočina in do enake višine v drugem kraku. Da ta del miruje, morata biti sili(tlaka) iz obeh krakov enaki(a). Tlak na koncih izbranega dela tekočine je sestavljen iz zračnega tlaka in hidrostatskega tlaka, zato zapišemo,* $p_0 + \rho_{neznan} g h_{neznan} = p_0 + \rho_{vode} g h_{vode}$. *Iz tega sledi* $\rho_{neznan} = \rho_{vode} h_{vode}/h_{neznan}$.

15. Izračunaj kapilarni "dvig" vode in živega srebra! Površinski napetosti vode in živega srebra znašata $\gamma_{H_2O} = 0.073$ N/m in $\gamma_{Hg} = 0.47$ N/m. Polmer kapilare znaša 0.5 mm. Kot omočenja za mejo steklo-voda: $\Theta_{SV} = 0°$ in steklo-Hg: $\Theta_{SV} = 140°$. Gostota vode znaša $\rho_{H_2O} = 1000$ kg/m^3, živega srebra pa $\rho_{Hg} = 13500$ kg/m^3.

    Rešitev: *Kapilarni "dvig" je posledica površinske napetosti. Površinska napetost namreč za vodo nasprotuje sili teže, zato se v kapilari voda povzpne. V splošnem je sila na tekočino v kapilari odvisna od kota med tekočino in steno in lahko kaže tudi v smeri sile teže. Za površinsko napetost v cevki zapišemo* $F = 2\pi r \gamma \cos\Theta_{SV}$. *Za primer vode ta sile nasprotuje sili teže* $F_g = g\rho\pi r^2 h$, *iz česar izluščimo višino kapilarnega dviga* $h = 2\gamma\cos\Theta_{SV}/g\rho r$. *Za živo srebro površinska napetost kaže v smeri sile teže, uravnoteži jo pa hidrostatski tlak - enačba je enaka kot pri vodi, upoštevamo le drug kot omočenja.*

16. S kolikšno silo moramo vleči nož pri mazanju medu na kruh, če je med razmazan 1 mm na debelo, kruh je širok 5 cm, nož je širok 1 cm, nož pa premikamo z 10 cm/s? Med ima gostoto približno 1.36 kg/L; njegova viskoznost je približno 10 Ns/m^2. S kolikšno hitrostjo z navpično postavljenega noža polzi najhitrejši del medu, če je plast medu debela 3 mm?

    Rešitev: *Pri mazanju medu na kruh premagujemo strižne sile nastale zaradi viskoznosti tekočine. Ker nož premikamo s stalno hitrostjo, je vsota vseh sil enaka nič, torej je sila s katero vlečemo nož ene sili viskoznosti,* $F = S\eta\Delta v/\Delta z$, *kjer za površino S vzamemo površino stika, torej širina kruha krat širina noža. Drugo vprašanje je težje - vzamemo tanko rezino medu, debeline dz na razdalji z od noža. Nanjo na eni strani deluje teža preostalega medu* $F_g = \rho g(D - z)$, *(D - celotna debelina medu) ki povzroči, da se en konec izbrane rezine premika s hitrostjo, ki je dv večja kot hitrost drugega konca. Nato omenjeni premislek uporabimo v enačbi za silo viskoznosti -* $F = \rho g S z(D - z) = S\eta dv/dz$. *Po ločitvi spremenljivk in integraciji, dobimo izraz za hitrost* $v = z(2D - z)\rho g/2\eta$. *Največja hitrost bo ravno na debelini medu, torej ko je* $z = D$.

17. S kolikšno hitrostjo po daljšem času pada steklena kroglica v cevki, napolnjeni z vodo? Radij kroglice je 1 μm, viskoznost vode $\eta_{H_2O} = 0,798 \cdot 10^{-3}$ Ns/m^2, gostota stekla $\rho_{st} = 2500$ kg/m^3 in gostota vode $\rho_{vode} = 1000$ kg/m^3.

    Rešitev: *Po daljšem času se hitrost steklenih kroglic ustali. Tedaj je vsota sile teže, vzgona in upora enaka nič. Zaradi majhnih dimenzij kroglice (posledično majhno Reynoldsovo število) uporabimo linearni zakon upora. Rešujemo torej enačbo* $F_g = F_{up} + F_{vzg}$, *oziroma, če prenesemo silo vzgona na drugo stran enačbe,* $gV(\rho_{st} - \rho voda = 4\pi\eta r v$. *Ko nadomestimo V z volumnom krogle* $4/3\pi r^3$, *lahko izrazimo hitrost kot* $v = 2/9(\rho_{st} - \rho_{voda})gr^2/\eta$.

16. 5. 2014

18. Izračunaj gostoto suhega zraka pri 27 °C in 10^5 Pa! Sestava zraka je približno: 78% N_2, 21% O_2, 1% Ar. Molske mase so: N - 14 g/mol, O - 16 g/mol, Ar - 40 g/mol.

    Rešitev: *Najprej s podanimi podatki izračunamo molsko maso zraka - zaokrožimo na 29 g/mol. Nato zapišemo plinski zakon -* $pV = nRT$*, namesto množine* n *pišemo* m/M *in preoblikujemo v* $\rho = m/V = pM/RT$*.*

19. Kolikšna je končna hitrost padanja kroglice iz granita s premerom 1 cm v zraku in kolikšna v glicerinu? Utemelji izbiro vrste upora! Gostota granita je $\rho_{gr} = 2700$ kg/m^3, gostota glicerina $\rho_{gl} = 1260$ kg/m^3 in njegova viskoznost $\eta_{gl} = 1.4$ kg/ms, gostota zraka $\rho_{zr} = 1.16$ kg/m^3 in njegova viskoznost $\eta_{zr} = 2 \cdot 10^{-5}$. Koeficient upora za kroglo znaša $C_{up} = 0.47$.

    Rešitev: *Zaradi majhne viskoznosti zraka pričakujemo, da bo primerna uporaba kvadratnega zakona upora. Ko naše padajoče telo doseže končno hitrost, je sila teže enaka sili upora, torej* $\rho_{gr} V g = 1/2 \rho_{zr} C_{up} S v^2$*. Uporabimo izraza za volumen krogle* $V = 4/3 \pi r^3$ *in prečni presek krogle - površina kroga* $S = \pi r^2$*, premečemo dobljeni izraz in dobimo* $v = \sqrt{8 g r \rho_{gr} / 3 C_{up} \rho_{zr}}$*. Nato izračunamo Reynoldsovo število za kroglo* $Re = \rho v r / \mu$*. Ker je* $Re > 1000$*, je viskoznost zanemarljiva, kar pomeni, da smo uporabili pravilni zakon upora.*
    Zaradi majhne velikosti kroglice in velike viskoznosti glicerina pričakujemo, da bo pri padanju kroglice v glicerinu viskoznost pomembna, torej pričakujemo, da bo veljal linearni zakon upora. Rešujemo s povsem enakim pristopom kot pri nalogi 17. Tokrat je $Re < 1$*, kar pomeni, da res velja linearni zakon upora.*

20. Venturijevo cev (cev z zožitvijo) spojimo z U cevko tako, da en krak U cevke sega v območje Venturijeve cevi s polmerom 2 cm, drug krak pa v zožitev s polmerom 1 cm. V U cevki je natočeno živo srebro z gostoto 13600 kg/m^3. Z omenjeno pripravo lahko merimo hitrost zraka, ki piha skozi Venturijevo cev. S kolikšno hitrostjo vstopi zrak v cev, če je gladina živega srebra pod zoženim delom Venturijeve cevi $0,5$ cm nad gladino živega srebra pod širšim delom cevi? Zrak ima gostoto $1,16$ kg/^{3}. Predpostavimo, da je viskoznost zraka enaka nič.

    Rešitev: *Ker je viskoznost enaka nič, nimamo energijskih izgub - uporabimo torej varianto zakona o ohranitvi energije, Bernoullijevo enačbo* $p + 1/2 \rho v^2 + \rho g h = konst.$ *Gledali bomo energijo v dveh točkah: 1 - točka v centru široke cevi, tik na krakom U cevke, 2 - točka v sredini ozkega dela cevi, tik na drugim krakom U cevke. Ker sta njuni energiji enaki, lahko zapišemo* $p_1 + 1/2 \rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + 1/2 \rho v_2^2 + \rho g h_2$*. Točki 1 in 2 smo izbrali tako, da sta na isti višini, zato se prispevek potencialne energije odšteje. Nadalje lahko ugotovimo, da se volumski pretok zraka ohranja skozi vso cev, saj nima kam uhajati. Torej je volumski tok enak skozi točki 1 in 2 -* $\Phi_1^V = V_1/t = S_1 s_1/t = S_1 v_1 = S_2 v_2 = \Phi_2^V$*. Dobili smo povezavo med hitrostima plina v točkah 1 in 2 -* $v_2 = v_1 r_1^2 / r_2^2$*, kjer smo upoštevali, da je presek cevke enak* πr^2 *in sta se* π*-ja pokrajšala. Povezavo med tlakoma* p_1 *in* p_2 *pa dobimo iz višinske razlike gladin živega srebra. Ker živo srebro miruje, je hidrostatski tlak zaradi razlike višine gladin živega srebra v obeh krakih ravno enak razliki med tlakoma v točki 1 in 2 -* $p_1 - p_2 = \rho_{Hg} g h_{Hg}$*. Ko upoštevamo ti dve ugotovitvi, lahko Bernoullijevo enačbo* *predelamo v* $p_1 - p_2 = \rho_{Hg} g h_{Hg} = 1/2\rho_{zr}(v_2^2 - v_1^2) = 1/2\rho_{zr} v_1^2 (r_1^4/r_2^4 - 1)$. *Preostane le še, da izrazimo* v_1.

21. Za koliko se spremeni prostornina aluminijaste krogle polmera 10 cm, če jo segrejemo od 0 °C na 100 °C? Koeficient linearnega temperaturnega raztezka je $2,3 \cdot 10^{-5}$ K^{-1}.

    Rešitev: *Koeficient lineranega temperaturnega razteka* α *opisuje, koliko se telesu spremeni dolžina pri spreminjanju temperature -* $\Delta l = \alpha l \Delta T$. *V našem primeru bo raztezek v vse smeri enak, raztegnil pa se bo radij krogle. Spremembo volumna izračunamo kot razliko začetnega in končnega -* $\Delta V = V^k - V^z = 4/3\pi(r + \Delta r)^3 - 4/3\pi r^3$. *Komentar: ker je sprememba polmera zaradi spremembe temperature majhna (preveri!) v primerjavi s polmerom, ne naredimo velike napake, če zanemarimo višje potence* Δr *- če odpravimo oklepaj* $(r + \Delta r)^3$ *in zanemarimo višje potence* Δr*, ugotovimo, da je sprememba volumna enaka* $\Delta V = 4\pi r^2 \Delta r$*, kar je enako kot površina krogle krat raztezek.*

22. Koliko dela opravi plin, ki je pod 5 bari spravljen v jeklenki s prostornino 1 L, da napihne 19 L velik balon, če je ves čas napihovanja temperatura enaka? Kolikšna toplota se je izmenjala?

    Rešitev: *Delo plina lahko izračunamo s pomočjo enačbe* $dA = -pdV$. *Preden se lotimo tega računa pa preoblikujmo plinsko enačbo v* $pV/T = nR$. *Desna stran je neodvisna od zunanjih parametrov, odvisa je le od množine plina. Če se slednja ne spremeni, lahko zapišemo* $p_z V_z/T_z = pV/T$*, torej tlak, volumen in temperatura ob poljubnem času, so povezani z začetnimi pogoji. Ker je temperatura konstanta, velja* $p = p_z V_z 1/V$. *Sedaj v enačbi za delo plina tlak nadomestimo v skladu z omenjeno zvezo -* $dA = -p_z V_z dV/V$ *in integriramo od volumna* V_z *do volumna* V_k. *Dobimo* $A = -p_z V_z \ln(V_k/V_z)$. *Začetni volumen in tlak sta podana v besedilu naloge, končni volumen pa je enak vsoti prostornine balona in jeklenke, saj se na koncu plin nahaja v obeh. Ker je temperatura konstantna, se notranja energija ne spremeni, kar pomeni, da je izmenjana toplota enaka opravljenemu delu.*

23. Zrak, ki na začetku zavzema volumen 16 L pri tlaku 2 bar in 27 °C najprej izobarno stisnemo na polovično prostornino, čemur sledi vnovično stiskanje na polovično prostornino, tokrat izotermno. Koliko dela opravimo? Koliko toplote je oddal plin? Koliko se je spremenila notranja energija? Specifična toplota zraka pri stalnem tlaku je enaka 720 J/kgK, molska masa pa 29 kg/kmol.

    Rešitev: *Nalogo razdelimo na dva dela, vsak ustrezajoč svoji spremembi. Pri izobarni spremembi je tlak konstanten, torej je delo enako* $A = -p(V_k - V_z)$. *Iz plinske enačbe vidimo, da pri stalnem tlaku velja* $V_z/T_z = V/T$*, oziroma* $T = T_z V/V_z$. *Sprememba notranje energije zraka je enaka* $\Delta W_n = 5/2 nR\Delta T = mc_V \Delta T$*, s pomočjo česar nato izračunamo še oddano toploto v prvi fazi. Drugi del je izotermno stiskanje - glej prejšnjo nalogo 22. Za odgovor na vprašanje naloge prispevke enostavno seštejemo.*

23. 5. 2014

24. S 5 litri zraka pri 10^5 Pa in 300 K opravimo naslednjo krožno spremembo. Najprej pri stalnem volumnu povečamo tlak na $5 \cdot 10^5$ Pa, nato zrak izotermno razpnemo do prvotnega tlaka in na koncu še izobarno stisnemo na začetni volumen. Kolikšen je izkoristek toplotnega stroja? Primerjaj z idealnim toplotnim strojem! Toplotna kapaciteta zraka je $c_V = 720$ J/kgK, molska masa zraka pa $M = 29$ g/mol.

    Rešitev: *Sprememba je krožna, zato se notranja energija po enem celem krogu ne spremeni. Izkoristek toplotnega stroja definiramo kot razmerje pridobljenega dela z vloženo toploto, $\eta = A/Q_{vl}$. Enačbe, ki jih uporabljamo za izračun dela in toplote, so zapisane iz stališča plina - če je predznak negativen, plin odda delo/toploto, torej ju mi prejmemo. Izkoristek bomo torej izračunali tako, da za vsak korak krožne spremembe izračunamo delo ter izmenjano toploto, seštejemo delo vseh prispevkov in toploto v korakih, kjer jo plin prejme (v našem primeru prvi in drugi korak). V prvem koraku je volumen konstanten, torej ni bilo opravljenega dela, vložena toplota pa je enaka $Q_{vl}^1 = mc_V\Delta T$. Za drugi in tretji korak glej 23. Manjkajoče količine lahko dobimo z uporabo plinske enačbe. Izkoristek idealnega toplotnega stroja je $\eta_{id} = 1 - T_{visoka}/T_{nizka}$.*

25. Koliko časa čakamo, da v idealno izoliranemu hladilniku iz vode nastane deset ledenih kock, vsaka po 20 g, ki jih bomo uporabili za osvežitev pijače? Motor z močjo 200 W deluje trikrat slabše kot Carnotov (idealni) hladilnik. Zunanja temperatura je 35 °C, notranja 0 °C. Specifična talilna toplota vode $q_{tal} = 336$ kJ/kg.

    Rešitev: *Izkoristek hladilnika je definiran kot $\eta = Q_{pr}/A$ oziroma $\eta_{id} = T_{nizka}/(T_{visoka} - T_{nizka})$ za idealni hladilnik. Delo izrazimo s pomočjo moči in časa, $A = Pt$, toploto pa s pomočjo specifične talilne toplote vode $Q_{pr} = mq_{tal}$. Upoštevamo le še, da je naš izkoristek triktrat slabši kot idealni, torej $3Q_{pr}/A = T_{nizka}/(T_{visoka} - T_{nizka})$.*

26. Kolikšna je končna temperatura 2 dL soka, če ima na začetku $T_s = 35$ °C in ga ohladimo z dvema ledenima kockama (pri $T_l = 0$ °C) iz prejšnje naloge? Sok naj ima vse lastnosti (razen videza in okusa) enake kot voda.

    Rešitev: *Sistem bo celokupno ohranil toploto - na račun ohlajanja soka se bo led najprej stalil, nato pa staljen led (sedaj voda pri 0 °C) še segrel do končne temperature. Zapišemo ugotovitev še kot enačbo $m_s c_V(T_s - T_k) = m_l q_{tal} + m_l c_V(T_k - T_l)$. Iz enačbe nato izluščimo končno temperaturo, T_k.*

27. Brunarico s površino sten 35 m^2 ogrevamo s pečjo, ki oddaja toplotni tok 4 kW. Kolikšna je temperatura v brunarici, če je zunanja -20 °C? Za koliko se zniža temperatura, če vgradimo okna površine 10 m^2, skozi katera uhaja toplotni tok 1000 W? Toplotna prevodnost lesa je $\lambda_{les} = 0.4$ W/mK in debelina sten $d = 15$ cm.

    Rešitev: *V ravnovesju skozi stene brunarice uhaja ravno tak toplotni tok, kot ga proizvaja peč. Toplotni tok skozi stene izračunamo s pomočjo enačbe $P = \lambda S\Delta T/d$. Za drugi del naloge pristopimo malenkost drugače - toplotni tok peči je sedaj enak seštevku toplotnega toka skozi stene in skozi okna. Toplotni tok skozi stene je torej za 1 kW manjši kot prej,* *prav tako pa se zmanjša površina sten in sicer za* $10\ m^2$*. Uporabimo isto enačbo kot v prvem delu naloge, le z drugačnima* P *in* S*.*

28. Pri kateri temperaturi vre voda na Kredarici (2500 m nad morjem - zračni tlak približno $p = 10^5$ Pa $e^{-h/h_{tip}}$, kjer je $h_{tip} = 7890$ m)? Pri kateri temperaturi pa vre voda v "ekonom loncu"(tlak v loncu približno 2 bara)? Specifična izparilna toplota vode je $q_i = 2.26$ MJ/kg, njena molska masa pa $M = 18$ kg/kmol. Splošna plinska konstanta je $R = 8314$ J/kmolK.

    Rešitev: *Spreminjanje temperature faznega prehoda s tlakom nam podaja Clausius-Clapeyronova enačba* $dP/dT = q/T\delta(1/\rho)$*, ki jo lahko v primeru faznega prehoda tekočina-plin predelamo v* $dp/p = qM/RdT/T^2$*, saj ima tekočina ponavadi precej večjo gostoto kot plin. Po integraciji dobimo* $\ln p/p_0 = q_iM/R(1/T_0 - 1/T)$*, od koder izrazimo* T*, za* T_0 *vstavimo temperaturo vrelišča pri tlaku* $p_0 = 1bar$*, torej* $T_0 = 373\ K$*, in dobimo novo temperaturo vrelišča.*

30. 5. 2014

29. Enaki kroglici z maso 8 g in polmerom 10 mm visita na vrvicah z dolžino 20 cm. Vrvici sta na prostem koncu pritrjeni v skupni točki. Kroglici naelektrimo in staknemo, da se naboja izenačita, nato ju spustimo, da se razmakneta. Kolikšen je naboj na kroglicah, če sta v ravnovesju razmaknjeni za 10 cm? Dielektrična konstanta je $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ As/Vm.

    Kroglici potopimo v alkohol z gostoto 800 kg/m^3. Razdalja med kroglicama se zmanjša na 4 cm. Kolikšna je dielektričnost alkohola?

    Rešitev: *Najprej komentar - pazljivo ravnaj z dolžinami! Središče kroglice je od fiksne točne, kjer je pritrjena vrvica oddaljeno za dolžino vrvice plus polmer (podobno tudi ostale dolžine). Pogoj za ravnovesje je ničelna vsota sil. Komponenta sile teže v smeri pravkotno na vrvice mora biti nasprotno enaka komponenti električne sile v isti smeri, zaradi česar zapišemo* $\sin\alpha mg = \cos\alpha e^2/(4\pi\epsilon\epsilon_0 d^2)$*, kjer je* α *polovica kota, ki ga oklepata vrvici med sabo. Ker smo v zraku, vstavimo epsilon* $= 1$*. Premečemo enačbo in izračunamo naboj* e*. V drugem delu enačbe moramo upoštevati še vzgon, spremenjeno razdaljo/kot med kroglicama in spremembo dielektričnosti -* $\sin\alpha'(m - 4/3\pi r^3\rho)g = \cos\alpha' e^2/(4\pi\epsilon'\epsilon_0(d')^2)$.

30. V nekem trenutku se na razdalji 100 nm od v membrani zagozdenega iona kalcija, Ca^{2+}, nahaja mirujoči ion natrija Na^+. S kolikšno silo in v katero smer deluje takrat ion kalcija na ion natrija? Kolikšna je razdalja med njima, ko ima Na^+ hitrost 100 m/s? Kolikšna je napetostna razlika med obema točkama interesa? Osnovni naboj je $e_0 = 1.6 \cdot 10^-19$ As, masa natrija pa $m_{Na} = 3.8 \cdot 10^{-26}$ kg.

    Rešitev: *Upoštevamo, da je na ionih označen večkratnik osnovnega naboja, torej je naboj natrija enak osnovnemu, kalcij pa ima dvakrat tolikšnega. Račun sile med njima je sila preprost* $F = e_{Ca}e_{Na}/4\pi\epsilon_0 r^2$*. Drugi del naloge je najenostavneje rešiti z ohranitvijo energije - na račun zmanjšanja elektrostatske energije* $\Delta W_{el} = e_{Ca}e_{Na}/(4\pi\epsilon_0)(1/r - 1/r_0)$ *se poveča kinetična energija - za odgovor na vprašanje iz enačbe izrazimo kočno razdaljo* r*. Spremembo elektrostatske energije lahko zapišemo tudi kot* $\Delta W_{el} = eU$*, iz česar dobimo odgovor še na zadnje vprašanje.*

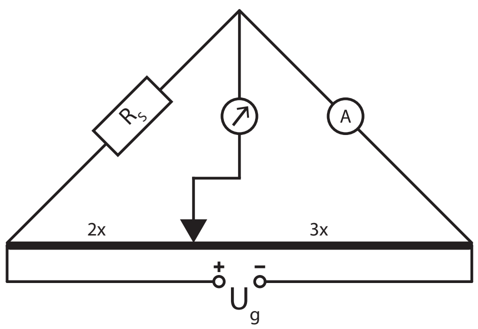
31. Med zunanjostjo in notranjostjo neke celice, ki jo omejuje 7,6 mm debela membrana, znaša razlika v električnem potencialu 73 mV. Kolikšna je gostota naboja na površini membrane? Kolikšno delo opravi Na/K črpalka v enem ciklu, ko iz notranjosti celice v zunanjost prečrpa 3 ione Na^+ in iz zunanjosti v notranjost prečrpa 2 iona K^+? Kolikšna sila deluje na kalij med prenosom preko membrane?

    Rešitev: *Predpostavimo, da membrana ločuje dve vzporedni ravni ploskvi z gostoto naboja* $\sigma = e/S$*. Električno polje med dvema vzporednima ravnima ploskvama je enako* $E = e/(\epsilon_0 S)$*, napetost pa je enaka* $U = Ed$*, kjer je* d *razdalja med ploščama. Ko izračunamo napetost* U*, lahko določimo tudi delo, ki se opravi pri prenosu enega iona preko membrane,* $A = \pm eU$*. Predznak je odvisen od smeri prenosa - v smeri električnega polja je* $+$*, v obratni minus. Celotno delo v ciklu dobimo tako, da seštejemo prispevke vseh prenešenih ionov. Silo lahko določimo na dva načina - s pomočjo električne poljske jakosti* $F = eE$ *ali pa s pomočjo dela* $A = fd$.

32. Ko strela udari v hrast, steče po njem tok 10000 A. Koliko toplote se sprosti v hrastu pri takem udaru strele, če traja desettisočinko sekunde? Hrast je visok 7 m in ima premer 1 m. Specifična upornost lesa je $\xi = 2\ \Omega$m.

Rešitev: *Joulov toplotni tok, ki se sprošča pri toku elektrike se lahko izračuna kot* $P = RI^2$. *Upor izračunamo s pomočjo enačbe* $R = \xi l/S$. *Ko vse sestavimo skupaj in pomnožimo s časom, dobimo izraz za toploto* $Q = \xi l I^2 t/\pi(R/2)^2$.

33. Z Wheatstoneovim mostičkom, ki je priključen na baterijo z gonilno napetostjo 9 V, merimo notranji upor nekega ampermetra. Skozi galvanometer ne teče noben tok, če merilni drsnik deli žico mostička v razmerju 2:3. Upor standardnega upornika je 10 Ω. Kolikšen je upor ampermetra? Kolikšen tok kaže ampermeter? Za boljšo predstavo glej sliko.



Rešitev: *S pogledom na skico lahko ugotovimo, da v primeru, ko skozi centralni galvanometer ne teče noben tok, celotno dogajanje razpade na dve veji. Zgornja (označimo z 1 vsebuje standardni upor in merjeni upor, spodnja (označimo z 2) pa je upor s spremenljivim razmerjem. Napetost med sredino zgornje in sredino spodnje veje (točki, ki ju povezuje žica skozi galvanometer) mora biti enaka nič, saj bi drugače tekel tok. Točneje, padec napetosti na standardnem uporu mora biti enak padcu napetosti na prvem delu deljivega upora,* $R_S I_1 = \alpha R_D I_2$. *Z* α *smo označili razmerje dolžin krakov deljivega upora in z* R_D *upor celotnega deljivega upora. Podobno velja za drugi krak* $R_A I_1 = (1-\alpha) R_D I_2$. *Enačbi delimo med sabo in dobimo* $R_A/R_S = (1-\alpha)/\alpha$, *iz česar izračunamo upor ampermetra. Na zgornji veji je padec napetosti enak gonilni napetosti* U_g. *Tok skozi ampermeter nato lahko izračunamo s pomočjo nadomestnega upora vezja in dobimo* $I_A = U_g/(R_S + R_A)$.

34. Elektrarna ustvarja 300 MW električne moči in jo odvaja potrošnikom po 200 km dolgem daljnovodu, katerega bakrene žice (specifična upornost bakra $\xi = 1,67 \cdot 10^{-8}$ Ωm) imajo skupni presek 30 cm^2. Koliko moči se izgubi pri prenosu, če je efektivna napetost v žicah 400 kV?

Rešitev: *Najprej iz podatkov za moč elektrarne in napetosti na daljnovodu izračunamo tok, ki teče po žicah daljnovoda,* $I = P/U$. *Nato izračunamo upor žic daljnovoda, po enačbi* $R = \xi l/S$. *Rezultat dobimo z računom Joulovih toplotnih izgub* $P = IR^2$.

Številske rešitve

V rešitvah je za težni pospešek uporabljen približek $g = 10$ m/s. Majhna(!) odstopanja od rezultatov so zato pričakovana, če uporabljamo drugačne približke za g.

1) $\phi = 90°$; 10 m; $\phi = 120°$
2) $s = 5,1$ m; $v = 0.15$ m/s; nikoli
3) direktno; 0.5 s; 1, 2 m; $\phi = 0,034 \approx 2°$
4) $m_L = 2,76 \cdot 10^{22}$kg $\approx \frac{1}{216} m_Z$; $r_L = 1063$km $\approx \frac{1}{6} r_Z$; predpostavka je napačna
5) $v = 2,6$ m/s; $t_0 = 1,7$ s
6) $m = 1.6 \cdot 10^{-14}$ kg; $r = 1.56$ m
7) $v_1' = \frac{4}{3} v_0 = 6,67$ m/s
8) $\Delta v^{vl} = 0,014$ km/h (z vlaki ne gre zobati češenj); $F\Delta t = 8000$ kgm/s; $\bar{F} = 320$ kN; $\bar{a} = 80g = 800$ m/s^2
9) $F = 2$ N
10) $t = 5.8$ s; $v = 23,1 m/$s= 83, 1 km/h; $s = 61,6$ m
11) $v_0 = 4,447$ m/s; $v = 13,6$ m/s
12) $A = 3,14 \cdot 10^{-8}$ J
13) $h = 35900$ km; $v_{izs} = 10.8$ km/s ;$v_{ub} = 11,2$ km/s
14) $\rho_{neznan} = 916$ kg/m^3; Voda sega 12, 5 mm nad gladino živega srebra
15) $h_{H_2O} = 29mm$; $h_{Hg} = -11$ mm
16) $F = 0,5$ N; $v = 6$ mm/s
17) $v = 3,45$ μm/s
18) $\rho = 1,16$ kg/m^3
19) $v_{zr} = 25,7$ m/s; $Re_{zr} \approx 7450$; $v_{gl} = 5,71$ cm/s; $Re_{gl} = 0.26$
20) $v = 8.84$ m/s
21) $\Delta V = 29$ cm^3
22) $A = -1500$ J; $Q = -1500$ J
23) $A = 1,60$ kJ +1, 11 kJ = 2, 71 kJ; $\Delta W_n = -4.02$ kJ; $Q = 6,73$ kJ
24) $\eta = 0,224$; $\eta_{id} = 0.8$
25) $t = 130$ s
26) $T_k = 15,8$ °C
27) $T_b = 23$ °C ; $\Delta T = 10$ °C
28) $T_{Kredarica} = 91,2$ °C; $T_{ekonom} = 121$ °C
29) $e = 0,20$ μAs; $\epsilon = 14,2$
30) $F = 4,6 \cdot 10^{-14}$ N; $r = 104$ nm; $U = 1,2$ mV
31) $\sigma = e/S = 85$ μA/m^2; $J = 1,2 \cdot 10^{-20}$ J; $F = 1,5$ pN
32) $Q = 178$ kJ
33) $R = 15$ Ω; $I = 0,36$ A
34) $P_{izgub} = 0.626$ MW