FUNKCIJE ENE SPREMENLJIVKE

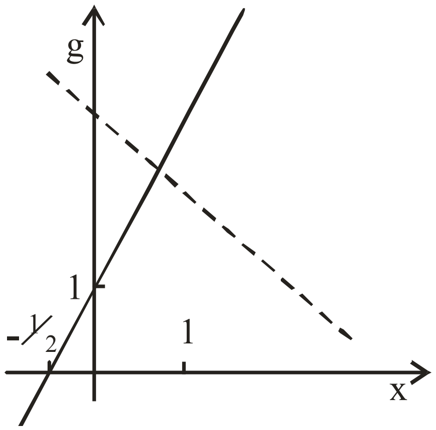
Spremenljivke označimo: x, y, z, t, …
Poznati moramo zalogo vrednosti spremenljivke.
$x \in [a,b]$; vrednosti spremenljivke x so iz zaprtega intervala [a,b].

Če x zavzame vse vrednosti nekega intervala je x zvezna spremenljivka.
Če x zavzame le točno določene vrednosti iz intervala je diskretna spremenljivka.

Če poznamo zalogo vrednosti neodvisne spremenljivke in predpis, ki vsakemu x iz zaloge vrednosti priredi vrednost y, pravimo, da je y funkcija x-a:
$y = y(x)$ ali $y = f(x)$ ali $y = g(x)$

Primer:
$x \in R$ zaloga vrednosti za x ali def. območje funkcije y; $y = x + 1$ (predpis).

Primer:

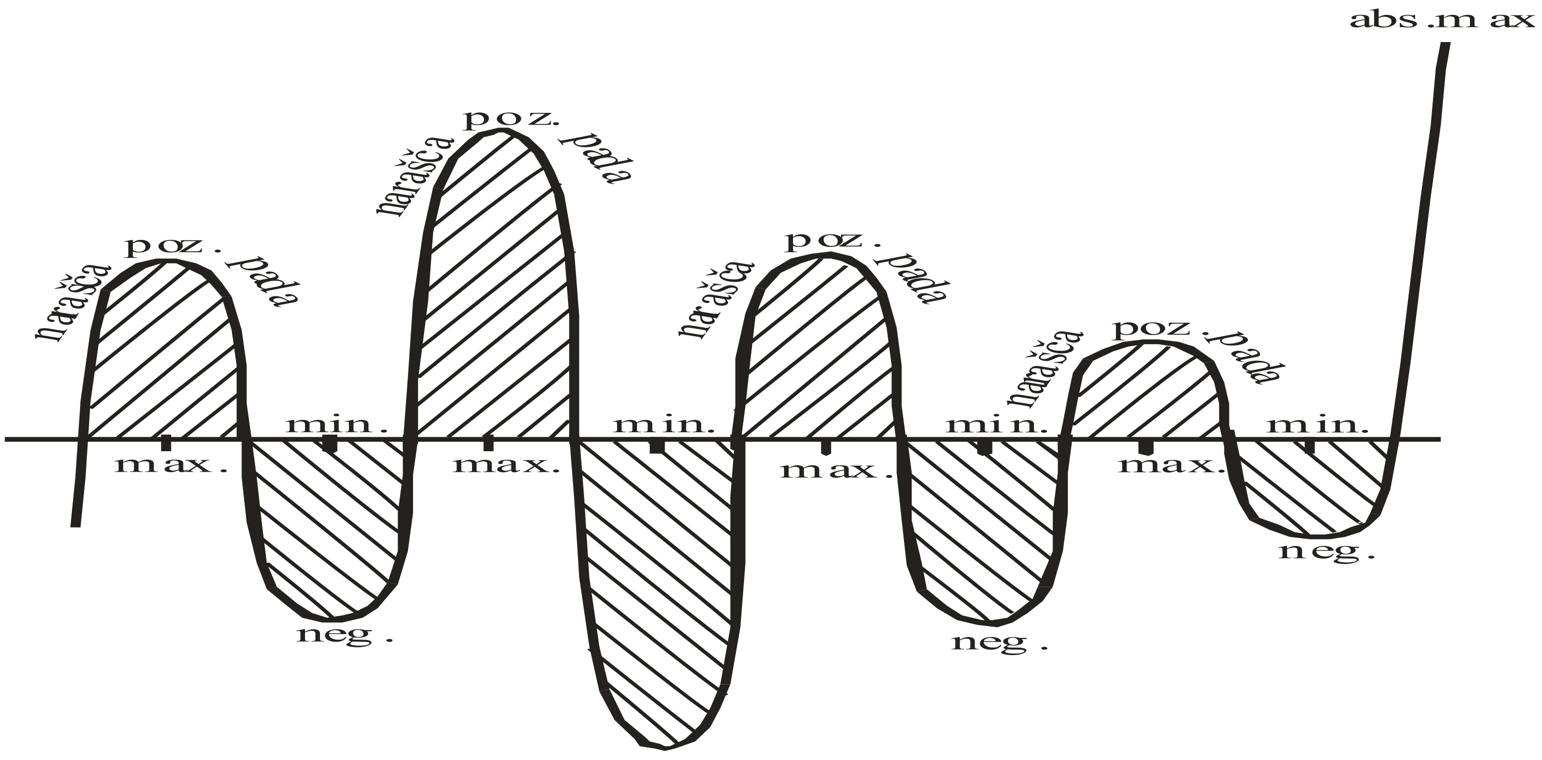


Zaloga vrednosti funkcije y so vrednosti, ki jih y zavzame. Na sliki $y \in (-\infty, +\infty)$, $y \in R$

Funkcija y(x) je pozitivna pri x, pri katerih leži nad osjo x (na sliki pri x > -1/2).

Funkcija y(x) je negativna pri x, kjer je pod osjo x (na sliki pri x < -1/2).

Funkcija y(x) ima vrednost 0, oziroma ima ničlo, tam,kjer seka os x (na sliki pri x=-1/2).



Na sliki določi območja za x, kjer:
je funkcija y definirana, pozitivna, negativna, ima ničle, narašča, pada, ima lokalni minimum, maksimum, absolutni minimum, maksimum.

PREGLED ELEMENTARNIH FUNKCIJ

1. LINEARNA FUNKCIJA

$y = k \cdot x + n$ EKSPLICITNA ENAČBA linearne funkcije, katere graf je PREMICA; $x \in R; y \in R$; k je smerni koeficient (tangens naklonskega kota $k = tg \cdot \varphi$) premice, n je odsek na ordinatni osi

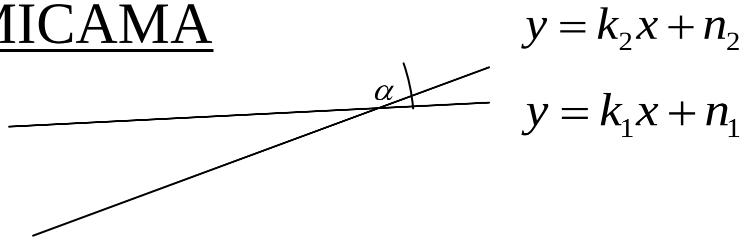
$a \cdot x + b \cdot y + c = 0$ IMPLICITNA ENAČBA

če je k>0 linearna funkcija narašča

če k<0 linearna funkcija pada

KOT MED PREMICAMA

$$\boxed{tg\ \alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}}$$



kjer je k_1 smerni koeficient prve premice, k_2 pa druge;

Če sta premici vzporedni, je kot med njima 0 in $\boxed{k_1 = k_2}$

Če sta premici pravokotni, je kot med njima 90° *in* $tg\, 90^\circ = \infty$ *in*

$$\boxed{\begin{array}{l} 1 + k_1 k_2 = 0 \\ k_1 = -\dfrac{1}{k_2}! \end{array}}$$

Dve točki določata natanko eno premico

$T_1(x_1, y_1)$

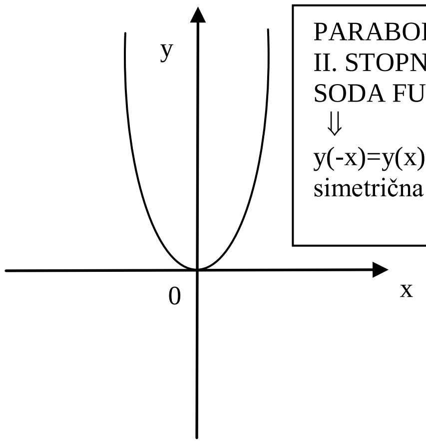
$T_2(x_2, y_2)$

$$\boxed{!\quad y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1);\ \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = k = tg\,\alpha_1 \quad !}$$

2. POTENCE

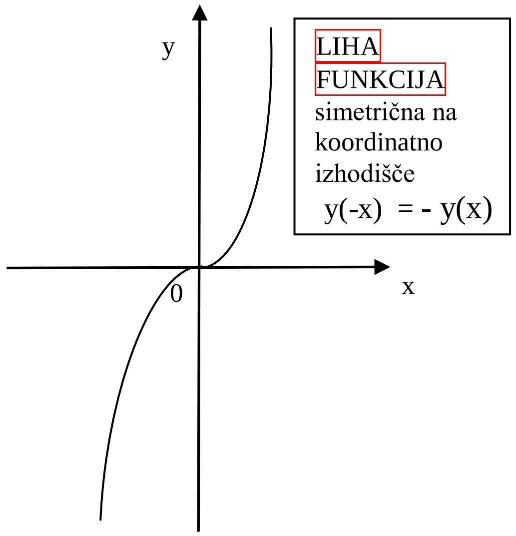
$y = x^n$

$y = x^2 (x^4, x^6, \ldots)$ SODE POTENCE



PARABOLA
II. STOPNJE
SODA FUNKCIJA
$\Downarrow$
y(-x)=y(x)
simetrična glede na y

ničle funkcije so točke, v katerih je y=0 $\Rightarrow$ $x^2=0$
x=0 (dvojna rešitev, dvojna, soda ničla))
v sodi ničli se funkcija y obrne
y je povsod pozitivna funkcija
y je povsod definirana funkcija, y$\in$R



$y = x^3 (x^5, x^7, ...)$ LIHE POTENCE

ničle funkcije: $x^3=0$

x=0 tri rešitve (polinom tretje stopnje)

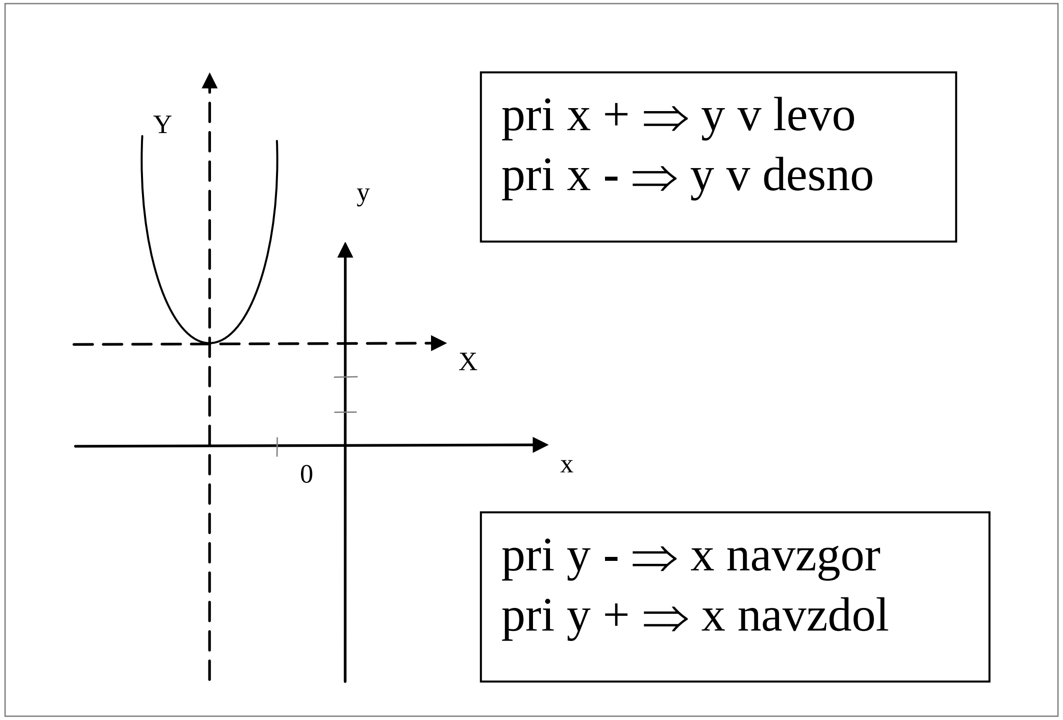
liha ničla; v lihi ničli funkcija seka os x

pri x>0 je y pozitivna, pri x<0 je y negativna

y je povsod definirana funkcija, $y \in R$

Premik koordinatnega sistema

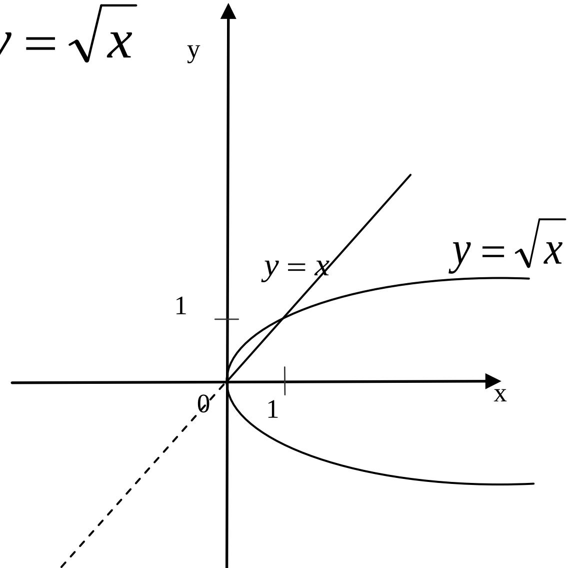
$$y-3=(x+2)^2$$
$$Y=X^2$$



3. KORENI

Sodi koren

$y = \sqrt{x}$



I. Najprej nariši funkcijo pod korenom!
Definirano za tiste x-e, kjer je izraz pod korenom ≥o
$\boxed{x \geq o}$ ⇒ DEF. OBM: {x≥0}

II. Vse kar je pod osjo x- črtaj!

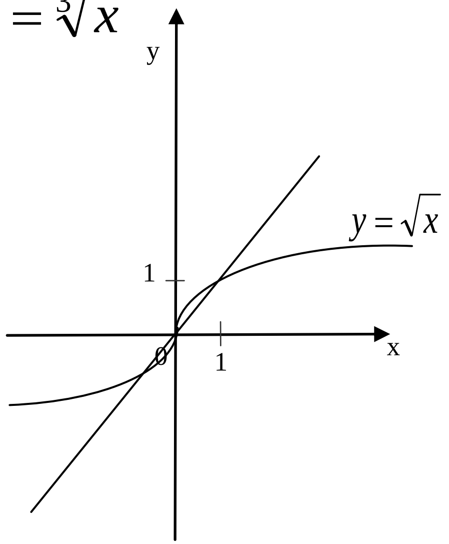
III. Koreni po točkah (3)!

! Ne pozabi na simetrijo

Dvolična funkcija

Lihi koren

$y = \sqrt[3]{x}$



I. ! Najprej nariši funkcijo pod korenom!

II !Koreniš vse!

4. POLINOMI

polinom n-te stopnje: $y=a_0+a_1x^1+a_2x^2+\ldots\ldots+a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$
a_nx^n je vodilni člen

Izrek: Vsak polinom n-te stopnje ima lahko največ n realnih ničel. Nekatere so lahko tudi večkratne. V sodih ničlah se funkcija obrne, v lihih seka os x.

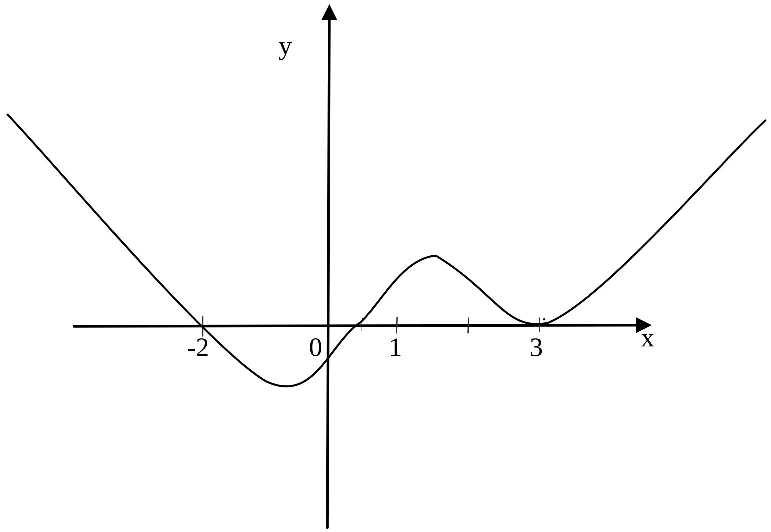
Če so ničle $x_1, x_2, \ldots, x_n$, potem polinom lahko zapišemo kot:

$$y = a^n (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$$

Polinom se pri velikih x obnaša tako, kot se pri velikih x-ih obnaša vodilni člen:

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n$$

Primer:



$$y=(x-3)^2(2x-1)^3(x+2)$$

$y=8x^6+\ldots$!Oceniš samo vodilni člen!

ničič : $x_1=3$ (*dvojna*) II. stopnje, soda

$$x_2=\frac{1}{2}(trojna, III.stopnje)$$

$$x_3=-2(enojna, I.stopnje)$$

$$\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty} 8x^6=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty} 8x^6=+\infty$$

5. RACIONALNE (LOMLJENE) FUNKCIJE

$$y = \frac{P(x)}{a(x)}$$

!V števcu ali (in) imenovalcu polinoma brez skupnih ničel!

$$y = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$$ skupne ničle pokrajšaj $$\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}$$

Ničle: y mora biti enak nič $\Rightarrow$ $\boxed{P(x)=0}$!sode/lihe ničle!

kjer je Q(x)=0 funkcija ni definirana:

$$\frac{+a}{-0} = +\infty \quad ; \quad \frac{+a}{-0} = -\infty$$

poli: Q(x)=0

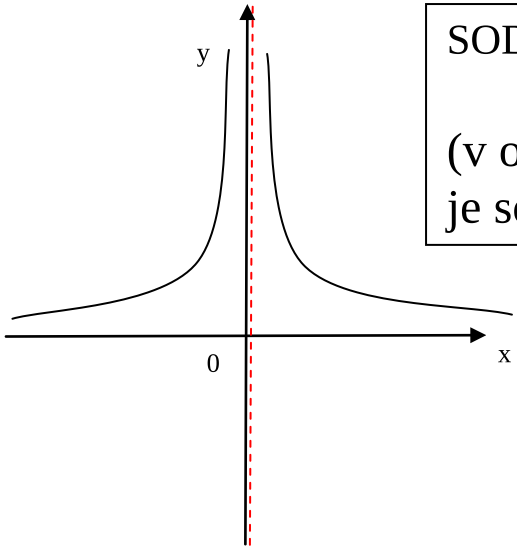
sodi $\rightarrow$ $+\infty$ v obeh delih
ali $-\infty$ v obeh delih
lihi $\rightarrow$ $-\infty$ in $+\infty$

Primer 1

$$y = \frac{1}{x^2}$$

Poli: $x^2 = 0$, $x=0$ (2) sodi pol
Ničle: ni

$$\frac{1}{+\infty} = +0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = +0 \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = +0$$



SODA FUNKCIJA

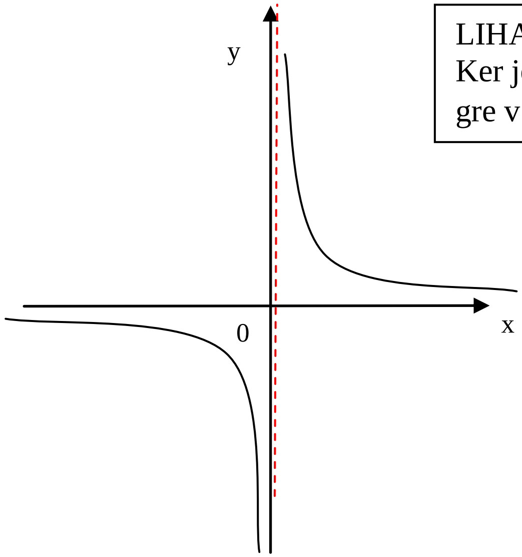
(v obeh delih $+\infty$, je sodi pol)

Primer 2

$$y = \frac{1}{x^3}$$

Poli: $x^3 = 0$, $x=0$ (3) lihi pol
Ničle: ni

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3} = +0 \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3} = -0$$

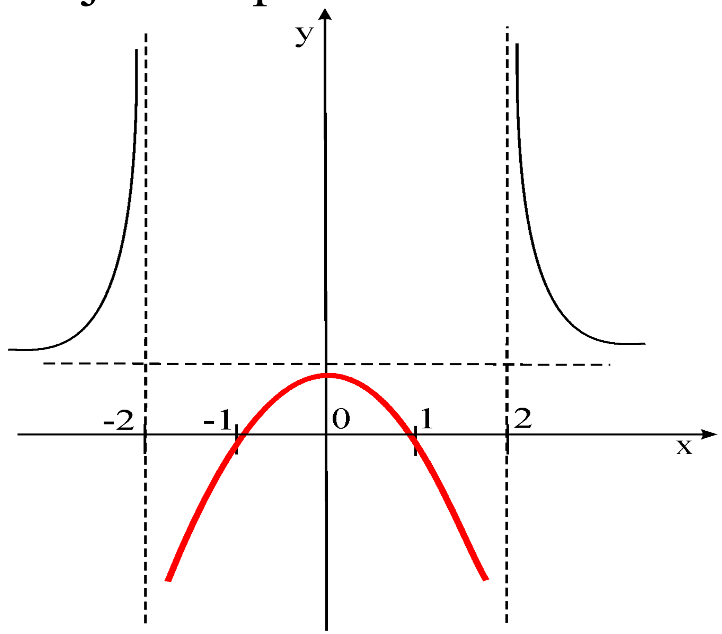


LIHA FUNKCIJA
Ker je lihi pol
gre v $+\infty$ in v $-\infty$

Kadar je stopnja polinoma Q(x) > P(x) je asimptota, to je $\lim_{x \to \pm\infty} y = 0$.

Če je stopnja števca enaka stopnji imenovalca je asimptota konstanta. Primer:

$$\boxed{y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}}$$



ničle: $x^2-1=0$ $x_1=1$ (1) liha; $x_2=-1$ (1) liha

poli: $x^2-4=0$ $x_1=2$ (1) lihi $x_2=-2$ (1) lihi

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4} = 1 \quad , \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4} = 1 \quad , \quad y = 1 \text{ asimptota} \; , \quad \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4} = 1 \quad ;$$

$$x^2 - 1 - x^2 - 4 \quad \Rightarrow \textit{asimptote ne sekamo}$$

Če je števec višje stopnje kot imenovalec: limita je enaka ∞

$$\boxed{y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}}$$

ničle: ni

poli: x+1=0

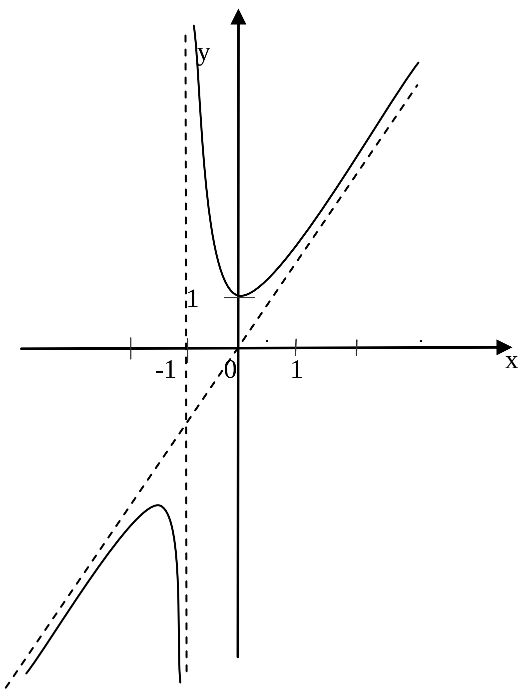
x=-1 (1) lih

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} = +\infty \quad , \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} = -\infty$$

$$\text{poševna asimptota:} \quad (x^2 + x + 1) : (x + 1) = x$$

$$\frac{\underline{-x^2 + x}}{\underline{0 \quad 0}}$$

$$1 \qquad y = x$$

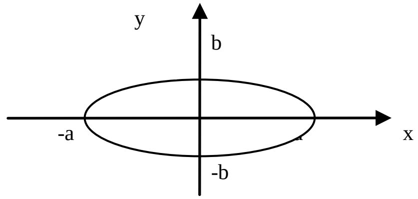


Če je stopnja števca za 1 večje od stopnje imenovalca, je poševna asimptota premica, za 2 pa parabola II. stopnje.

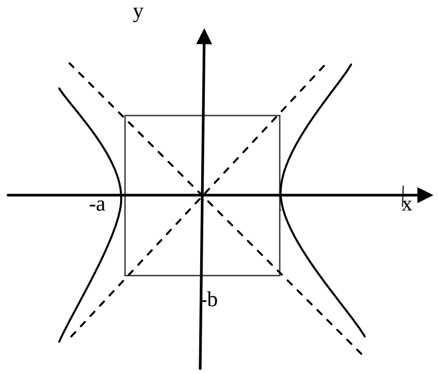
6. ALGEBRSKE FUNKCIJE

Krožnica $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ (p,q) središče

Elipsa $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ a, b…osi elipse

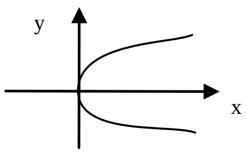


Hiperbola $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $y=\pm\dfrac{b}{a}x$ asimptoti

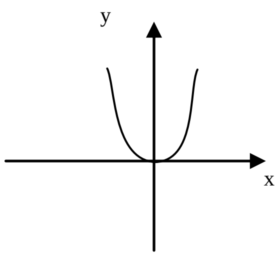


Parabola $y^2=2px$ $y=ax^2$

Sim. glede na x



Sim. glede na y



Naloga : narišite : (hiperbola)

$x^2-2y^2+2x+4y-5=0$

$(x+1)^2-2(y-1)^2=4$

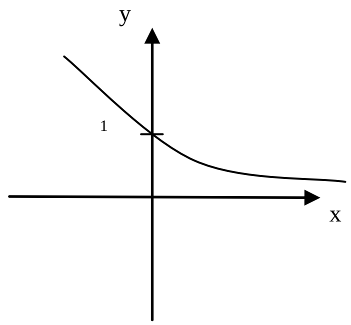
7. EKSPONENTNE FUNKCIJE

$y = a^x \quad , \quad a > 0$

1.) **0 < a < 1**

ničle: ni

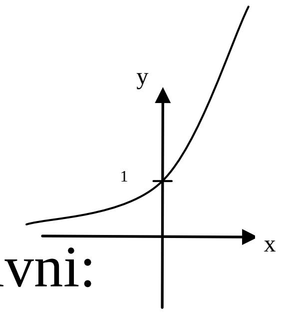
$\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +0 \quad , \quad \lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$



2.) **a > 1**

ničle: ni

$\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty \quad , \quad \lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +0$

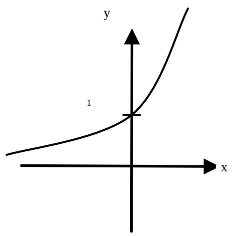


Obe funkciji sta samo pozitivni:

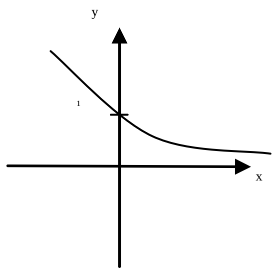
a > 1 je povsod naraščajoča (večji je x, $\Rightarrow$ večji je y); $x_2 > x_1 \Rightarrow y_2 > y_1$

0 < a < 1 je povsod padajoča (večji je x, $\Rightarrow$ manjši je y); $x_2 > x_1 \Rightarrow y_2 < y_1$

$y = e^x; \quad a > 1$



$y = e^{-x} = \left(\frac{1}{e}\right)^x$



<u>Pojem INVERZNE FUNKCIJE</u>

y=y(x)

x=x(y)⇒y=(y(x)

↓inverzna funkcija

<u>Primer</u>:

$$y = 1 \pm \sqrt{x^2 + 1}$$

$$x = 1 \pm \sqrt{y^2 + 1}$$

$$x - 1 = \pm\sqrt{y^2 + 1}$$

$$(x-1)^2 = y^2 + 1$$

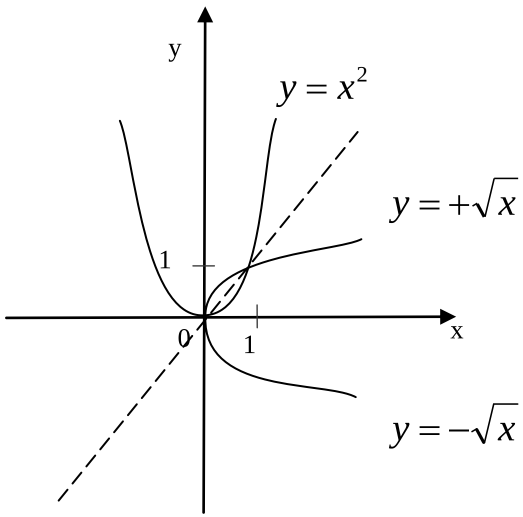
$$y^2 = (x-1)^2 - 1$$

$$y^2 = x^2 - 2x \Rightarrow \underline{y = \pm\sqrt{x^2 - 2x}}$$ inverzna k prvi funkciji

Na grafu osi x, in y zamenjata vlogi!

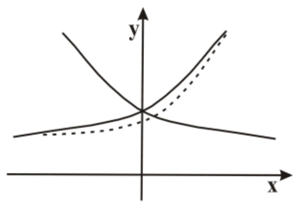
$$y = x^2$$

$$x = y^2 \Rightarrow y = \sqrt{x}$$



8. LOGARITEMSKA FUNKCIJA

$y = a^x$



a > 1

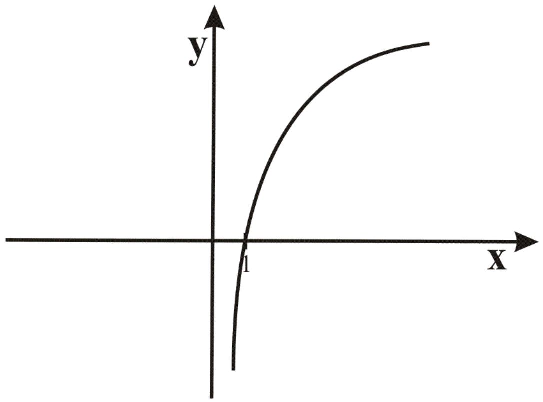
<u>a > 0 0 < a < 1</u>

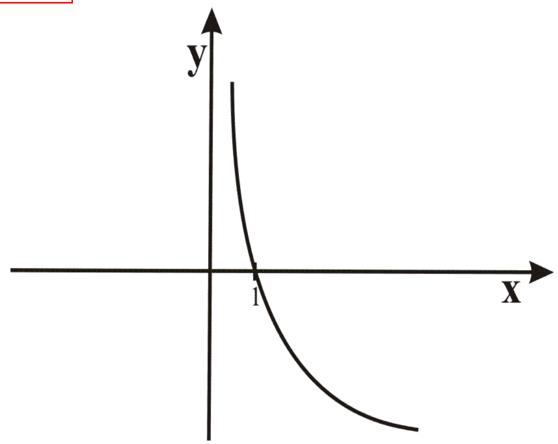
y > 0
x $\in$ R
Definirana za vse x.

$\boxed{x = a^y \Rightarrow y = \log_a x}$ inverzna funkcija k eksponentni f. je logaritemska f

a > 0; x… argument (neodvisna spremenljivka)

<u>Definicijsko območje za logaritemsko funkcijo</u>: $\boxed{D_f : \{x > 0\}}$; $\boxed{y \in R}$





<u>0 < a < 1; padajoča</u>

<u>a > 1; naraščajoča</u>

$\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty$

(po pozitivnih vrednosti, desna limita)

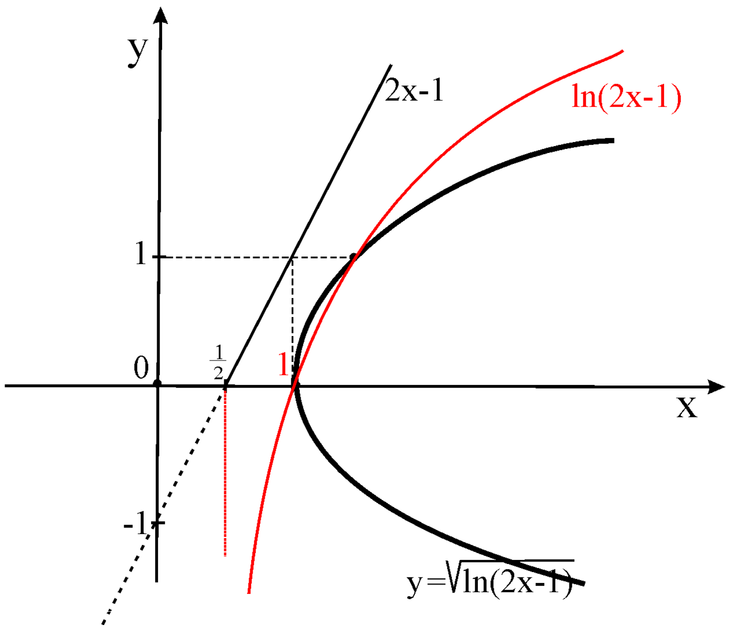
$\log_a x = 0 \Rightarrow x = 1$ <u>ničla</u>

Primer (nariši in določi definicijsko območje)

$y=\sqrt{\ln(2x-1)}$

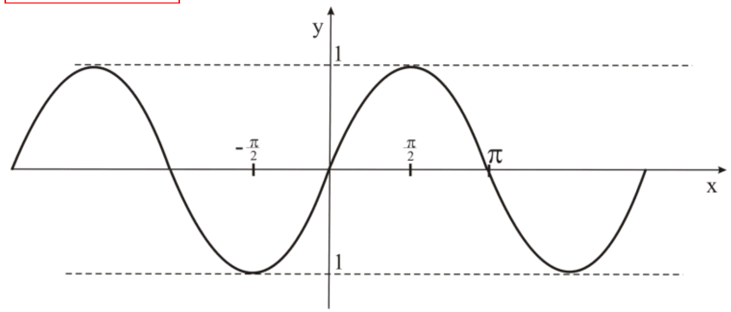
$def.\ \ln(2x-1)\geq 0;\ 2x-1\geq 1;\ x\geq 1$

1. Nariši premico, y=2x-1: Črtaj vse kar je pod osjo x; in iz dela premice, ki ostane, naredi ln; to je na območju za x≥1/2;
2. Velja namreč: ln0=-∝; ln1=0, ln∝=∝; črtaj vse od funkcije y=ln(2x-1), kar je negativno; ostane območje za x≥1 (to je torej tudi definicijsko območje končne funkcije). Iz tega presotanka naredi koren.
3. Korenimo po točkah: $\sqrt{0}=0; \sqrt{\check{s}tevil\ na\ (0{,}1)}\ se\ poveca; \sqrt{\check{s}tevil\leq 1}\ se\ zmanj\check{s}a$;
   ne pozabi simetrije



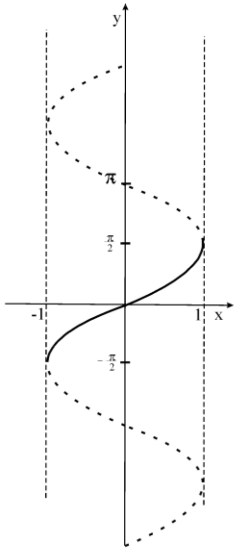
9. KOTNE IN CIKLOMETRIČNE FUNKCIJE

$\boxed{y=\sin x}$; $x\in R$; $y\in[-1,1]$; liha funkcija, perioda 2π, max, min, ničle



Inverzne funkcije h kotnim so <u>ciklometrične funkcije</u>.

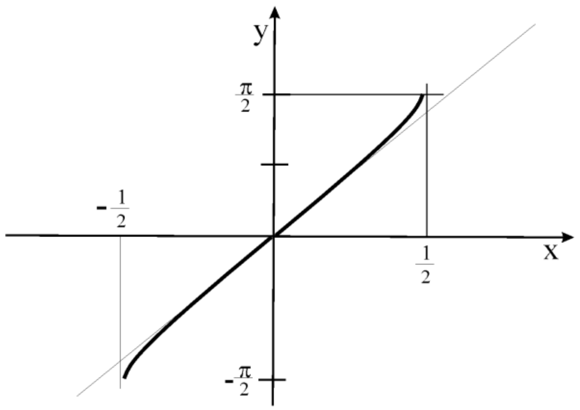
$x=\sin y \Rightarrow y=arc\sin x$; $y\in R$; $x\in[-1,1]$; $arc\sin x$ je mnogolična funkcija za vsak x lahko dobimo neskončne vrednosti za y

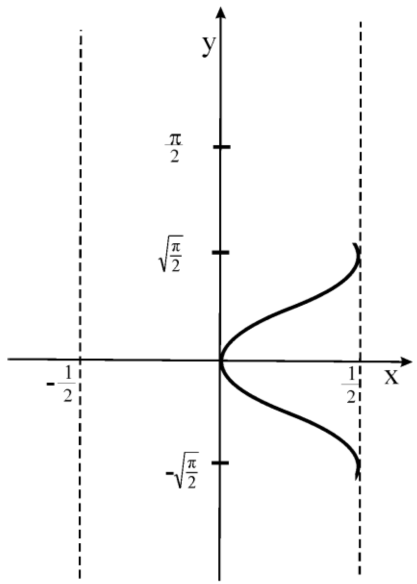


glavna veja : $arc\sin x$

<u>Primer</u> (nariši in določi definicijsko območje):

$y = \sqrt{arc\sin 2x}$





Najprej pod korenom

$-1 \le 2x \le 1$

$D_f : \left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right], \left\{-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}\right\}$

$D_f : \left\{0 \le x \le \frac{1}{2}\right\}$

1. $y = 2x$
2. nad to premico izvajaj arcsin

   $arc\sin 0 = 0$

   $arc\sin 1 = \frac{\pi}{2}$

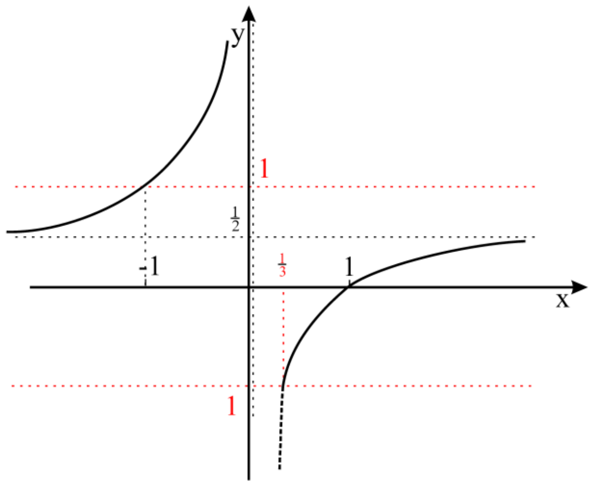
   $arc\sin(-1) = -\frac{\pi}{2}$
3. koreni; pazi na dvoličnost sodega korena

Primer (nariši in določi definicijsko območje): $y = \arcsin \frac{x-1}{2x}$

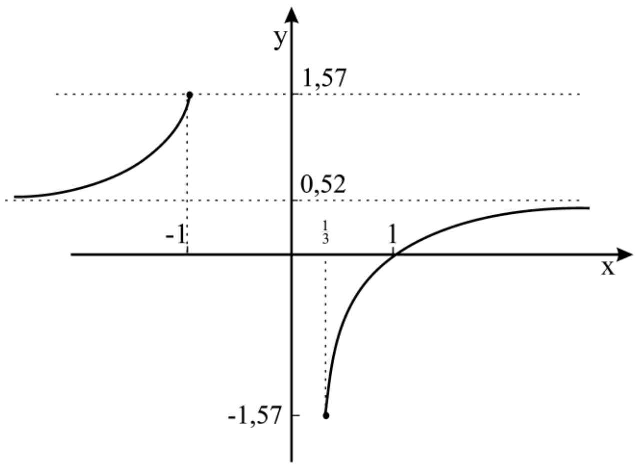
4. Najprej narišemo ulomek: y=$\frac{x-1}{2x}$; ničla x=1 (liha), pol x=1/2 (lihi), asimptota: y=1/2
5. Izberemo le vrednosti ulomka (funkcije y), ki so med –1 in 1, ker je le tam definiran arcsin. Pri tem prečrtamo vse vrednosti y pri x-ih med -1 in 1/3. Def. območje: x$\in$R, x$\notin$(-1,1/3)
6. Nad preostankom funkcije y izvajamo arcsin:

$arc\sin 0 = 0$; $\arcsin(1/2) = \frac{\pi}{6} = 0{,}52$; $arc\sin 1 = \frac{\pi}{2} = 1{,}57$; $arc\sin(-1) = -\frac{\pi}{2} = -1{,}57$

y = $\frac{x-1}{2x}$



rezultat



$y = \cos x$

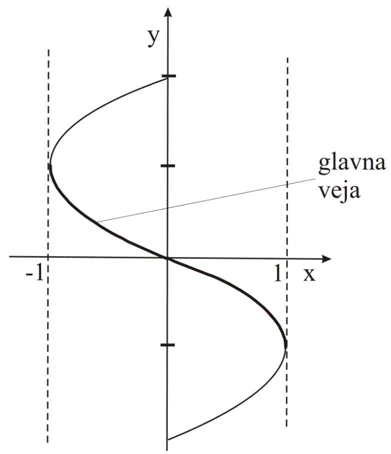
$y \in [-1,1]$

$x \in R$

$x = \cos y \Rightarrow y = arc\cos x$

$D_f \ : \{-1 \le x \le 1\}$

$y \in R$



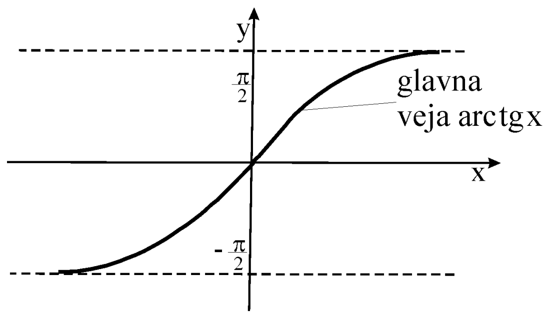
$y = tg\ x$

$x \in R$

$y \in R$

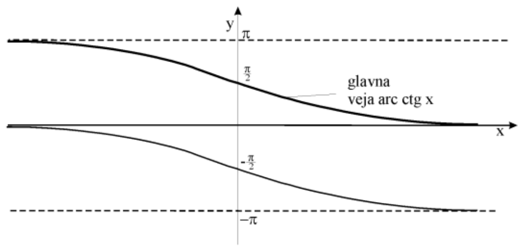
$x = tg\ y \Rightarrow y = arc\,tg\,x$

$y \in R, x \in R$



$y = ctg\ x$; $y \in R, x \in R$

$x = ctg\ y \Rightarrow y = arc\,ctg\ x$; $y \in R, x \in R$

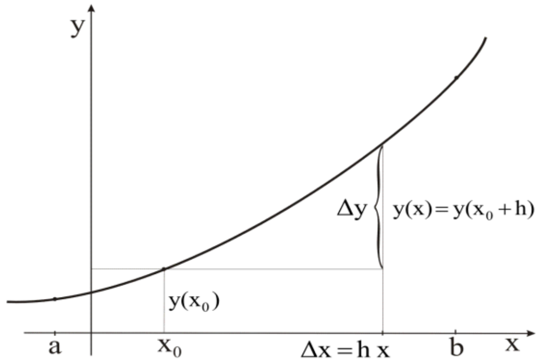


ZVEZNOST IN LIMITA FUNKCIJ

Funkcija je zvezna v vseh tistih točkah, kjer ni pretrgana (v grafu!)

y(x), x∈[a, b]; $x_0, x \in [a,b]$; $x_0 \neq x$; $\Delta x = x - x_0 = h$

$\Delta y = y(x) - y(x_0)$; $\Delta y = y(x_0 + h) - y(x_0)$



Funkcija y(x) je v točki x_0 svojega definicijskega območja zvezna natanko takrat, če lahko za vsak poljubno majhen $\varepsilon > 0$ najdemo tako pozitiven $\delta > 0$, da iz dejstva, da je $|\Delta x| < \delta$ sledi, da je $|\Delta y| < \varepsilon$; kar zapišemo kot: $\boxed{\varepsilon > 0, \delta > 0; |\Delta x| < \delta \Rightarrow |\Delta y| < \varepsilon}$; δ, ε sta majgni pozitivni števili.

Oziroma funkcija y(x) je v točki x_0 zvezna, če velja: ko gre x $\rightarrow x_0$, gre Δy→ 0, kar zapišemo:

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \Delta y = 0}$$

Limita funkcije

Število A imenujemo limito funkcije y(x) v točki x_0, kadar za vsak $\varepsilon > 0$ eksistira tak $\delta > 0$, da velja: $\boxed{\varepsilon > 0, \delta > 0; \quad |\Delta x| < \delta \Rightarrow |y(x_0) - A| < \varepsilon}$

To pomeni:ko gre x proti x_0, gre funkcijska vrednost y(x_0) proti vrednosti A.

To pa zapišemo kot: $\boxed{A = \lim_{x \to x_0} y(x)}$

IZREK:

Če je funkcija v točki x_0 zvezna, potem je njena limita v tej točki enaka funkcijski vrednosti v tej točki.

$$\boxed{y(x)\ zvezna\ \ v\ x_0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} y(x) = y(x_0)}$$

Primeri:

$$\lim_{x\to 1}(2x+1)=3$$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ v tem primeru je število A enako 1

LEVA in DESNA LIMITA

- Če gremo z x proti x_0 z desne strani, govorimo o desni limiti: $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0^+} y(x)}$

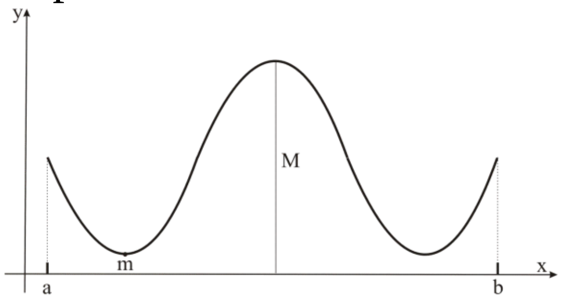
- Če gremo z x proti x_0 z leve strani, govorimo o levi limiti: $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0^-} y(x)}$

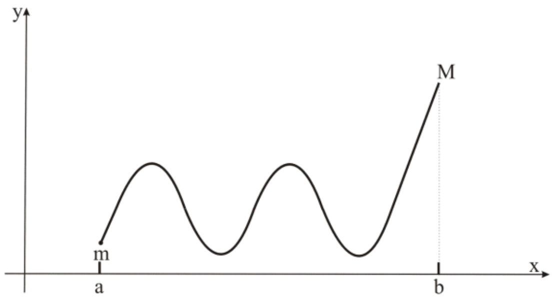
Če obe limiti eksistirata in **sta enaki**, potem je funkcija v točki x_0 **zvezna**:

$$\lim_{x\to x_0^+} y(x)=\lim_{x\to x_0^+} y(x)=y(x_0)$$

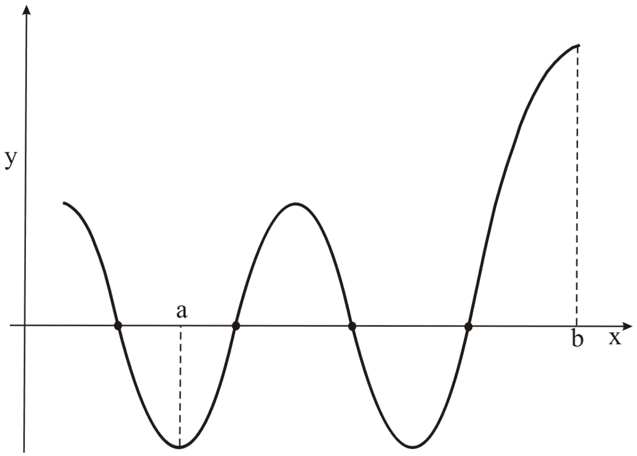
Lastnosti zveznih funkcij:

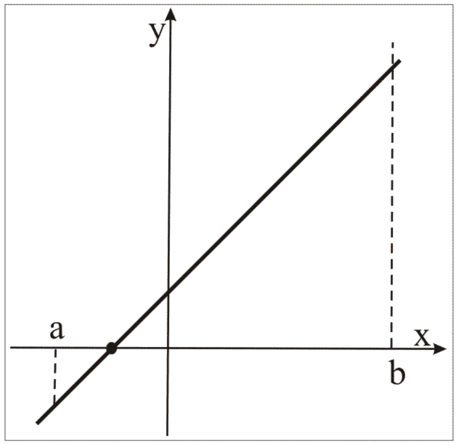
- Če je funkcija y(x) na intervalu [a, b] povsod zvezna, potem je na tem intervalu tudi omejena. Eksistira njena natančna zgornja meja M in njena natančna spodnja meja m. Funkcija y(x) pa pri tem na tem intervalu zavzame vsako vrednost med M in m vsaj enkrat.





- Če je funkcija y(x) na intervalu [a, b] zvezna in velja $y(a)\cdot y(b)<0$, potem ima funkcija na tem intervalu vsaj eno ničlo: $y(a)\cdot y(b)<0; x_0 \varepsilon [a,b] \Rightarrow y(x_0)=0$





Vaje za računanje limit funkcije y(x):

1. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2+2x}{x+1} = \pm\infty \longrightarrow$ Asimptota !

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{2x}}{\sqrt{x-\sqrt{x}}} = \sqrt{2}$

3. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)\cdot(x^2+x+1)}{(x-1)\cdot(x+1)} = \dfrac{3}{2}$ skupne ničle okrajšaj; funkcija je zvezna

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tg\ x}{x} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin x}{\cos x \cdot x} = 1$ $\left(\dfrac{\sin x}{x} = 1, \dfrac{1}{\cos x} = 1 \right)$

5. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x \cdot \sin\dfrac{1}{x} \right) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1;\ t = \dfrac{1}{x};$ opomba: $0.\propto$ je nedoločen izraz!!!!

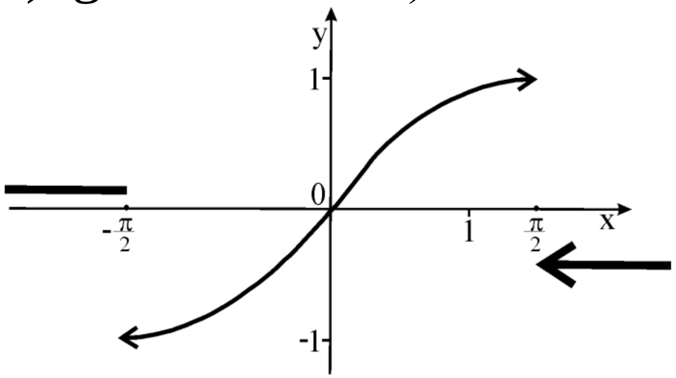
6. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+2x-1}{2x^2-x+1} = 1$; funkcija je v točki x=2 zvezna (nariši funkcijo za vajo!!!)

7. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x+3}{2-\sqrt{1-x}}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(x+3)\cdot(2+\sqrt{1-x})}{(2-\sqrt{1-x})\cdot(2+\sqrt{1-x})}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(x+3)\cdot(2+\sqrt{1-x})}{4-1+x}=4$ (odpravili smo ničlo v imenovalcu!!!)

8. Poiščite točke nezveznosti za funkcijo

$$\begin{cases}\sin x, -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\\ -1, x>\dfrac{\pi}{2}\\ 0, drugod\end{cases}$$

a) grafično b)računsko



nezvezna: $x=-\dfrac{\pi}{2}$; $x=\dfrac{\pi}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to +\frac{\pi}{2}^-}(\sin x)=1$

$\lim\limits_{x\to +\frac{\pi}{2}^+}(-1)=-1$

različne limite $\rightarrow$ nezvezna pri $x=\dfrac{\pi}{2}$

$\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^+}(\sin x)=-1$

$\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^-}0=0$

različne limite $\rightarrow$ nezvezna pri $x=-\dfrac{\pi}{2}$

9. Določi število a tako, da bo funkcija, povsod zvezna

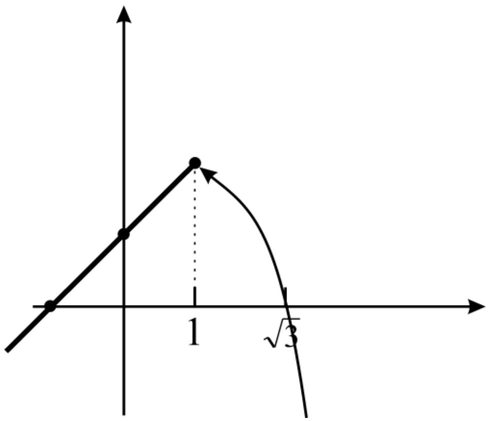
$$y = \begin{cases} x+1, x \le 1 \\ 3 - a \cdot x^2, x > 1 \end{cases}$$

Do nezveznosti lahko pride pri prehodu iz ene funkcije v drugo;to je pri x=1

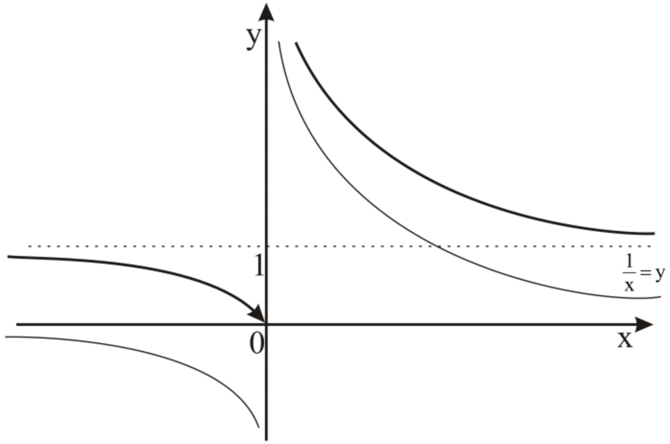
$$\lim_{x \to 1^-} (x+1) = 2$$

$$\lim_{x \to 1^+} (3 - a \cdot x^2) = 3 - a$$

$$2 = 3 - a \Rightarrow a = 1$$



10. Nariši funkcijo $y = e^{\frac{1}{x}}$. Iz slike določi točke nezveznosti in zanje izračunajte levo in desno limito.



nezvezna pri x=0

$$\lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{+0}} = e^{+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{-0}} = e^{-\infty} = +0$$