AGRONOMIJA + ZOOTEHNIKA – ŽIVILSTVO IN PREHRANA

1. letnik BSc

MATEMATIKA/MATEMATIČNE METODE
6. del

KOMBINATORIKA

M množica z n različnimi elementi.
Permutacija ali razporedba, če vzamemo vseh n elementov

Kombinacija, če vzemimo r elementov (r<n) in razporeditev (vrstni red) teh r elementov ni važen
če se elementi ponavljajo → kombinacija s ponavljanjem

Variacija, če vzemimo r elementov (r<n) in je vrstni red r elementov pomemben
če se elementi ponavljajo → variacija s ponavljanjem

Primer: M={1,2,3}

PERMUTACIJE: 123, 132, 213, 231, 312, 321 razporeditve vseh elementov

KOMBINACIJE: r = 2, (n=3) ;vrstni red ni pomemben

12, 13, 23 kombinacija 2.reda treh elementov

12, 13, 23, $\begin{pmatrix} 11 \\ 22 \\ 33 \end{pmatrix}$ kombinacije s ponavljanjem

VARIACIJE: kombinacije + vrsti red

12, 21, 13, 31, 23, 23

12, 21, 13, 31, 23, 23 $\begin{pmatrix} 11 \\ 22 \\ 33 \end{pmatrix}$ variacije s ponavljanjem

OSNOVNI IZREK KOMBINATORIKE

Če neko operacijo lahko sestavimo iz k faz in prvo fazo opravimo na n_1 načinov, drugo na n_2 načina, …, k-to fazo na n_k načinov, potem lahko kompletno operacijo opravimo na $n_1 \cdot n_2 \cdots\cdots \cdot n_k$ **načinov**.

Primer:

Na koliko načinov lahko prenočijo 4 gostje v hotelu s 6 enoposteljnimi sobami?

4 faze $\rightarrow$ k=4
1.faza: na 6 načinov
2.faza: na 5 načinov
…
$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$

FORMULE!!

VARIACIJE BREZ PONAVLJANJA (n elementov, red r)

r - elementov vzamemo iz množice z n elementi

n – vsi elementi

$$\frac{n}{1}\ \frac{n-1}{2}\ \frac{n-2}{3}\ \cdots\ \frac{n-(r-2)}{r-1}\ \frac{n-(r-1)}{r}$$ št. mest

$$\boxed{V_n^r = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-r+1)}$$

PERMUTACIJE so variacije vseh n elementov

$$\boxed{P_n = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 1 = n!}$$

$$\boxed{0! = 1}$$

n! pomeni n-faktorsko (produkt n el. od 1 do n) n! = $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 1$

VARIACIJE S PONAVLJANJEM

$$\boxed{V_n^{r(p)} = n^r}$$

KOMBINACIJE

$$\boxed{C_n^r = \frac{V_n^r}{r!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-r+1)}{r!} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\cdot(n-r)!}}$$

Število permutacij, kjer so nekateri elementi enaki.

$$\boxed{P_n^{r_1, r_2, \ldots} = \frac{n!}{r_1!\cdot r_2!\ldots}}$$

Primer:

$M = \{1, 2, 3\}$; $P_n = n! = 3\cdot 2\cdot 1 = 6$; $C_3^2 = \frac{3!}{2!\cdot 1!} = 3$; $V_3^2 = 3\cdot 2 = 6$

$V_3^{2(p)} = 3^2 = 9$

Naloge

1. Koliko trimestnih števil lahko zapišemo z 1, 2, 3, 4? (cifre naj se ne ponavljajo)
   n=4 VRSTNI RED JE POMEMBEN!
   r = 3 1 2 3 ≠ 3 2 1 $V_4^3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$
2. Koliko produktov je možnih s števili 2, 3, 5, 7, 11?
   VRSTNI RED NI POMEMBEN!
   2 · 3 = 3 · 2
   $C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5$
   ali *(Unija)* → + plus
   $\frac{5!}{2!\,3!} + \frac{5!}{2!\,3!} + \frac{5!}{4!\,1!} + \frac{5!}{5!\,0!} = 26$
3. Med proizvodi je 7 dobrih in 3 slabi. Izberemo 3 dobre in 2 slaba. Na koliko načinov je to možno storiti?
   7 D 3S
   3 D 2S; $C_7^3 \cdot C_3^2$ **in (∩) → · krat**

4. Na koliko načinov je možno vreči 2 igralni kocki?

$6 \cdot 6 = 36;$ $\quad V_6^{2(p)} = 6^2 = 36$

5. Koliko trobojnic je možnih iz 5-ih barv?

n = 5 VRSTNI RED JE POMEMBEN !

r = 3 $\quad V_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

6. Imamo 3 velike, 2 srednje veliki in 4 male knjige.

a) Na koliko načinov jih lahko razporedimo po polici? $P_9 = 9!$

b) Na koliko načinov jih lahko razporedimo po polici, če morajo enako velike knjige stati skupaj?

$$3! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 4!$$

$$\underbrace{\underbrace{VVV}_{3}\,\underbrace{SS}_{2}\,\underbrace{MMMM}_{4}}_{3}$$

c) Na koliko načinov pa, če morajo srednje knjige stati skupaj?

$2! \cdot 8!$

$$\underbrace{VVVMMMM\,\underbrace{SS}_{2}}_{8}$$

7. Odbor ima 25 članov med katerimi so 4 ing. Na koliko načinov lahko sestavimo 3 člansko komisijo, v kateri mora biti vsaj en ing?

1 ing in 2 ostala

(+) ali 2 ing in 1 ostali

(+) ali 3 ing in 0 ostalih

VRSTNI RED NI POMEMBEN!

$$C_{21}^{2} \cdot C_{4}^{1} + C_{21}^{1} \cdot C_{4}^{2} + C_{21}^{0} \cdot C_{4}^{3} = 970$$

8. 10 konj spravimo v 3 hleve. V prvi hlev 3, v drugega 2, v tretjega pa 5. Na koliko načinov lahko to storimo, če ni nobenih dodatnih omejitev?

$$C_{10}^{3} \cdot C_{7}^{2} \cdot C_{5}^{5} =$$

Izračunaj do konca in razmisli o formuli!!!!

9. Na koliko načinov lahko razdelimo 24 stvari med 6 oseb tako, da dobi vsak enako?

$$C_{24}^{4} \cdot C_{20}^{4} \cdot C_{16}^{4} \cdot C_{12}^{4} \cdot C_{8}^{4} \cdot C_{4}^{4}$$

10. Morsejevi znaki so sestavljeni iz pik in črtic, in sicer posamič, v sestavi po dva elementa, 3 ali 4 elemente skupaj. Koliko je vseh znakov?

PONAVLJANJE ! VRSTNI RED JE VAŽEN !

$$V_2^{1(p)} + V_2^{2(p)} + V_2^{3(p)} + V_2^{4(p)}$$

$$2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30$$

$\rightarrow$ r > n $\rightarrow$ nujno ponavljanje

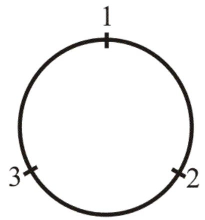
11. Na koliko načinov lahko sedijo za okroglo mizo 3 moški in 2 ženski?

$\boxed{P_n^0 = (n-1)!}$ v krogu

$P_n = 4! = 24$

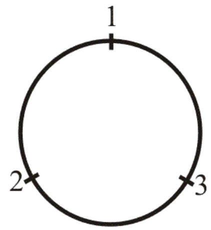
1 2 3
1 3 2

2 1 3



2 3 1
3 1 2

3 2 1



2!

3 ! za ravno mizo

- Na koliko načinov lahko sedijo za okroglo mizo 3 moški in 2 ženski, če morata 2 določena moška sedeti skupaj?

$$\underbrace{\underbrace{MM}_{2}\, M\check{Z}\check{Z}}_{4 elementi}$$ okrogla miza → 3!.2! = 12

- Na koliko načinov pa, če ženski ne smeta sedeti skupaj?

NEGACIJA! da ženski morata sedeti skupaj!

vseh možnosti $\underbrace{MMM\check{Z}\check{Z}}_{5 elementov, 4!}$. Odštejemo možnosti, ko ženski sedita skupaj

4! – 3!· 2! = 12

12. V posodi imamo 4 bele in 3 rdeče krogle. Na koliko načinov lahko izvlečemo 3 kroglice? $C_7^3 =$

- Na koliko načinov lahko potegnemo 2 beli in 1 rdečo? $C_4^2 \cdot C_3^1$
- Na koliko načinov lahko izvlečemo 3 krogle enake barve? $C_4^3 + C_3^2$

VERJETNOSTNI RAČUN

OSNOVNI POJMI:

POSKUS pomeni realizacijo vseh mogočih pogojev
in DOGODEK je izid poskusa.

G: GOTOVI DOGODKI se zgodijo po vsakem poskusu.
N: NEMOGOČI DOGODKI se v nobenem poskusu ne zgodijo.
A, B, C,…SLUČAJNI DOGODKI se včasih zgodijo, včasih pa ne (npr. 6 pri kocki).
VSOTA DOGODKOV: AUB; (A+B) dogodek, da se zgodi vsaj eden od obeh.
PRODUKT DOGODKOV: A∩B; (A·B) zgoditi se morata oba dogodka hkrati.
NEGACIJA DOGODKOV: $\overline{A}$ ne zgodi se A.
NEZDRUŽLJIVA DOGODKA: se ne moreta zgoditi hkrati.
A·B=N (nemogoč dogodek).
A (pade 5 pik na kocki), B (pade 6 pik) nezdružljiva

Relativna frekvenca dogodka A

n poskusov

m krat se zgodi dogodek A $\qquad \dfrac{m}{n}$ … relativna frekvenca dogodka A

Primer:

30000 čebel, med njimi je 50 trotov. Kolikšna je relativna frekvenca trota?

Odg. $\dfrac{50}{30000}$

Verjetnost dogodka A : P (A)

1. STATISTIČNA DEFINICIJA: verjetnost dogodka A je število, pri katerem se stabilizira relativna frekvenca dogodka A: $\boxed{P(A) = \dfrac{m}{n}}$

$P(6\ pik) = \dfrac{1}{6}$ $\qquad P(soda\ \ cifra) = \dfrac{1}{2}$

Primer:Iz kupa 32 kart na slepo izvlečemo 2. Kakšna je verjetnost, da sta obe karti asa?

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{C_4^2}{C_{32}^2}=\frac{4!\cdot 30!\cdot 2!}{2!\cdot 2!\cdot 32!}-\frac{4\cdot 3}{32\cdot 31}=\frac{4}{32}\cdot\frac{3}{31}$$

2.KLASIČNA DEFINICIJA: uvedimo pojm popoln sistem dogodkov:

A_1, A_2,…,A_n tvorijo popoln sistem, če zadoščajo pogojem:

1. dogodki so paroma nezdružljivi; AB=N
2. v vsakem poskusu se zgodi natanko en dogodek iz sistema
3. vsota vseh dogodkov je gotov dogodek: $A_1+A_2+\ldots+A_n=G$

$$\boxed{P(A)=\frac{m}{n}}$$

m dogodkov iz sistema sestavljajo dogodek A

n je število vseh dogodkov iz popolnega sistema

Primer: kocka: dogodki 1, 2, 3, 4, 5, 6 tvorijo popoln sistem.

Verjetnost, da pri kocki pade sodo število: $P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

da pade 6-ica $P(A)=\frac{1}{6}$

ELEMENTARNI DOGODEK ni ga možno zapisati kot vsoto ostalih dogodkov iz popolnega sistema dogodkov.

VSOTA DOGODKOV

1. Kolikšna je verjetnost, da iz kupa 32 kart potegnemo kralja ali rdečo karto?

K – kralj, R – rdeča

$$P(K+R)$$

$$P(K)=\frac{4}{32} \quad ,P(R)=\frac{16}{32}$$

$$P(K+R)=P(K)+P(R)-P(K\cdot R)=\frac{18}{32}$$

$$P(K\cdot R)=\frac{2}{32}$$

hkrati rdeča in kralj

<u>VERJETNOST VSOTE DVEH DOGODKOV:</u>

P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A·B)

A·B=N; velja, da sta A in B nezdružljiva; P(A·B)=0

ČE STA DOGODKA NEZDRUŽLJIVA (se ne moreta zgoditi hkrati)

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

PRODUKT DVEH DOGODKOV

ODVISNA oz. NEODVISNA DOGODKA

Neodvisna – razložimo pojem na primeru:
A je dogodek, da vržemo na kocki 6.
B je dogodek, da vržemo na drugi kocki 3 in vržemo obe hkrati; dogodka sta neodvisna, ker eden ne vpliva na drugega.
Kolikšna je verjetnost, da pri metu dveh kock pade na prvi 6 in na drugi 3?

$$P(6,3)=\frac{1}{36}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}$$

P(AB)=P(A).P(B)

Odvisna – en dogodek vpliva na drugega; najprej potegnemo iz posode eno kroglo in nato še eno. Dogodka sta odvisna, ke rimamo za drugi poteg eno kroglo manj.

P(AB)=P(A).P(B/A)

Primer: V posodi imamo 3 bele in 4 rdeče krogle. Potegnemo 2 krogli. Kolikšna je verjetnost, da je prva bela in druga rdeča?
A – I. bela; B – II. rdeča

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6}$$

VAJE

1. Dokažite, da sta dogodka A in B nezdružljiva in odvisna, če je P(A)=P(B)=0,1 in P(A+B)=0,2!
   P(A+B)=P(A)+P(B)=0,1+0,1=0,2=P(A+B)→P(A.B) = 0
   P(A.B) = P(A). P(B) =

2. V trgovini imajo 30 izdelkov. 6 jih je boljše kvalitete. Kupci kupijo 4. Kolikšna je verjetnost, da sta oba boljše kvalitete?

$$P(A)=\frac{C_{24}^{2}\cdot C_{6}^{2}}{C_{30}^{4}}=\frac{24!\cdot 6!\cdot 26!\cdot 4!}{2!\cdot 22!\cdot 4!\cdot 2!\cdot 30!}=\frac{6}{30}\cdot\frac{5}{29}\cdot\frac{24}{28}\cdot\frac{23}{27}\cdot(6)$$

$$P_{4}^{2,2}=\frac{4!}{2!\cdot 2!}=6$$

3. Številke 1, 2, 3, 4, 5 so napisane na 5-ih listkih. Na slepo vzamemo zaporedoma 3 liste in jih zlagamo od leve proti desni. Kolikšna je verjetnost, da je trimestno število, ki pri tem nastane sodo?

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{3\cdot 4\cdot 2}{V_5^3}=\frac{3\cdot 4\cdot 2}{5\cdot 4\cdot 3}=\frac{2}{5}$$

VERJETNOST JE VEDNO MANJŠA KOT 1.

4. V posodi so listki s številkami od 1-100. Kolikšna je verjetnost, da potegnemo 2 listka s številkami pod 10?

$$P(A)=\frac{9}{100}\cdot\frac{8}{99}$$

5. Kolikšna je verjetnost, da pri metu 3 kock niso vsi izidi enaki?

vsi enaki: $P(\overline{A}) = \frac{6}{216}$

ne enaki: *P(A)*

$A + \overline{A} = G$ - vse

$$P(A+\overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) + P(A \cdot \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) - P(G) = 1$$

$$\boxed{P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{6}{216} = \frac{210}{216}}$$

6. Kolikšna je verjetnost, da pri slučajni razporeditvi 5 dečkov in 2 deklet v vrsto, dekleti stojita skupaj?

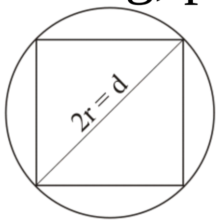
$$P(A) = \frac{6! \cdot 2!}{7!} = \frac{2}{7}$$

DDDDDŽŽ

7. V posodi imamo 6 belih in 4 črne krogle. Kolikšna je verjetnost, da bo med 3 izvlečenimi vsaj ena bela? Z negacijo= da ne bo nobena bela = $\bar{A}$

$$P(\bar{A}) = \underbrace{\frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9}\frac{2}{8}}_{\frac{C_4^3}{C_{10}^3}} \qquad P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{30}$$

8. V krog včrtamo kvadrat. Kolikšna je verjetnost, da točka, ki jo slepo vržemo v krog, pade v kvadrat?



$$P(A) = \frac{m - \text{v kvadrat}}{n - \text{v krog}}$$

$$d = a\sqrt{2} = 2r$$

$$a = \frac{2r}{\sqrt{2}} \quad , r = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$P(A) = \frac{a^2}{\pi r^2} = \frac{2}{\pi}$$

9. Kaj je verjetneje, da pri metu 4 kock vsaj na eni dobimo enico ali, da pri 24 metih dveh kock dobimo 2 enici?

4 kocke vsaj na eni dobimo 1 → $\overline{A}$ na nobeni 1

$$P(A)=\left(\frac{5}{6}\right)^{4}$$

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\left(\frac{5}{6}\right)^{4}=0{,}51$$

24 metov, 2 kocki, vsaj 1x dobimo 2 enici → $\overline{A}$ 24 metov, 2 kocki ne dobimo 2 enic

$$P(\overline{A})=\left(\frac{35}{36}\right)^{24} \qquad P(A)=1-P(\overline{A})=1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24}=0{,}49$$

BERNOULLIJEVO ZAPOREDJE NEODVISNIH POSKUSOV

n x izvedemo poskus

$A, \overline{A}$

P(A)=p

P($\overline{A}$)=1-p=q

Izračunajmo verjetnost, da se v n poskusih A zgodi natanko m krat?

Primer:

kocka: n=4

A= pade 6, $\overline{A}$ = ostalo

P(A)= p = $\frac{1}{6}$

P($\overline{A}$)= q = $\frac{5}{6}$

m= 3

$666\overline{6}$

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^1$$

ali

$\overline{6}666$

$$\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^1 \qquad C_4^3=\frac{4!}{3!\cdot 1!}=4$$

Odgovor: verjetnost, da v 4 metih pade 6 natanko 3-krat je:

$$P_4(3)=C_4^3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^1=0{,}0154$$

Bernoullijeva formula

$$\boxed{P_n(m)=C_n^m\cdot p^m\cdot q^{n-m}}$$

Bernoullijeva formula

Verjetnost, da v 4 metih pade 6 natanko 2-krat $P_4(2) = C_4^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 0{,}1157$

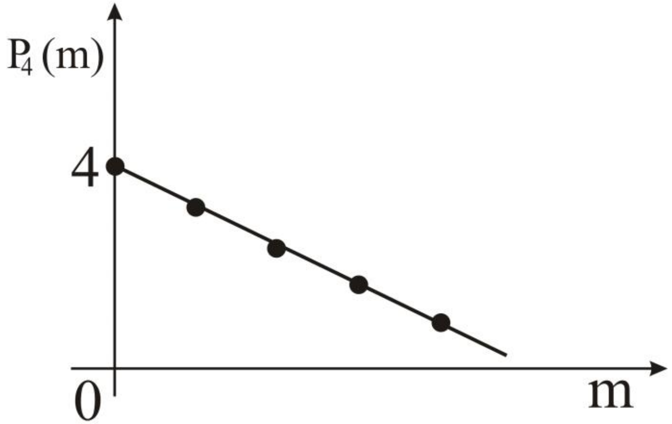
Verjetnost, da v 4 metih pade 6 natanko 4-krat: $P_4(4) = C_4^4 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^0 = 0{,}0008$

$$P_4(1) = C_4^1 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0{,}38$$

$$P_4(0) = C_4^0 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0{,}48$$

Vsota vseh teh verjetnosti je 1.

$$\boxed{\sum_{m=0}^{4} P_4(m) = 1}$$



Najverjetneje je, da bo padla 6 v štirih metih 0-krat.

Zgledi:

1. Verjetnost, da zadanemo tarčo je 0,03. Kolikšna je verjetnost, da v 10tih poskusih cilj zadanemo vsaj enkrat?

$P(A)=0{,}03=p$
$q=0{,}97$
$n=10$
$m=$ vsaj 1
$1, 2, \dots 10$

negacija: $m=0 \Rightarrow$ $P_{10}(0)=C_{10}^{0}\cdot 0{,}03^{0}\cdot 0{,}97^{10}=0{,}97^{10}$

$P_{10}(1,2,\dots 10)=1-0{,}97^{10}$

2. Verjetnost, da je izdelek neuporaben je 0,01. Kolikšna je verjetnost, da bo med 10000 izdelki, 100 neuporabnih?

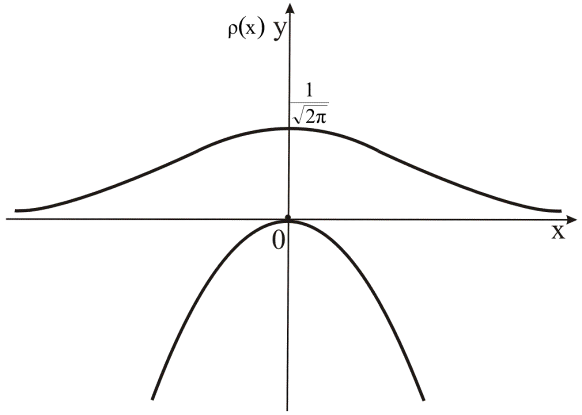
$$P_{10000}(100) = C_{10000}^{100} \cdot 0{,}01^{100} \cdot 0{,}99^{9900}$$

(točen rezultat)

p=0,01
q=0,99
n=10 000
m=100

n velik: Laplaceova lokalna asimptotična formula

$$\boxed{P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right)}$$



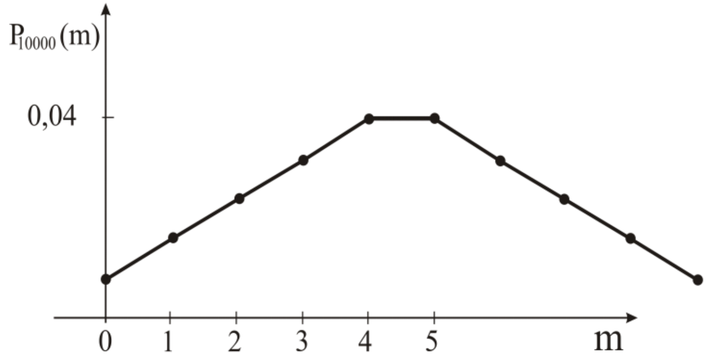
$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

TABELA!

$\varphi(-x) = f(x) \qquad \Rightarrow$ soda

$$f(x > 4) \approx 0$$

$$P_{10000}(100) = \frac{1}{\sqrt{99}} \cdot \varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{99}} \cdot 0{,}3989 = 0{,}04$$



Verjetnost, da je med 10000 izdelki 100 neuporabnih je 4%.

TABELA I: Vrednosti funkcije $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.39890	39892	39886	39876	39862	39844	39822	39797	39767	39733
0.1	0.39695	39654	39608	39559	39505	39448	39387	39322	39253	39181
0.2	0.39104	39024	38940	38853	38762	38667	38568	38466	38361	38251
0.3	0.38139	38023	37903	37780	37654	37524	37391	37255	37115	36973
0.4	0.36827	36678	36526	36371	36213	36053	35889	35723	35553	35381
0.5	0.35207	35029	34849	34667	34482	34294	34105	33912	33718	33521
0.6	0.33322	33121	32918	32713	32506	32297	32086	31874	31659	31443
0.7	0.31225	31006	30785	30563	30339	30114	29887	29659	29431	29200
0.8	0.28969	28737	28504	28269	28034	27798	27562	27324	27086	26848
0.9	0.26609	26369	26129	25888	25647	25406	25164	24923	24681	24439
1.0	0.24197	23955	23713	23471	23230	22988	22747	22506	22265	22025
1.1	0.21785	21546	21307	21069	20831	20594	20357	20121	19886	19652
1.2	0.19419	19186	18954	18724	18494	18265	18037	17810	17585	17360
1.3	0.17137	16915	16694	16474	16256	16038	15822	15608	15395	15183
1.4	0.14973	14764	14556	14350	14146	13943	13742	13542	13344	13147
1.5	0.12952	12758	12566	12376	12188	12001	11816	11632	11450	11270
1.6	0.11092	10915	10741	10567	10396	10226	10059	09893	09728	09566
1.7	0.09405	09246	09089	08933	08780	08628	08478	08329	08183	08038
1.8	0.07895	07754	07614	07477	07341	07206	07074	06943	06814	06687
1.9	0.06562	06438	06316	06195	06077	05959	05844	05730	05618	05508
2.0	0.05399	05292	05186	05082	04980	04879	04780	04682	04586	04491
2.1	0.04398	04307	04217	04128	04041	03955	03871	03788	03706	03626
2.2	0.03547	03470	03394	03319	03246	03174	03103	03034	02965	02898
2.3	0.02833	02768	02705	02643	02582	02522	02463	02406	02349	02294
2.4	0.02239	02186	02134	02083	02033	01984	01936	01888	01842	01797
2.5	0.01753	01709	01667	01625	01585	01545	01506	01468	01431	01394
2.6	0.01358	01323	01289	01256	01223	01191	01160	01130	01100	01071
2.7	0.01042	01014	00987	00961	00935	00909	00885	00861	00837	00814
2.8	0.00792	00770	00748	00727	00707	00687	00668	00649	00631	00613
2.9	0.00595	00578	00562	00545	00530	00514	00499	00485	00470	00457
3.0	0.00443	00430	00417	00405	00393	00381	00370	00358	00348	00337
3.1	0.00327	00317	00307	00298	00288	00279	00271	00262	00254	00246
3.2	0.00238	00231	00224	00216	00210	00203	00196	00190	00184	00178
3.3	0.00172	00167	00161	00156	00151	00146	00141	00136	00132	00127
3.4	0.00123	00119	00115	00111	00107	00104	00100	00097	00094	00090
3.5	0.00087	00084	00081	00079	00076	00073	00071	00068	00066	00063
3.6	0.00061	00059	00057	00055	00053	00051	00049	00047	00046	00044
3.7	0.00042	00041	00039	00038	00037	00035	00034	00033	00031	00030
3.8	0.00029	00028	00027	00026	00025	00024	00023	00022	00021	00021
3.9	0.00020	00019	00018	00018	00017	00016	00016	00015	00014	00014
4.0	0.00013	00013	00012	00012	00011	00011	00011	00010	00010	00009

3. Kovanec vržemo 100x. Kolikšna je verjetnost, da dobimo grb:

a) 50x

b) 56x

c) 10x

n=100

m=50

=56

=10

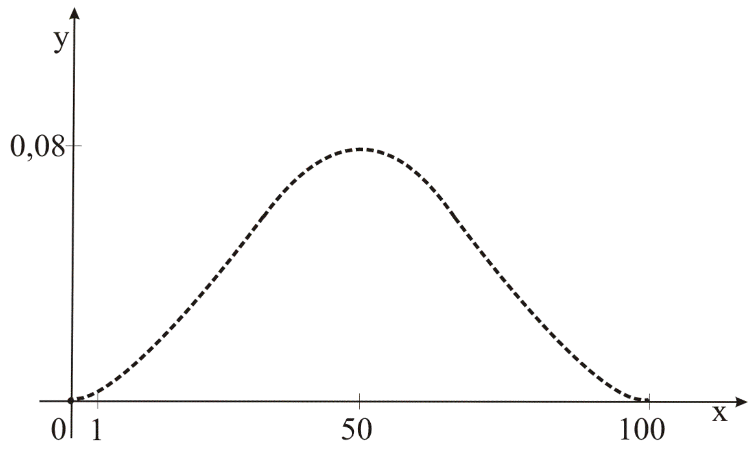
p=0,5

q=0,5

$$P_{100}(50) = \frac{1}{5} \cdot \varphi(0) = \frac{0,3989}{5} = 0,08 = 8\%$$

$$P_{100}(56) = \frac{1}{5} \cdot \varphi(\frac{6}{5}) = \frac{0,1942}{5} = 0,04 = 4\%$$

$$P_{100}(10) = \frac{1}{5} \cdot \varphi(-8) \approx 0$$



4. V seriji imamo 0,5% izmečka. Kolikšna je verjetnost, da bosta med 50 na slepo izbranimi izdelki iz te serije 2 neuporabna?

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$$

p=0,005
q=0,995
n=50
m=2

P=majhen (n ne prevelik) ⇒ Poissonova formula

$$\boxed{P_n(m) = \frac{(np)^m e^{-np}}{m!}}$$

$$P_{50}(2) = \frac{0{,}0625 \cdot e^{-0{,}25}}{2!} = \underline{\underline{0{,}024}}$$

$$P_{50}(2) = \frac{50!}{48! \cdot 2!} \cdot 0{,}005^2 \cdot 0{,}995^{48} = \underline{\underline{0{,}02407}}\ \textit{Bernoulli}$$

$$P_{50}(2) = \frac{1}{49} \cdot \varphi\left(\frac{1{,}75}{0{,}49}\right) = \frac{1}{0{,}49}\varphi(3{,}5) = \frac{1}{0{,}49} \cdot 0{,}0009 = \underline{\underline{0{,}018}}$$

Laplace: 6% napaka, ker je n majhen

5. Pri sajenju se v povprečju posuši 5% sadik. Kolikšna je verjetnost, da se bo od 1000 vsajenih sadik posušilo največ 60 sadik?

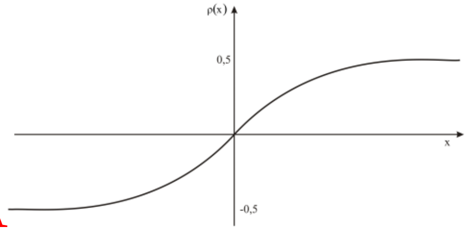
p=0,05
q=0,95
n=1000
m=max 60 (0,1,2,..60)

Negacija ni možna $\Rightarrow$ Laplaceova integralska formula, ker je m iz intervala

$$m \;\; iz \;\; [a,b]; \;\; P_n(a \le m \le b) = \phi(\frac{b-np}{\sqrt{npq}}) - \phi(\frac{a-np}{\sqrt{npq}})$$

$$\phi(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

$\Rightarrow$ TABELA



$$\phi(-x) = -\phi(x)$$

$\Rightarrow$ liha funkcija

$$\phi(x > 4) = 0,5$$

a=0
b=60

$$P_{1000}(0 \le m \le 60) = \phi(\frac{60-50}{\sqrt{47,5}}) - \phi(\frac{0-50}{\sqrt{47,5}}) =$$

$$= \phi(1,45) - \phi(-7,25) = 0,4265 + 0,5 = \underline{\underline{0,9265}}$$

TABELA II: Vrednosti funkcije $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.00000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0.1	0.03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0.2	0.07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0.3	0.11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0.4	0.15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0.5	0.19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0.6	0.22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0.7	0.25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0.8	0.28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0.9	0.31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1.0	0.34134	34375	34614	34849	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1.1	0.36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1.2	0.38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1.3	0.40320	40490	40658	40824	40988	41149	41309	41466	41621	41774
1.4	0.41924	42073	42220	42364	42507	42647	42785	42922	43056	43189
1.5	0.43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1.6	0.44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1.7	0.45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1.8	0.46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1.9	0.47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2.0	0.47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2.1	0.48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2.2	0.48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2.3	0.48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2.4	0.49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2.5	0.49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2.6	0.49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2.7	0.49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2.8	0.49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2.9	0.49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861
3.0	0.49865	49869	49874	49878	49882	49886	49889	49893	49896	49900
3.1	0.49903	49906	49910	49913	49916	49918	49921	49924	49926	49929
3.2	0.49931	49934	49936	49938	49940	49942	49944	49946	49948	49950
3.3	0.49952	49953	49955	49957	49958	49960	49961	49962	49964	49965
3.4	0.49966	49968	49969	49970	49971	49972	49973	49974	49975	49976
3.5	0.49977	49978	49978	49979	49980	49981	49981	49982	49983	49983
3.6	0.49984	49985	49985	49986	49986	49987	49987	49988	49988	49989
3.7	0.49989	49990	49990	49990	49991	49991	49992	49992	49992	49992
3.8	0.49993	49993	49993	49994	49994	49994	49994	49995	49995	49995
3.9	0.49995	49995	49996	49996	49996	49996	49996	49996	49997	49997
4.0	0.49997	49997	49997	49997	49997	49997	49998	49998	49998	49998

SLUČAJNE SPREMENLJIVKE

Če je neka količina odvisna od slučaja govorimo o *slučajnih spremenljivkah*. Pri slučajnih spremenljivkah moramo poznati dvoje:

- zalogo vrednosti,
- predpis, ki določa verjetnosti za njihove vrednosti. Ta se imenuje *porazdelitveni zakon slučajne spremenljivke*.

Definicija: *Slučajna spremenljivka je količina, ki ima svojo vrednost odvisno od slučaja in je natanko določena s svojo zalogo vrednosti ter svojim porazdelitvenim zakonom.*

Slučajne spremenljivke označujemo X, Y, Z,...
vrednosti slučajnih spremenljivk pa označujemo x, y, z,...

Dogodek, da slučajna spremenljivka zavzame vrednosti iz svoje zaloge, označujemo $(X = x)$ ali $(X < x)$ ali $(x_1 < X < x_2)$ ali $(X \geq x)$ ipd.

Slučajne spremenljivke delimo na diskretne in nediskretne slučajne spremenljivke. Med nediskretnimi slučajnimi spremenljivkami so zlasti pomemben *zvezno porazdeljene* slučajne spremenljivke

***DISKRETNE* SLUČAJNE SPREMENLJIVKE**

Diskretne slučajne spremenljivke so tiste, katerih zaloga vrednosti je neko končno ali neskončno zaporedje.

.

Za ***diskretne slučajne spremenljivke*** podamo splošno obliko porazdelitvenega zakona z **verjetnostno funkcijo p_k.**

$$\boxed{p_k = P(X = x_k)}$$

Splošna oblika porazdelitvenega zakona se imenuje ***porazdelitvena funkcija F(x)***

$$\boxed{F(x) = P(X < x)}$$

F(x) ima naslednje lastnosti:

- je naraščajoča funkcija z vrednostmi med 0 in 1
- $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$
- če sta x_1 in x_2 realni števili in je $x_1 < x_2$, velja

$$\boxed{P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)}$$

Zveza med verjetnostno funkcijo $p_k = P(X = x_k)$in porazdelitveno funkcijo F(x):

$$\boxed{F(x) = \sum_{x_k < x} p_k}$$

Porazdelitvena funkcija F(x) narašča torej samo v *skokih*.

Ker tvorijo dogodki ($X = x_k$) popolni sistem dogodkov, velja, da je vsota vseh skokov enaka 1:

$$\boxed{\sum_k p_k = 1}$$

Podatke o diskretni slučajni spremenljivki običajno zapišemo v obliki ***verjetnostne sheme:***

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdot & \cdot \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Primer 1: Iz serije 5 izdelkov, kjer je v povprečju 10% izdelkov slabih, smo na slepo izbrali pet izdelkov in preverjali njihovo kvaliteto. Naj bo slučajna spremenljivka X število slabih izdelkov. Zapišemo njeno verjetnostno shemo.

Slučajna spremenljivka X lahko doseže 6 vrednosti:
$x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2,\ x_4 = 3,\ x_5 = 4,\ x_6 = 5.$

Verjetnosti izračunamo po Bernoullijevi formuli $\boxed{p_m = P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}}$
za n=5, p=0.1, q=0.9, m=0,1,2,3,4,5

Rezultate zapišemo v verjetnostno shemo

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0.59049 & 0.32805 & 0.0729 & 0.0081 & 0.00045 & 0.00001 \end{pmatrix}$$

Kadar ima diskretna slučajna spremenljivka X vrednosti 0,1,2,....,n in se verjetnosti računajo po Bernoullijevi formuli (gre za zaporedje neodvisnih poskusov), pravimo, da je slučajna spremenljivka **porazdeljena BINOMSKO in označimo b(n, p), saj je le-ta z n in p natanko določena.**

Kadar ima diskretna slučajna spremenljivka X vrednosti 0,1,2,....,n,....... in se verjetnosti računajo po Poissonovi formuli

$$\boxed{P_n(m) = \frac{(np)^m e^{-np}}{m!}}$$

(gre za zaporedje neodvisnih poskusov, kjer je p majhen), pravimo, da je slučajna spremenljivka **porazdeljena po Poissonovem zakonu.**

Primer 2: Naj bo slučajna spremenljivka X prirejena zadetku pri loteriji, ki ima 1000 srečk. Dobitki pa so: 1 za 100de, 3 za 50de in 10 za 10de.

Zapišimo verjetnostno shemo te spremenljivke:

$$X : \begin{pmatrix} 100 & 50 & 10 & 0 \\ 0.001 & 0.003 & 0.010 & 0.986 \end{pmatrix}$$

ŠTEVILSKE KARAKTERISTIKE SLUČAJNE SPREMENLJIVKE

Porazdelitev slučajnih spremenljivk so pogosto preširok pojem za konkretno uporabo, zato želimo iz porazdelitvenega zakona najti le nekatere osnovne značilnosti, ki jih bomo ocenili z nekim številom. Od tod sledi ime za te značilnosti – *številske karakteristike*. V nadaljevanju bomo omenili nekatere od njih.

1. Matematično upanje E(X) ali povprečna vrednost

Za diskretno slučajno spremenljivko, dano z verjetnostno shemo

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdot & \cdot & x_n \\ p_1 & p_2 & \cdot & \cdot & p_n \end{pmatrix}$$

je ***matematično upanje* (ali *povprečna vrednost*)** določeno z izrazom:

$$\boxed{E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i}$$

Primer: Pri streljanju v tarčo zadene strelec v center tarče z verjetnostjo 0,1; dva cm od centra z verjetnostjo 0,3; štiri cm od centra z verjetnostjo 0,3; šest cm od centra z verjetnostjo 0,2 in osem cm od centra z verjetnostjo 0,1. Slučajna spremenljivka X, ki zavzame te vrednosti, je torej podana z verjetnostno shemo:

$$X:\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}$$

Izračunaj njeno matematično upanje in rezultat komentirajmo.

<u>Rešitev:</u> Po definiciji matematičnega upanja je

$$E(X)=\sum_{i=1}^{5}x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4 + x_5 p_5 = 0\cdot 0{,}1 + 2\cdot 0{,}3 + 4\cdot 0{,}3 + 6\cdot 0{,}2 + 8\cdot 0{,}1 = 3{,}8$$

Rezultat pomeni, da bo strelec v *povprečju* (zato ime povprečna vrednost) pričakoval zadetek, ki bo 3,8 cm oddaljen od centra.

Izraz *matematično upanje* pa izvira od iger na srečo. Če bi bili posamezni rezultati, ki so pri tem poskusu (streljanje v tarčo) možni, ovrednoteni z denarnim dobitkom, bi povprečna vrednost $E(X)$ strelcu kazala, koliko je vredno njegovo *upanje* na dobitek, ki bi ga osvojil z enim strelom.

Izračunajmo še matematično upanje za **<u>BINOMSKO</u>** porazdeljeno slučajno spremenljivko. Za b(n,p) namreč velja: $\boxed{E(X) = np}$

Opomba: $\boxed{\text{Tudi pri Poissonovi porazdelitvi je } E(X)=np}$

Vzemimo spet primer, ki ga že poznamo. Iz serije 5 izdelkov, kjer je v povprečju 10% izdelkov slabih, smo na slepo izbrali pet izdelkov in preverjali njihovo kvaliteto. Naj bo slučajna spremenljivka X število slabih izdelkov. Slučajna spremenljivka X lahko doseže vrednosti: 0,1,2,3,4 in 5 z verjetnostmi izračunanimi po Bernoullijevi formuli $\boxed{p_m = P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}}$
za n=5, p=0.1, q=0.9, m=0,1,2,3,4,5 in verjetnostno shemo

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0.59049 & 0.32805 & 0.0729 & 0.0081 & 0.00045 & 0.00001 \end{pmatrix}.$$

E(X) = 0. 0.59049 + 1. 0.32805 + 2. 0.0729 + 3. 0.0081 + 4. 0.00045 + 5. 0.00001 = 0.5,

kar je res n.p = 5. 0.1 = 0.5

2. Varianca D(X) ali disperzija

Disperzija ali varianca slučajne spremenljivke X je definirana kot povprečna vrednost kvadriranih odklonov slučajne spremenljivke od njene povprečne vrednosti. Z disperzijo merimo razpršenost slučajne spremenljivke okoli njenega povprečja. Razlika med nekaterimi vrednostmi slučajne spremenljivke povprečno vrednostjo (matematičnim upanjem) je lahko tudi negativna, zato te razlike kvadriramo, tako da imamo opravka le s pozitivnimi vrednostmi.

Do disperzije torej pridemo tako, da za slučajno spremenljivko, dano z verjetnostno shemo

$$X:\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdot & \cdot & x_n \\ p_1 & p_2 & \cdot & \cdot & p_n \end{pmatrix}$$

izračunamo matematično upanje E(X) ter nato zapišemo novo slučajno spremenljivko $(X - E(X))^2$:

$$(X-E(X))^2:\begin{pmatrix} (x_1-E(X))^2 & (x_2-E(X))^2 & \cdot & \cdot & (x_n-E(X))^2 \\ p_1 & p_2 & \cdot & \cdot & p_n \end{pmatrix}$$

Matematično upanje te slučajne spremenljivke je ***disperzija* ali *varianca***:

$$D(X) = E\left[(X - E(X))^2\right]$$

Ta izraz je splošna definicija disperzije za poljubno slučajno spremenljivko. Če izraz kvadriramo in preoblikujemo, varianco izračunamo kot:

$$\boxed{D(X) = E(X^2) - E^2(X)}$$

Primer: Diskretna slučajna spremenljivka X je podana z verjetnostno shemo

$$X:\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0{,}1 & \lambda & 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}$$

Določimo:

a) število λ,
b) matematično upanje slučajne spremenljivke,
c) disperzijo slučajne spremenljivke.

Rešitev:

a) Ker je $\sum_{i=1}^{5} p_i = 1 \Rightarrow 0{,}1 + \lambda + 0{,}4 + 0{,}2 + 0{,}1 + 1 \;\; \Rightarrow \lambda = 0{,}2$
b) $E(X)$ = (-2) · 0,1 + (-1) · 0,2 + 0 · 0,4 + 1 · 0,2 + 3 · 0,1 = 0,1
c) Disperzijo lahko izračunamo na dva načina

1. Slučajna spremenljivka $[X\text{-}E(X)]^2$ bo zaradi $E(X)$ = 0,1 imela naslednjo verjetnostno shemo:

$$[X-E(X)]^2 : \begin{pmatrix} (-2-0{,}1)^2 & (-1-0{,}1)^2 & (0-0{,}1)^2 & (1-0{,}1)^2 & (3-0{,}1)^2 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}$$

Od tod dobimo

$$D(X) = E[(X-E(X))]^2 = 4{,}41\cdot 0{,}1 + 1{,}21\cdot 0{,}2 + 0{,}01\cdot 0{,}4 + 0{,}81\cdot 0{,}2 + 8{,}41\cdot 0{,}1 = 1{,}69$$

2. Izračunajmo disperzijo še po formuli: $\boxed{D(X) = E(X^2) - E^2(X)}$

Porazdelitvena shema slučajne spremenljivke X^2 je

$$X^2 : \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 & 9 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}$$

Njeno matematično upanje dobimo kot

$E(X^2) = 4 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}2 + 0 \cdot 0{,}4 + 1 \cdot 0{,}2 + 9 \cdot 0{,}1 = 1{,}7$

Od tod:

$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 1{,}7 - 0{,}1^2 = 1{,}69$

Izračunajmo še varianco D(X) za **BINOMSKO** porazdeljeno slučajno spremenljivko. Za b(n,p) namreč velja: $\boxed{D(X) = n.p.q}$

Opomba: $\boxed{\text{Pri Poissonovi porazdelitvi pa je } D(X)=np}$

Vzemimo spet primer, ki ga že poznamo. Iz serije 5 izdelkov, kjer je v povprečju 10% izdelkov slabih, smo na slepo izbrali pet izdelkov in preverjali njihovo kvaliteto. Naj bo slučajna spremenljivka X število slabih izdelkov. Slučajna spremenljivka X lahko doseže vrednosti: 0,1,2,3,4 in 5 z verjetnostmi izračunanimi po Bernoullijevi formuli $\boxed{p_m = P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}}$ za n=5, p=0.1, q=0.9, m=0,1,2,3,4,5 in verjetnostno shemo

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0.59049 & 0.32805 & 0.0729 & 0.0081 & 0.00045 & 0.00001 \end{pmatrix}.$$

Porazdelitvena shema slučajne spremenljivke X^2 je

$$X^2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \\ 0.59049 & 0.32805 & 0.0729 & 0.0081 & 0.00045 & 0.00001 \end{pmatrix}$$

Njeno matematično upanje dobimo kot
$E(X^2) = 0.\ 0{,}59049+1.\ 0{,}32805+4.\ 0{,}0729+9.\ 0{,}0081+16.\ 0{,}00045+25.\ 0{,}00001$
$=0{,}7$

Od tod:

$$D(X) = E(X^2) – (E(X))^2 = 0{,}7 – 0{,}5^2 = 0{,}45$$

kar je res n.p.q$= 5.\ 0{,}1.\ 0{,}9 = 0{,}45$

3. Standardna deviacija $\sigma(X)$

Ker je disperzija številska karakteristika, ki jo računamo iz *kvadriranih* odklonov od povprečja, lahko dobijo veliki odkloni prevelik vpliv. Da bi ta vpliv vsaj delno razvrednotili, vzamemo za novo mero razpršenosti slučajne spremenljivke pozitivni kvadratni koren iz disperzije. Tej meri pravimo ***standardna deviacija* (*odklon*),** ki jo označimo $\sigma(X)$ ali σ_x. Velja torej:

$$\boxed{\sigma(X)=\sigma_x=+\sqrt{D(X)}}$$

Primer: Za diskretno slučajno spremenljivko X, podano z verjetnostno shemo

$$X:\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}$$

smo v prejšnjem primeru izračunali disperzijo D(X) = 1,69.

Njena standardna deviacija je: $\sigma(X)=\sqrt{1{,}69}=1{,}3$

ZVEZNE **SLUČAJNE SPREMENLJIVKE**

Slučajne spremenljivke, katerih zalogo vrednosti ne moremo numerirati z naravnimi števili in zavzamejo vse vrednosti iz množice realnih števil ali nekega intervala, so zvezne slučajne spremenljivke

.

Zvezne slučajne spremenljivke podamo z **gostoto verjetnosti p(x),** ki je zvezna funkcija: $p(x) = P(X=x)$.

Tu bomo obravnavali le eno zvezno porazdelitev, in sicer normalno ali Gaussovo porazdelitev.

NORMALNA PORAZDELITEV

Normalna porazdelitev je podana z gostoto verjetnosti:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$$

E(X) = μ;   D(X) = σ;

Normalno porazdelitev zapišemo kot **X: N(μ, σ)**

Slučajna spremenljivka Z je porazdeljena **standardizirano normalno,** ***če je μ=0 in σ=1, torej Z: N(0,1).***

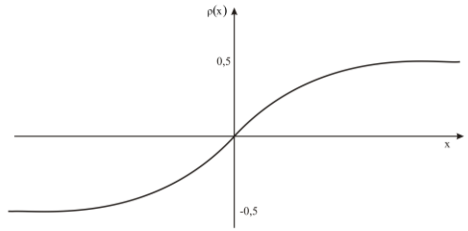
Če je slučajna spremenljivka X porazdeljena normalno z matematičnim upanjem μ in standardnim odklonom σ, X: $N(\mu, \sigma)$, je verjetnost, da je vrednost slučajne spremenljivke X na intervalu (a, b), izračunana po obrazcu:

$$\boxed{P(a \le X < b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)}.$$

kjer je

$$\phi(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$$

$\Rightarrow$ TABELA



$$\phi(-x) = -\phi(x)$$

$\Rightarrow$ liha funkcija

$$\phi(x > 4) = 0{,}5$$

TABELA II: Vrednosti funkcije $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.00000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0.1	0.03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0.2	0.07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0.3	0.11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0.4	0.15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0.5	0.19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0.6	0.22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0.7	0.25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0.8	0.28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0.9	0.31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1.0	0.34134	34375	34614	34849	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1.1	0.36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1.2	0.38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1.3	0.40320	40490	40658	40824	40988	41149	41309	41466	41621	41774
1.4	0.41924	42073	42220	42364	42507	42647	42785	42922	43056	43189
1.5	0.43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1.6	0.44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1.7	0.45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1.8	0.46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1.9	0.47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2.0	0.47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2.1	0.48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2.2	0.48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2.3	0.48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2.4	0.49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2.5	0.49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2.6	0.49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2.7	0.49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2.8	0.49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2.9	0.49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861
3.0	0.49865	49869	49874	49878	49882	49886	49889	49893	49896	49900
3.1	0.49903	49906	49910	49913	49916	49918	49921	49924	49926	49929
3.2	0.49931	49934	49936	49938	49940	49942	49944	49946	49948	49950
3.3	0.49952	49953	49955	49957	49958	49960	49961	49962	49964	49965
3.4	0.49966	49968	49969	49970	49971	49972	49973	49974	49975	49976
3.5	0.49977	49978	49978	49979	49980	49981	49981	49982	49983	49983
3.6	0.49984	49985	49985	49986	49986	49987	49987	49988	49988	49989
3.7	0.49989	49990	49990	49990	49991	49991	49992	49992	49992	49992
3.8	0.49993	49993	49993	49994	49994	49994	49994	49995	49995	49995
3.9	0.49995	49995	49996	49996	49996	49996	49996	49996	49997	49997
4.0	0.49997	49997	49997	49997	49997	49997	49998	49998	49998	49998

PRIMER 1: Slučajna spremenljivka Z se porazdeljuje standardizirano normalno. Izračunajmo:

a) $P(0 \leq Z < 1)$, $P(0 \leq Z < 1{,}2)$, $P(0 \leq Z < 2{,}36)$

b) $P(-2 \leq Z < 0)$, $P(-1{,}53 \leq Z < 0)$, $P(-0{,}58 \leq Z < 0)$

c) $P(1 \leq Z < 2)$, $P(0{,}24 \leq Z < 1{,}12)$, $P(-1{,}55 \leq Z < -0{,}5)$

d) $P(-1{,}2 \leq Z < 0{,}5)$, $P(-0{,}25 \leq Z < 2{,}15)$, $P(-2{,}51 \leq Z < 0{,}18)$

e) $P(Z \geq 1{,}42)$, $P(Z \geq 0{,}12)$, $P(Z \leq -3{,}02)$

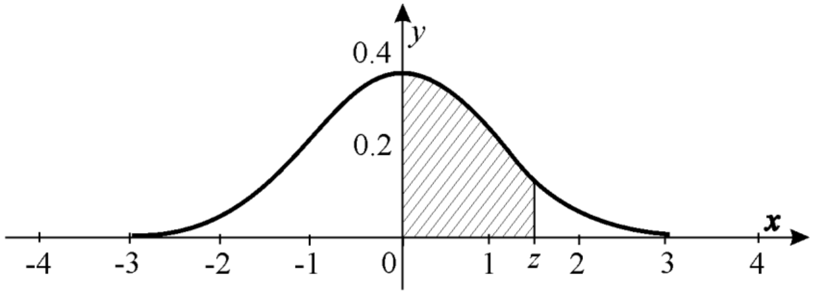
f) $P(Z \geq -1{,}35)$, $P(Z \geq -0{,}42)$, $P(Z \leq 2{,}13)$

Rešitev:

$\mu = E(Z) = 0$ in standardni odklon $\sigma = 1$.

Verjetnost $P(0 \leq Z < z)$ izračunamo s pomočjo zgornje formule in funkcije Φ, ki je tabelirana v zgornji tabeli. Velja namreč:

$P(0 \leq Z < z) = \Phi(z) - \Phi(0) = \Phi(z)$. Vrednost $\Phi(z)$ je na spodnji sliki prikazana z osenčenim poljem.



a) $P(0 \leq Z < 1) = \Phi(1) = 0{,}3413$, $P(0 \leq Z < 1{,}2) = \Phi(1{,}2) = 0{,}3849$,
$P(0 \leq Z < 2{,}36) = \Phi(2{,}36) = 0{,}4909$;

b) $P(-2 \leq Z < 0) = \Phi(0) - \Phi(-2) = 0 + \Phi(2) = 0{,}4772$,
$P(-1{,}53 \leq Z < 0) = \Phi(0) - \Phi(-1{,}53) = 0{,}4370$,
$P(-0{,}58 \leq Z < 0) = \Phi(0) - \Phi(-0{,}58) = 0{,}2190$;

c) $P(1 \leq Z < 2) = \Phi(2) - \Phi(1) = 0{,}1359$,
$P(0{,}24 \leq Z < 1{,}12) = \Phi(1{,}12) - \Phi(0{,}24) = 0{,}2738$,
$P(-1{,}55 \leq Z < -0{,}5) = \Phi(0{,}5) - \Phi(-1{,}55) = -\Phi(0{,}5) + \Phi(1{,}55) = 0{,}2479$;

d) $P(-1{,}2 \leq Z < 0{,}5) = \Phi(0{,}5) - \Phi(-1{,}2) = \Phi(0{,}5) + \Phi(1{,}2) = 0{,}5764$,
$P(-0{,}25 \leq Z < 2{,}15) = \Phi(2{,}15) - \Phi(-0{,}25) = \Phi(2{,}15) + \Phi(0{,}25) = 0{,}5829$,
$P(-2{,}51 \leq Z < 0{,}18) = \Phi(0{,}18) - \Phi(-2{,}51) = \Phi(0{,}18) + \Phi(2{,}51) = 0{,}5654$;

e) $P(Z \geq 1{,}42) = P(1{,}42 \leq Z < \infty) = \Phi(\infty) - \Phi(1{,}42) = 0{,}0778$,

$P(Z \geq 0,12) = P(0,12 \leq Z < \infty) = \Phi(\infty) - \Phi(0,12) = 0,4522,$
$P(Z \leq -3,02) = P(-\infty < Z \leq -3,02) = \Phi(-3,02) - \Phi(-\infty) = 0,0013;$

f) $P(Z \geq -1,35) = P(-1,35 \leq Z < \infty) = \Phi(\infty) - \Phi(-1,35) = 0,9115,$
$P(Z \geq -0,42) = P(-0,42 \leq Z < \infty) = \Phi(\infty) + \Phi(0,42) = 0,6628,$
$P(Z \leq 2,13) = P(-\infty < Z < 2,13) = \Phi(2,13) + \Phi(\infty) = 0,9834.$

Primer 2:

Slučajna spremenljivka X je porazdeljena po zakonu $N(3,\ 0,7)$. Izračunajmo verjetnosti:

a) $P(3 \leq X < 3,5)$, $P(3 \leq X < 4,2)$, $P(2 \leq X < 3)$
b) $P(3,2 \leq X < 4)$, $P(3,6 \leq X < 4,1)$, $P(1 \leq X < 2,2)$
c) $P(2 \leq X < 3,5)$, $P(1,5 \leq X < 3,2)$, $P(2,5 \leq X < 3,5)$
d) $P(X \geq 4)$, $P(X \geq 5)$, $P(X < 1,8)$
e) $P(X \leq 4,5)$, $P(X \leq 3,8)$, $P(X \geq 1,2)$

Rešitev:

a) $P(3 \leq X < 3{,}5) = \Phi\left(\frac{3{,}5-3}{0{,}7}\right) - \Phi\left(\frac{3-3}{0{,}7}\right) = \Phi(0{,}71) - \Phi(0) = 0{,}2611$,

$P(3 \leq X < 4{,}2) = 0{,}4564$, $P(2 \leq X < 3) = 0{,}4236$;

b) $P(3{,}2 \leq X < 4)$ 0,3095, $P(3{,}6 \leq X < 4{,}1) = 0{,}1367$, $P(1 \leq X < 2{,}2) = 0{,}1250$

c) $P(2 \leq X < 3{,}5)$ =0,6847, $P(1{,}5 \leq X < 3{,}2) = 0{,}5979$, $P(2{,}5 \leq X < 3{,}5) =$ 0,5222

d) $P(X \geq 4) = P(4 \leq X < \infty) = 0{,}0764$, $P(X \geq 5) = 0{,}0022$, $P(X < 1{,}8) = 0{,}0436$

e) $P(X \leq 4{,}5) = 0{,}9838$, $P(X \leq 3{,}8) = 0{,}8729$, $P(X \geq 1{,}2) = 0{,}9949$

OSNOVE TEORIJE ODLOČANAJA

STRUKTURA IN PRIMER ODLOČITVENEGA MODELA

ODLOČITVENI MODEL SESTAVLJA 5 ELEMENTOV:

(1) SEZNAM UKREPOV (ODLOČITEV, ALTERNATIV), LAHKO JE VEČ FAZ (STOPENJ, KORAKOV)

(2) SEZNAM RAZMER (STANJ), KI SLEDIJO IZBRANIM ALTERNATIVAM, IZ TOČKE (1),

(3) VERJETNOSTI, S KATERIMI SE POJAVIJO POSAMEZNA STANJA, PODANA V TOČKI (2), PROBLEM JE TUDI DOLOČITI TE VERJETNOSTI, PRI ČEMER POMAGA STATISTIKA

(4) VREDNOSTI POSLEDIC (REZULTATI), KI JIH POVZROČI IZBRANA ALTERNATIVA V NASTALEM STANJU. OCENA POSLEDIC JE ZOPET PROBLEM ZASE. NAVADNO UPORABLJAMO EKONOMSKA MERILA - RAČUNOVODSTVO.

(5) METODA ZA IZBIRO OPTIMALNIH ALTERNATIV GLEDE NA VREDNOSTI POSLEDIC, DOLOČENIH V TOČKI (4). TE BOMO ŠTUDIRALI TU.

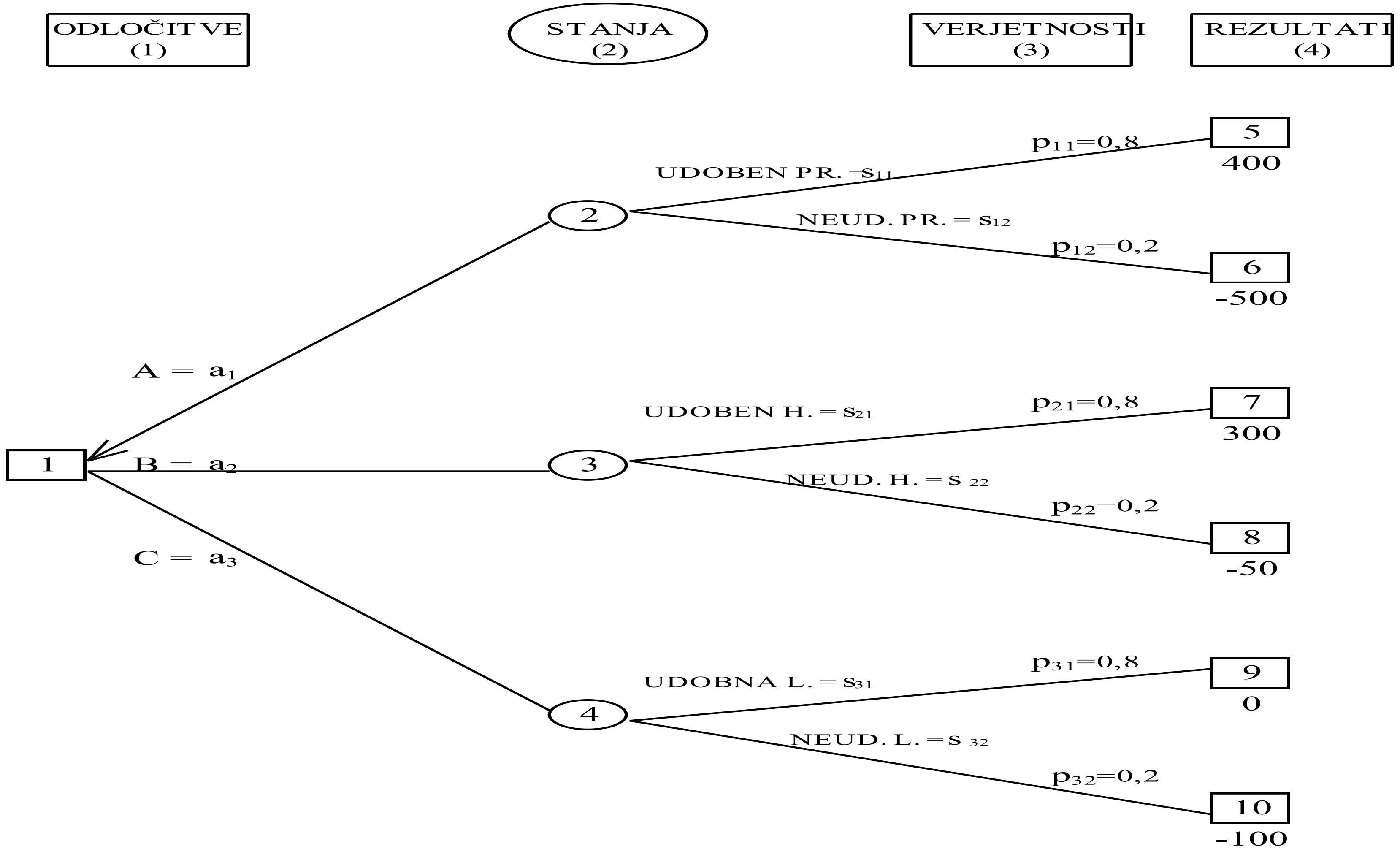
PRIMER “POČITNICE”:

TURISTIČNO PODJETJE, KI ŽELI RAZŠIRITI PONUDBO. S KATERIM PROGRAMOM NAJ JO RAZŠIRI?

Tabela: Odločitveni model za primer počitnic

(1) Odločitve	(2) Stanja	(3) Verjetnosti	(4) Posledice
potovanje (A)	udoben prevoz	0.8	400
	neudoben prevoz.	0.2	-500
morje (B)	udoben hotel	0.8	300
	neudoben hotel	0.2	-50
križarjenje (C)	udobna ladja	0.8	0
	neudobna ladja	0.2	-100

ODLOČITVENO DREVO - GRAFIČNI PRIKAZ PROBLEMA ODLOČANJA



ODLOČANJE V RAZMERAH NEGOTOVOSTI (HEVRISTIČNO ODLOČANJE)

Osnovni model teorije odločanja

Verjetnosti	p_1	...	p_n
Stanja / Odločitve	s_1	...	s_n
a_1	u_{11}	...	u_{1n}
....	......	...	.....
a_m	u_{m1}	...	u_{mn}

PRIMER:

Odločitveni problem računalniškega podjetja

Stanje / Odločitev	s_1	s_2
a_1	200.000	-20.000
a_2	150.000	20.000
a_3	100.000	60.000

1. MINIMAX PRAVILO,

$$\mathbf{a_i \geq a_j \rightarrow \min_k u_{ik} \geq \min_k u_{jk}.}$$

$\min\limits_k u_{1K} = -20.000$, $\min\limits_k u_{2K} = 20.000$, $\min\limits_k u_{3K} = 60.000$,

KER JE 60.000 > 20.000 > -20.000, JE $a_3 > a_2 > a_1$.

DA JE MINIMAX PRAVILO RES PESIMISTIČNO, POKAŽEMO NA NASLEDNJEM PRIMERU:

	s_1	s_2	s_3	...	s_n
a_1	0.99	1000	1000	...	1000
a_2	1	1	1	...	1

$$\min_k u_{1k} = 0.99, \quad \min_k u_{2k} = 1 \ \text{ in } \ a_2 > a_{1,} \ \text{ ker je } \ 1 > 0.99.$$

2. MAXIMAX PRAVILO:

$$\mathbf{a_i \geq a_j \rightarrow \max_k u_{ik} \geq \max_k u_{jk}.}$$

$\max\limits_k u_{1K} = 200.000$, $\max\limits_k u_{2K} =150.000$, $\max\limits_k u_{3K} = 100.000$.

KER JE 200.000 > 150.000 > 60.000, JE $a_1 > a_2 > a_3$.

3. HURWITCZOV PRINCIP,

$$\mathbf{H(a_i) = \alpha \ \max_k u_{ik} + (1 - \alpha) \ \min_k u_{ik}}$$

in

$$\mathbf{a_i \geq a_j \rightarrow \alpha \max_k u_{ik} + (1-\alpha) \min_k u_{ik} \geq \alpha \max_k u_{jk} + (1-\alpha) \min_k u_{jk}}$$

$0 \leq \alpha \leq 1$. α IMENUJEMO PARAMETER OPTIMIZMA, KER ČE JE $\alpha = 0$, IMAMO MINIMAX PRAVILO, IN ČE JE $\alpha = 1$, PA MAXIMAX PRAVILO. ČIM VEČJI JE α, TEM VEČJI JE OPTIMIZEM TISTEGA, KI SPREJEMA ODLOČITVE.

RAČUNALNIŠKO PODJETJE BO SPREJELO ODLOČITEV a_3, ČE SE BO ODLOČALO NA OSNOVI HURWITCZOVEGA PRAVILA ZA $\alpha = 0.4$, SAJ SO LINEARNE KOMBINACIJE REZULTATOV $H(a_i)$ PRI POSAMEZNIH ALTERNATIVAH a_i NASLEDNJE:

$H(a_1) = (0.4) \,.\, 200.000 + (0.6) \,.\, (-20.000) = 68.000$

$H(a_2) = (0.4) \,.\, 150.000 + (0.6) \,.\, 20.000 = 72.000$

$H(a_3) = (0.4) \,.\, 100.000 + (0.6) \,.\, 60.000 = 76.000$

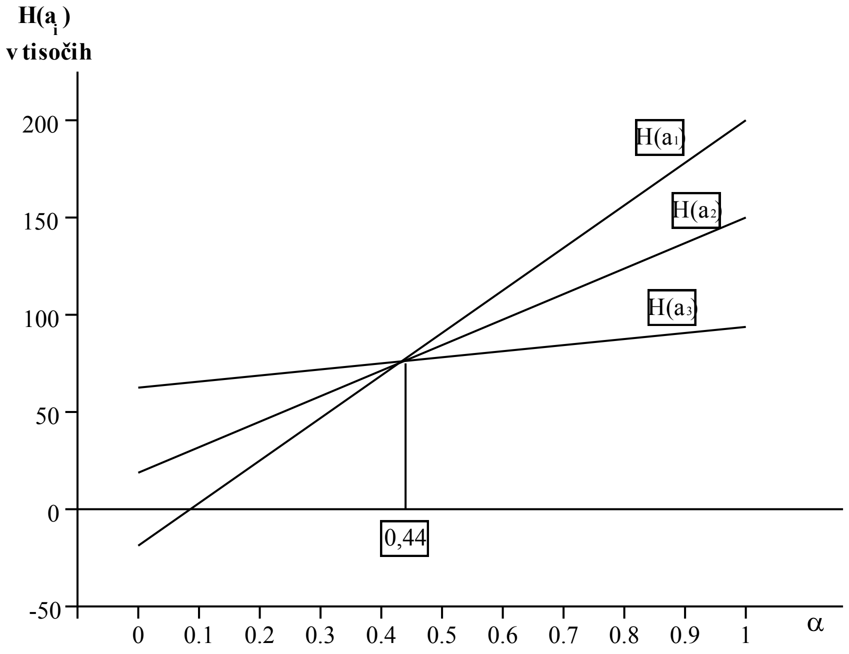
KER JE $76.000 > 72.000 > 68.000$, JE $a_3 > a_2 > a_1$.

KER JE OPTIMALNA ALTERNATIVA, KI JO DOLOČIMO S POMOČJO HURWICZOVEGA PRINCIPA, ODVISNA OD PARAMETRA α, SI POGLEJMO, KAKO SE OPTIMALNA ALTERNATIVA SPREMINJA V ODVISNOSTI OD α:

$H(a_1) = \alpha\ 200.000 + (1 - \alpha)\ (-20.000) = -\ 20.000 + 220.000\ \alpha$

$H(a_2) = \alpha\ 150.000 + (1 - \alpha)\ 20.000 = 20.000 + 130.000\ \alpha$

$H(a_3) = \alpha\ 100.000 + (1 - \alpha)\ 60.000 = 60.000 + 40.000\ \alpha.$



REZULTATI POSAMEZNIH ALTERNATIV V ODVISNOSTI OD α

4. LAPLACEOVO PRAVILO,

$$a_I \geq a_J \rightarrow \sum_k u_{ik} \geq \sum_k u_{jk}$$

ZA RAČUNALNIŠKO PODJETJE JE:

$\sum_k u_{1k} = 180.000$, $\sum_k u_{2k} = 170.000$, $\sum_k u_{3k} = 160.000$

KER JE 180.000 > 170.000 > 160.000, JE $a_1 > a_2 > a_3$.

5. BAYESOVO PRAVILO ENAKIH VERJETNOSTI,

$$a_I \geq a_J \rightarrow \sum_k u_{ik} p_k \geq \sum_k u_{jk} p_k$$

LE REDKO JE MOGOČE PREDPOSTAVITI, DA SO VERJETNOSTI ZA NASTOP VSEH STANJ ENAKE.

ZA RAČUNALNIŠKO PODJETJE, KJER IMAMO DVE STANJI IN JE $p_1 = p_2 = 0.5$, VELJA:

$\sum_k u_{1k} p_k = 90.000$, $\sum_k u_{2k} p_k = 85.000$, $\sum_k u_{3k} p_k = 80.000$

KER JE 90.000 > 85.000 > 80.000, JE $a_1 > a_2 > a_3$.

6. MINIMAX PRAVILO PRILOŽNOSTNIH IZGUB,

$$\mathbf{a_I \geq a_J \rightarrow \max_k pr_{ik} \leq \max_k pr_{jk}}$$

PRILOŽNOSTNE IZGUBE RAČUNALNIŠKEGA PODJETJA

	s_1	s_2
a_1	0	80.000
a_2	50.000	40.000
a_3	100.000	0

V PRIMERU RAČUNALNIŠKEGA PODJETJA JE:

$\max\limits_k pr_{1K} = 80.000$, $\max\limits_k pr_{2K} = 50.000$, $\max\limits_k pr_{3K} = 100.000$.

KER JE 100.000 > 80.000 > 50.000, JE $a_2 > a_1 > a_3$.

SPREJEMANJE OPTIMALNIH ODLOČITEV S TVEGANJEM (STOHASTIČNO ODLOČANJE)

BAYESOVO PRAVILO ALI PRAVILO SREDNJE VREDNOSTI:

$$a_I \geq a_J \rightarrow \sum_k u_{ik} p_k \geq \sum_k u_{jk} p_k$$

POZNATI MORAMO VERJETNOSTI p_K ZA NASTOP STANJ s_K .

ZA RAČUNALNIŠKO PODJETJE (S TVEGANJEM)

	0.3	0.7
	s_1	s_2
a_1	200.000	-20.000
a_2	150.000	20.000
a_3	100.000	60.000

$\sum_k u_{1k} p_k = 46.000$, $\sum_k u_{2k} p_k = 59.000$, $\sum_k u_{3k} p_k = 72.000$

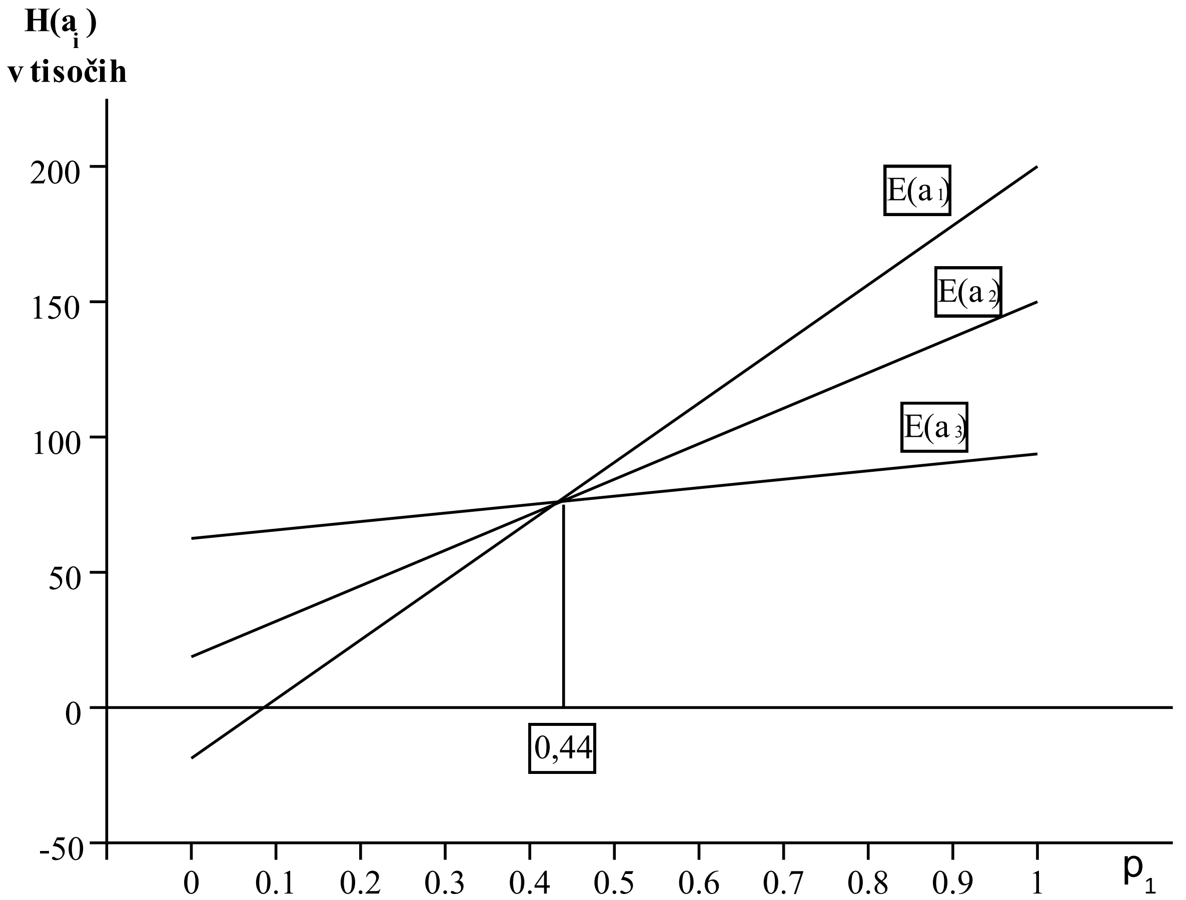
KER JE 72.000 > 59.000 > 46.000, JE $a_3 > a_2 > a_1$.

BAYESOVO PRAVILO TEMELJI NA VERJETNOSTIH p_K V PRIMERU RAČUNALNIŠKEGA PODJETJA JE $p_2 = 1 - p_1$

$E(a_1) = 200.000\, p_1 + (-20.000)\,(1 - p_1) = 220.000\, p_1 - 20.000$

$E(a_2) = 150.000\, p_1 + 20.000\,(1 - p_1) = 130.000\, p_1 + 20.000$

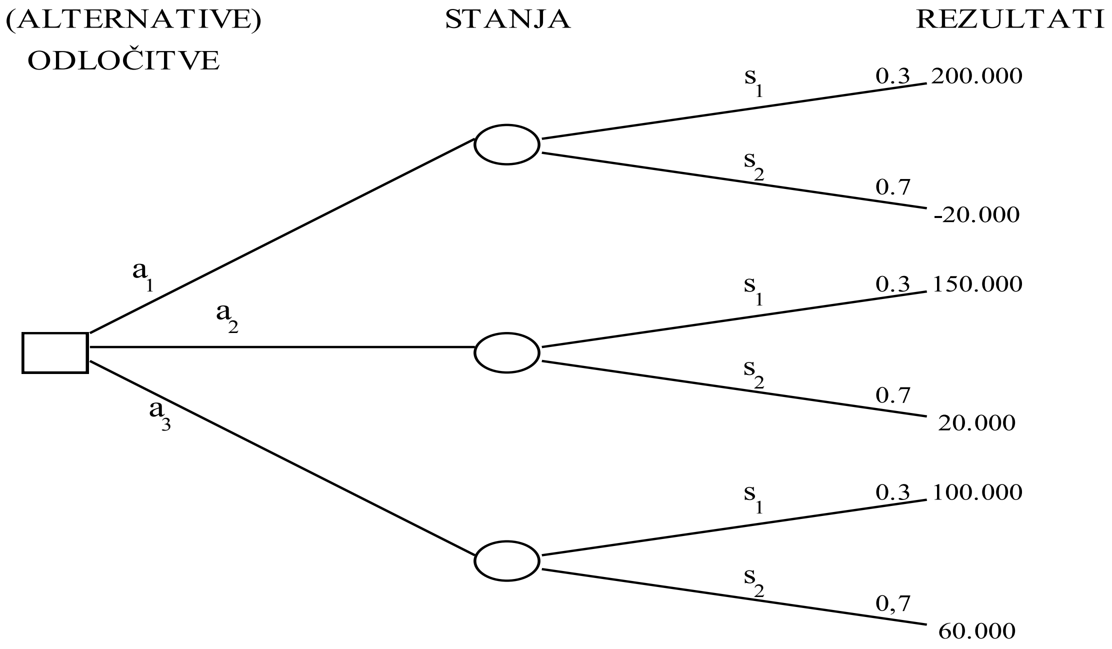
$E(a_3) = 100.000\, p_1 + 60.000\,(1 - p_1) = 40.000\, p_1 + 60.000$


H(a i)
v tisočih
200
150
100
50
0
-50
E(a 1)
E(a 2)
E(a 3)
0,44
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
p 1

Apriorna analiza

VSA TEORIJA O APRIORNI ANALIZI SPREJEMANJA POSLOVNIH ODLOČITEV JE VSEBOVANA V BAYESOVEM PRAVILU.

V PRIMERU RAČUNALNIŠKEGA PODJETJA JE $p_1 = 0.3$ IN $p_2 = 0.7$. TE VERJETNOSTI IMENUJEMO APRIORNE VERJETNOSTI IN ZATO IMENUJEMO ANALIZO, KI JO IZVEDEMO Z NAMENOM, DA BI DOLOČILI OPTIMALNE ALTERNATIVE, APRIORNO ANALIZO.



$E(a_i) = \sum_k u_{ik} p_k$.

: $E(a_1) = 46.000$

$E(a_2) = 59.000$

$E(a_3) = 72.000$.

PO APRIORNI ANALIZI PRIČAKOVANIH REZULTATOV JE TOREJ ZA RAČUNALNIŠKO PODJETJE OPTIMALNA ALTERNATIVA a_3, KI ZAGOTAVLJA PRIČAKOVANI REZULTAT 72.000 DE.

VREDNOST POPOLNE INFORMACIJE:

ČE BI IMELI POPOLNO INFORMACIJO, BI SE V PRIMERU NASTOPA STANJA s_1 ODLOČILI ZA a_1 IN IMELI KORIST 200.000, V PRIMERU NASTOPA STANJA s_2 PA ZA a_3 IN IMELI KORIST 60.000. TAKO BI DOSEGLI POVPREČNO KORIST:

0,3 . 200000 + 0,7 . 60000 = 102 000.

Vrednost popolne informacije je v tem primeru: 102 000 – 72 000 = 30 000

APRIORNA ANALIZA Z RAČUNANJEM PRIČAKOVANIH PRILOŽNOSTNIH IZGUB:

$$\mathrm{Epr}(a_i) = \sum_k pr_{ik}\, p_k.$$

Priložnostne izgube za problem odločanja računalniškega podjetja

	0.3	0.7
	s_1	s_2
a_1	0	80.000
a_2	50.000	40.000
a_3	100.000	0

$\mathrm{Epr}(a_1) = 56000$

$\mathrm{Epr}(a_2) = 43000$

$\mathrm{Epr}(a_3) = 30000.$

Ker $30000 < 43000 < 56000$, je po apriorni analizi pričakovanih priložnostnih izgub, za računalniško podjetje optimalna alternativa a_3.