AGRONOMIJA + ZOOTEHNIKA + ŽIVILSTVO IN PREHRANA

1. letnik BSc

MATEMATIKA/MATEMATIČNE METODE
5. del

MATRIKE

- **Kaj bomo spoznali v tem poglavju:**

1. Pojem determinante, računanje determinant 2. in 3. reda. Lastnosti determinant in računanje vrednosti determinant višjih redov
2. Kaj je matrika
3. Posebne matrike (kvadratna, identična,….);
4. Računske operacije z matrikami (enakost, vsota, razlika, produkt)
5. Inverzno matriko
6. Rang matrike
7. Reševanje matričnih enačb

Determinante

Determinanta je kvadratna shema, ki predstavlja vrednost.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \det \boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Vrednost determinante dobimo:

a) za dvovrstne determinante oz. determinante drugega reda:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \quad a_{22} - \quad a_{21} \quad a_{12} \text{ ; } \textbf{Primer:} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} = 1\cdot 8 - 3\cdot(-2) = 14$$

b) za trivrstne determinante oz. determinante tretjega reda:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \quad a_{22} \quad a_{33} + \quad a_{12} \quad a_{23} \quad a_{31} + \quad a_{13} \quad a_{21} \quad a_{32} - \quad a_{13} \quad a_{22} \quad a_{31} - \quad a_{11} \quad a_{23} \quad a_{32} - \quad a_{12} \quad a_{21} \quad a_{33}$$

Pri računanju trivrstnih determinant si lahko pomagamo tako, da pripišemo dva stolpca (najprej prvega in poleg njega še drugega) ali dve vrstici (prvo vrstico in pod njo še drugo) in tvorimo produkte po shemi (Sarrusovo pravilo):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = \begin{matrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix} \end{matrix} =$$

$$= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33}.$$

c) Za determinante višjih redov preprostih pravil ni. Vrednosti le-teh računamo s pomočjo lastnosti determinant, poddeterminant in razvoja determinant po vrstici oziroma stolpcu.

Lastnosti determinant in računanje njihovih vrednosti

Naštejmo le tiste lastnosti determinant, ki jih nujno potrebujemo pri računanju vrednosti determinant višjega reda kot tri.

1. Determinanta se ne spremeni, če jo zavrtimo okoli glavne (leve) diagonale (vrstica postane stolpec in stolpec vrstica).
2. Če v determinanti zamenjamo dve sosedni vrstici (dva sosedna stolpca), se spremeni predznak determinante.
3. Če množimo vse elemente kake vrstice (stolpca) z istim faktorjem, je dobljena determinanta enaka prvotni determinanti, pomnoženi s tem faktorjem.
4. Determinanta z dvema identičnima ali proporcionalnima vrsticama (stolpcema) ali z eno vrstico (stolpcem) samih ničel je enaka nič.
5. Determinanta se ne spremeni, če kaki vrstici prištejemo vrstico, pomnoženo s poljubnim faktorjem, ali če kakemu stolpcu prištejemo stolpec, pomnožen s poljubnim faktorjem.
6. Če so vsi elementi, ki ležijo na eni strani glavne diagonale (običajno pod glavno diagonalo), enaki nič, pravimo, da smo determinanto diagonalizirali. Vrednost diagonalizirane determinante pa dobimo kot produkt diagonalnih elementov.

Primer računanja vrednosti determinante z diagonalizacijo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & -5 \\ 0 & 4 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 8 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{11}{3} \\ 0 & 0 & \frac{20}{3} & -\frac{22}{3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{11}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{vmatrix} = = 1\cdot 3\cdot(-\tfrac{4}{3})\cdot 11 = -44$$

Pri tem smo dobili pod glavno diagonalo same ničle v treh korakih. V prvem smo poiskali ničle pod diagonalo v prvem stolpcu, in sicer tako, da smo drugi in tretji vrstici prišteli (-2)-kratnik prve vrstice, četrti vrstici pa (-3)-kratnik prve vrstice. V drugem koraku smo najprej $(-\frac{4}{3})$-kratnik druge vrstice prišteli tretji in nato $(-\frac{1}{3})$-kratnik druge vrstice prišteli četrti vrstici. V tretjem koraku pa smo 5-kratnik tretje vrstice prišteli četrti vrstici. V skladu z lastnostjo 6 prejšnjega poglavja pa smo nato njeno vrednost dobili kot produkt elementov na diagonali.

Definicija in vrste matrik

Pravokotno shemo $m \cdot n$ števil, razporejenih v m vrstic in n stolpcev, imenujemo **matrika dimenzije (m,n)**. Števila v shemi imenujemo elemente matrike. Element a_{ij} leži na križišču i-te vrstice in j-tega stolpca.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Elementi a_{ij}, $j = 1, 2, \dots, n$ tvorijo i-to vrstico matrike,
Elementi a_{ij}, $i = 1, 2, \dots, m$ tvorijo j-ti stolpec.

Matriko $\boldsymbol{A}$ z elementi a_{ij}, $i = 1, 2, \dots, m$; in $j = 1, 2, \dots, n$ lahko krajše zapišemo

$$\boldsymbol{A} = [a_{ij}]_{m,n.}$$

Matrika, ki ima lahko le eno vrstico $[\, a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots,\ a_n \,]$

Matrika, ki ima lahko le en stolpec $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .. \\ .. \\ b_m \end{bmatrix}$

Transponirana matrika matrike *A* je matrika $\boldsymbol{A}^T$, ki jo dobimo tako, da v matriki ***A*** i-to vrstico pišemo kot i-ti stolpec in k-ti stolpec kot k-to vrstico (vrstica postane stopec in stolpec vrstica).

Če je $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ je $\boldsymbol{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ Velja: $(\boldsymbol{A}^T)^T = \boldsymbol{A}$

Kvadratna matrika je matrika, ki ima toliko vrstic kot stolpcev. Če ima n vrstic, je reda n. Elementi $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ tvorijo glavno diagonalo.

Trikotna matrika je kvadratna matrika, ki ima na eni strani glavne diagonale same ničle.

Diagonalna matrika je kvadratna matrika, ki ima od nič različne elemente samo na glavni diagonali.

Identična matrika ali matrična enota ali matrika enote I je diagonalna matrika, ki ima vse elemente na glavni diagonali enake 1.

Vsaki kvadratni matriki lahko priredimo njeno determinanto, tako da ima determinanta iste elemente kot matrika. Pišemo jo $\det \boldsymbol{A}$ ali $|\boldsymbol{A}|$.

Matrika ***A***, za katero velja $\det \boldsymbol{A} \neq 0$, je **nesingularna**. Če pa je $\det \boldsymbol{A} = 0$, je matrika **singularna**.

Računske operacije z matrikami

1. Vsota (razlika) matrik

Seštevamo (odštevamo) lahko le matrike enake dimenzije. Vsota dveh matrik je matrika, katere elementi so vsote istoležnih elementov obeh matrik.

2. Množenje matrike s številom

Matriko množimo s številom tako, da z njim pomnožimo vsak element matrike:

3. Produkt matrik

Produkt $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ matrik $\boldsymbol{A}$ in $\boldsymbol{B}$ je možen le, če ima matrika $\boldsymbol{A}$ toliko stolpcev, kot ima matrika $\boldsymbol{B}$ vrstic.

$$\boldsymbol{A} = [a_{ij}]_{m,n} \quad \text{in} \quad \boldsymbol{B} = [b_{ij}]_{n,p}$$

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = [c_{ij}]_{m,p}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$$

Element c_{ij} matrike $\boldsymbol{C}$ dobimo kot skalarni produkt i-te vrstice matrike $\boldsymbol{A}$ in j-tega stolpca matrike $\boldsymbol{B}$. Produkt matrik v splošnem ni komutativen $(\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA})$. Lahko pa se zgodi, da obstojata dve taki matriki, za kateri velja, da je $(\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA})$. Za taki matriki pravimo, da komutirata. Primer matrik, ki komutirata:

$$\boldsymbol{A} \cdot I = I \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}.$$

Primer:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 4 & 0 & 2\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}3 & -4\\ 1 & 5\\ -2 & 2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 4 & 0 & 2\end{bmatrix}_{2x3}\begin{bmatrix}3 & -4\\ 1 & 5\\ -2 & 2\end{bmatrix}_{3x2}=$$

$$\begin{bmatrix}1.3+2.1+1(-2) & 1.(-4)+2.5+1.2\\ 4.3+0.1+2(-2) & 4.(-4)+0.5+2.2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 8\\ 8 & -12\end{bmatrix}_{2x2}$$

$$\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & -4\\ 1 & 5\\ -2 & 2\end{bmatrix}_{3x2}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 4 & 0 & 2\end{bmatrix}_{2x3}=$$

$$\begin{bmatrix}3.1+(-4).4 & 3.2+(-4).0 & 3.1+(-4).2\\ 1.1+5.4 & 1.2+5.0 & 1.1+5.2\\ (-2).1+2.4 & (-2).2+2.0 & (-2).1+2.2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-13 & 6 & -5\\ 21 & 2 & 11\\ 6 & -4 & 2\end{bmatrix}_{3x3}$$

4. Inverzna matrika

Matrika $\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\boldsymbol{A}}$ je inverzna matrika k matriki $\boldsymbol{A}$, kadar velja:

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I} \text{ in } (\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A}.$$

Inverzno matriko $\boldsymbol{A}^{-1}$ lahko poiščemo le h kvadratni in nesingularni matriki $\boldsymbol{A}$. Če red matrike $\boldsymbol{A}$ ni prevelik, računamo $\boldsymbol{A}^{-1}$ po formuli:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det \mathrm{A}} \cdot \mathrm{A}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{T}}}$$

kjer je $\boldsymbol{A}_K$ matrika poddeterminant elementov a_{ij} v matriki ***A* pomnoženimi z $(-1)^{i+j}$**.

Primer:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 1\\ 5 & 0 & 2\end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \det \boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 1\\ 5 & 0 & 2\end{vmatrix}=-2+0+10+15-0-4=19$$

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{K}}=\begin{bmatrix}-2 & 3 & 5\\ -4 & -13 & 10\\ 5 & 2 & -3\end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{A}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}-2 & -4 & 5\\ 3 & -13 & 2\\ 5 & 10 & -3\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{-2}{19} & \frac{-4}{19} & \frac{5}{19}\\ \frac{3}{19} & \frac{-13}{19} & \frac{2}{19}\\ \frac{5}{19} & \frac{10}{19} & \frac{-3}{19}\end{bmatrix}$$

Preizkus:

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 1\\ 5 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{-2}{19} & \frac{-4}{19} & \frac{5}{19}\\ \frac{3}{19} & \frac{-13}{19} & \frac{2}{19}\\ \frac{5}{19} & \frac{10}{19} & \frac{-3}{19}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Rang matrike

Matrika $\boldsymbol{A}$ dimenzije (m,n) ima rang r, če je vsaj ena kvadratna matrika reda r, ki nastane iz matrike $\boldsymbol{A}$, nesingularna, vse kvadratne matrike reda r+1 pa so singularne.
Kvadratna matrika je nesingularna, kadar je njena determinanta različna od nič, a računanje ranga po tej definiciji je zamudno. Delo si skrajšamo, če s transformacijami, ki ranga matrike ne spremenijo, prevedemo dano matriko v matriko take oblike, da lahko rang hitro preberemo. Glede na lastnosti determinant se rang matrike ne spremeni, če:

- **zamenjamo med seboj dve vrstici ali dva stolpca,**
- **množimo kako vrstico ali stolpec s številom, različnim od nič,**
- **prištejemo k neki vrstici ali stolpcu vrstico ali stolpec, pomnožen s poljubnim faktorjem.**

Vsaki matriki, ki ni ničelna, se da z opisanimi transformacijami prirediti matriko, ki ima samo elemente $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{rr}$ različne od nič, vsi ostali elementi pa so enaki nič. Za določitev ranga matrike pa je dovolj, da s transformacijami, ki ranga ne spremenijo, poiščemo matriko, ki ima elemente $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{rr}$ različne od nič, vse elemente pod elementi $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{kk}$ pa enake nič. Pri tem je $k = \min(m,n)$. Rang take matrike je $r \le k$.

Primer:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ 5 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \\ (0 & -4 & -2 & 2) \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -10 & -10 \\ (0 & 0 & -10 & -10) \end{bmatrix} \rightarrow \text{rang je 3.}$$

Rang smo poiskali v dveh korakih. V prvem smo poiskali ničle pod diagonalo v prvem stolpcu ((-3)-kratnik prve vrstice smo prišteli drugi, (-2)-kratnik prve smo prišteli tretji, (-5)-kratnik prve smo prišteli četrti in prvo odšteli od pete vrstice) in črtali četrto vrstico, ker je proporcionalna drugi. V drugem koraku pa smo zamenjali vrstice (četrto vrstico smo vrinili na 2. mesto), nato pa 4-kratnik nove druge prišteli novi tretji in 5-kratnik nove druge vrstice prišteli novi četrti. Ker je bila četrta vrstica proporcionalna tretji, smo jo črtali. Ostale so nam tri neničelne vrstice in zato je rang enak 3.

Matrične enačbe

Pri reševanju matričnih enačb moramo upoštevati dejstvo, da produkt matrik v splošnem ni komutativen: $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$. Poglejmo si nekaj primerov matričnih enačb.

Primer 1.
Rešimo matrično enačbo:

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} - 2\boldsymbol{X} = 2\boldsymbol{B} - 4\boldsymbol{X},$$ če je $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ in $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} + 2\boldsymbol{X} = 2\boldsymbol{B}$$

$$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} + 2\boldsymbol{I})\boldsymbol{X} = 2\boldsymbol{B}.$$

Ker stoji izraz $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} + 2\boldsymbol{I}$ na levi od $\boldsymbol{X}$, moramo enačbo $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} + 2\boldsymbol{I}) \cdot \boldsymbol{X} = 2\boldsymbol{B}$ pomnožiti z $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} + 2\boldsymbol{I})^{-1}$ z leve.

Ker je $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} + 2\boldsymbol{I})^{-1} \cdot (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} + 2\boldsymbol{I}) = \boldsymbol{I}$ in $\boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}$, je

$$\boxed{\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} + 2\boldsymbol{I})^{-1} \cdot 2\boldsymbol{B}.}$$

Če označimo $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} + 2\boldsymbol{I} = \boldsymbol{C}$, je

$$X = \boldsymbol{C}^{-1} \cdot 2\boldsymbol{B},$$

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} + 2\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 7 \end{bmatrix},$$

$$\det \boldsymbol{C} = 30, \quad \boldsymbol{C}_{\mathrm{K}} = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -5 & 5 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{C}^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{C}} \quad \boldsymbol{C}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \frac{7}{30} & \frac{-1}{30} \\ \frac{-5}{30} & \frac{5}{30} \end{bmatrix} \quad \text{in}$$

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \frac{7}{30} & \frac{-1}{30} \\ \frac{-5}{30} & \frac{5}{30} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-2}{30} & \frac{48}{30} \\ \frac{10}{30} & \frac{-60}{30} \end{bmatrix}.$$

Primer 2.

Rešimo matrično enačbo:

$$XA + B^2 = X + B, \quad \text{če je} \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$XA - X = B - B^2$$

$$X(A - I) = B - B^2$$

V tem primeru pa enačbo $X(A - I) = B - B^2$ pomnožimo z $(A - I)^{-1}$ z desne strani:

$$X(A - I)(A - I)^{-1} = (B - B^2)(A - I)^{-1}$$

$$\boxed{X = (B - B^2)(A - I)^{-1}}$$

Opozorilo: $\boxed{B^2 = B \cdot B}$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -9 \\ -3 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}^2=\begin{bmatrix}-3 & 12\\ 4 & -15\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 1 & 4\end{bmatrix}$ in det $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=3$

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})_{\mathrm{K}}=\begin{bmatrix}4 & -1\\ -5 & 2\end{bmatrix},\qquad (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})_{\mathrm{K}}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}4 & -5\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{4}{3} & -\frac{5}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}-3 & 12\\ 4 & -15\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{4}{3} & \frac{-5}{3}\\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{-24}{3} & \frac{39}{3}\\ \frac{31}{3} & \frac{-50}{3}\end{bmatrix}.$$

Primer 3.

Izračunajmo $f(\boldsymbol{B})$, če je $f(x)=\dfrac{1}{3-2x^2}$ in $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0 & 3\\ 1 & -3\end{bmatrix}$

$$f(\boldsymbol{B})=\frac{1}{3\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{B}^2}=(3\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{B}^2)^{-1}$$

Opozorilo: V matričnem izrazu $f(\boldsymbol{B})$ moramo število 3 nadomestiti z matriko $3\boldsymbol{I}$, če hočemo, da bomo odštevanje lahko izvedli. Do rezultata naj se za vajo potrudi bralec sam.

Primer 4.

Izračunajmo $\boldsymbol{X}$ iz enačbe:

$$\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{XB}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},\quad \text{če je}\quad \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\quad \text{in}\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0 & 3\\ 1 & -3\end{bmatrix}.$$

V tem primeru $\boldsymbol{X}$ ne moremo izpostaviti. Iz zahtev po dimenzijah matrik pri množenju pa lahko ugotovimo, da je $\boldsymbol{X}$ razsežnosti (2,2).

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$$ in določiti moramo 4 neznanke: a, b, c, d.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & 3a-3b \\ d & 3c-3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{a+b} & \mathrm{3a-3b} \\ \mathrm{d} & \mathrm{3c-3d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Glede na definicijo enakosti matrik, velja:

$$a+b=1 \quad \Rightarrow \quad a=1-b$$

$$d=0$$

$$\mathrm{3a-2b=0,} \quad \mathrm{3-3b-2b=0} \quad \mathrm{b}=\frac{3}{5} \quad \text{in} \quad \mathrm{a}=\frac{2}{5}$$

$$3c-3d=0 \qquad \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$c=d=0$$

Povzetek poglavja:

1. Determinanta je število, ki ga priredimo kvadratni shemi.
2. Vrednost determinante tretjega reda izračunamo po Sarrusovem pravilu.
3. Za diagonalizacijo determinante uporabljamo predvsem naslednjo lastnost determinante: vrednost determinante se ne spremeni, če poljubni vrstici determinante prištejemo poljuben večkratnik kake druge vrstice.
4. Vrednost determinante višjega reda kot tri računamo z diagonalizacijo determinant.
5. Matrika je pravokotna shema števil. Računanje z matrikami (seštevanje, odštevanje matrik, množenje matrik s skalarjem, množenje matrike z matriko) mora zadoščati posebnim zakonom.
6. Inverzna matrika obstaja le pri kvadratnih matrikah, ki imajo pripadajočo determinanto različno od nič.
7. Pri reševanju matričnih enačb moramo upoštevati dejstvo, da produkt matrik v splošnem ni komutativen: $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$.
8. Rang matrike je razsežnost največje kvadratne matrike, ki jo lahko tvorimo iz dane matrike in katere determinanta je različna od nič.

➢Vprašanja za ponavljanje in razpravo:

1. Kaj je determinanta in kako izračunamo vrednost determinante?
2. Katere so lastnosti determinant?
3. Kaj je matrika in kakšne vrste matrik poznamo?
4. Kako računamo z matrikami?
5. Kdaj obstaja inverzna matrika in kako jo izračunamo?
6. Kaj je rang matrike in kako ga poiščemo?
7. Kaj moramo upoštevati pri reševanju matričnih enačb in kakšne primere matričnih enačb poznamo?

SISTEMI LINEARNIH ENAČB

- **Kaj bomo spoznali v tem poglavju:**

1. Zapis sistema linearnih enačb v matrični obliki
2. Metode za reševanje sistema linearnih enačb: metodo z inverzno matriko in Gaussovo metodo
3. Nehomogen sistem linearnih enačb in njegove rešitve
4. Homogen sistem linearnih enačb in njegove rešitve

ZAPIS SISTEMA LINEARNIH ENAČB

Sistem m linearnih enačb z n neznankami ima obliko:

$$\begin{array}{lllllllll}
a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}\,x_n & = & b_1 \\
a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}\,x_n & = & b_2 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m1}\,x_1 & + & a_{m1}\,x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}\,x_n & = & b_{m.}
\end{array}$$

Pri tem imenujemo števila a_{ik}, $i = 1, 2, \ldots, m$; $k = 1, 2, \ldots, n$ koeficiente sistema, b_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ desne strani enačb in x_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ neznanke. Sistem linearnih enačb se imenuje **homogen**, če je $b_i = 0$ za vsak i. Sistem linearnih enačb je **nehomogen**, če obstaja vsaj en tak i, da je $b_i \neq 0$.

Rešitve sistema so vse tiste n-terice $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ki zadoščajo vsem enačbam hkrati. Zgornji sistem linearnih enačb lahko krajše zapišemo v matrični obliki:

$$\boxed{\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}},$$

kjer je ***A*** **osnovna matrika** sistema linearnih enačb ali matrika koeficientov, ***B*** vektor (matrika) desnih strani enačb ali vektor prostih členov, ***X*** pa vektor (matrika) neznank:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Če je matrika $\boldsymbol{A}$ kvadratna, ji lahko priredimo determinanto z istimi elementi, ki ji pravimo **determinanta sistema**.

Za rešljivost sistema linearnih enačb je pomembna tudi **razširjena matrika** sistema linearnih enačb, ki jo dobimo tako, da matriki $\boldsymbol{A}$ dodamo še stolpec desnih strani enačb $\boldsymbol{B}$. Označimo jo $[\boldsymbol{A} \ \vdots \ \boldsymbol{B}]$.

$$[\boldsymbol{A} \ \vdots \ \boldsymbol{B}]=\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Sistem linearnih enačb, ki ima vsaj eno rešitev, je **rešljiv** (konsistenten, neprotisloven). Rešljiv sistem je **določen**, če ima eno samo rešitev, in **nedoločen**, če ima več kot eno rešitev. Za rešljivost sistema linearnih enačb velja:

Sistem linearnih enačb je rešljiv natanko takrat, kadar imata osnovna in razširjena matrika sistema enak rang.

Sistem linearnih enačb je določen, če je rang osnovne in razširjene matrike sistema enak številu neznank, in nedoločen, če sta ranga enaka in manjša od števila neznank.

Če je sistem linearnih enačb **homogen (B=0),** ima vedno **trivialno** rešitev: $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0.$
Netrivialno rešitev (neskončno rešitev) ima, če je rang osnovne matrike sistema manjši od n.

Sistem linearnih enačb je **nehomogen, če je B ≠ 0.** Nehomogen sistem ima natanko eno rešitev (je določen), če je rang osnovne matrike enak rangu razširjene matrike in enak številu neznank, ima neskončno rešiitev)je nedoločen), če sta ranga osnovne in razširjene matrike enaka in manjša od števila neznank in je protisloven (nerešljiv), kadar sta ranga osnoven in razširjene matrike različna.

METODE ZA REŠEVANJE SISTEMOV LINEARNIH ENAČB

Naj bo dan sistem linearnih enačb, zapisan v matrični obliki: $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$.

1. Če obstaja **inverzna matrika** $\boldsymbol{A}^{-1}$, lahko z njo na levi množimo enačbo $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ in dobimo:

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}.$$

Po tej metodi lahko rešujemo sistem linearnih enačb le, če je matrika $\boldsymbol{A}$ kvadratna in če njena determinanta ni enaka nič. Metoda ni prikladna, če je n velik.

2. Sistem linearnih enačb lahko v vsakem primeru rešimo po **Gaussovi metodi**.

Razširjeno matriko sistema

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right]$$

transformiramo z dovoljenimi transformacijami v matriko

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} d_{11} & d_{12} & d_{13} & \cdots & d_{1n} & e_1 \\ 0 & d_{22} & d_{23} & \cdots & d_{2n} & e_2 \\ 0 & 0 & d_{33} & \cdots & d_{3n} & e_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_{nn} & e_n \end{array}\right].$$

Njej pripada sistem:

$$\begin{array}{ccccccccccc} d_{11}x_1 & + & d_{12}x_2 & + & d_{13}x_3 & + & \ldots & + & d_{1n}x_n & = & e_1 \\ & & d_{22}x_2 & + & d_{23}x_3 & + & \ldots & + & d_{2n}x_n & = & e_2 \\ & & & & d_{33}x_3 & + & \ldots & + & d_{3n}x_n & = & e_3 \\ & & & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & & & & & & d_{nn}x_n & = & e_{n.} \end{array}$$

Sedaj izračunamo x_n iz zadnje enačbe, nato $x_{n\text{-}1}$ iz predzadnje in postopek nadaljujemo, dokler ne dobimo x_1 iz prve enačbe.

PRIMERI ZA SISTEME LINEARNIH ENAČB

Nehomogeni sistemi linearnih enačb

V praksi se nehomogeni sistemi linearnih enačb najpogosteje uporabljajo pri reševanju proizvodnih in transportnih problemov.

1. Samo ena rešitev nehomogenega sistema linearnih enačb

Vsebinska formulacija (postavitev problema):

Manjša delavnica izdeluje izdelke A, B, C iz surovin P, Q, R. Za enoto izdelka A potrebuje 1 enoto surovine P, 1 enoto surovine Q in 2 enoti surovine R. Za enoto izdelka B pa potrebuje 2 enoti surovine P, 9 enot surovine Q in 4 enote surovine R; medtem ko za enoto izdelka C potrebuje 2 enoti surovine P, 3 enote surovine Q in 8 enot surovine R. Delavnica ima trenutno v skladišču 12 enot surovine P, 22 enot surovine Q in 36 enot surovine R. Koliko enot izdelka A oziroma B in C naj delavnica takoj izdela, da bo skladišče zaradi sanitarnih zahtev izpraznila (porabila vse surovine)? Problem lahko zapišemo v obliki preglednice.

Izdelek / Surovine	A	B	C	Količina surovin
P	1	2	2	12
Q	1	9	3	22
R	2	4	8	36
Količina izdelkov	x	y	z	

Uvedemo neznanke x, y, z za število enot izdelkov A, B in C, problem zapišemo kot sistem treh linearnih enačb s tremi neznankami:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 2z & = & 12 \\ x & + & 9y & + & 3z & = & 22 \\ 2x & + & 4y & + & 8z & = & 36 \end{array}$$

Iskanje rešitve (algoritem, metoda):

Rešitev, dobljena po Gaussovi metodi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & | & 12 \\ 1 & 9 & 3 & | & 22 \\ 2 & 4 & 8 & | & 36 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & | & 12 \\ 0 & 7 & 1 & | & 10 \\ 0 & 0 & 4 & | & 12 \end{bmatrix}$$

Ranga osnovne in razširjene matrike sta enaka (oba sta 3) in enaka številu neznank. Glede na to dejstvo imamo **eno samo rešitev**, in sicer: $z = 3$, $y = 1$, $x = 4$.

Ker je naš sistem kvadraten (število enačb je enako številu neznank) in ker je rang osnovne matrike enak rangu razširjene matrike in enak številu neznank (matrika A je nesingularna), lahko rešitev dobimo tudi z uporabo inverzne matrike:

sistem zapišemo v matrični obliki kot $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ in $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$.

Ker je matrika $\boldsymbol{A}$ kvadratna in $\boldsymbol{D} \neq \boldsymbol{0}$, lahko poiščemo $\boldsymbol{A}^{-1}$.

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{28}\begin{bmatrix} 60 & -8 & -12 \\ -2 & 4 & -1 \\ -14 & 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{60}{28} & \frac{-8}{28} & \frac{-12}{28} \\ \frac{-2}{28} & \frac{4}{28} & \frac{-1}{28} \\ \frac{-14}{28} & 0 & \frac{7}{28} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \frac{60}{28} & \frac{-8}{28} & \frac{-12}{28} \\ \frac{-2}{28} & \frac{4}{28} & \frac{-1}{28} \\ \frac{-14}{28} & 0 & \frac{7}{28} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 12 \\ 22 \\ 36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Ocena rešitve

Rešitev, ki smo jo dobili, je edina rešitev. Ima vse komponente pozitivne, kar je pri proizvodnem problemu logična zahteva. Če ima rešitev kakšno komponento negativno, seveda ni dobra. Rešitev, ki smo jo dobili, je celoštevilska, kar je običajno tudi zahteva pri proizvodnih problemih . Če rešitev ni celoštevilska in problem tako rešitev zahteva, moramo poseči po metodologiji celoštevilskega in delno celoštevilskega programiranja.

2. Neskončno rešitev nehomogenega sistema linearnih enačb

Sistem linearnih enačb ima lahko tudi neskončno rešitev. Domnevamo, da imamo v problemu izdelave izdelkov A, B in C, ki je podan s preglednico, podatke:

Izdelek / Surovine	A	B	C	Količina surovin
P	1	2	2	12
Q	1	9	3	22
R	2	4	4	24
Količina izdelkov	x	y	z	

Problem zapišemo spet v obliki sistema linearnih enačb:

$$\begin{aligned} x + 2y + 2z &= 12 \\ x + 9y + 3z &= 22 \\ 2x + 4y + 4z &= 24 \end{aligned}$$

Rešimo ga po Gaussovi metodi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & | & 12 \\ 1 & 9 & 3 & | & 22 \\ 2 & 4 & 4 & | & 24 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & | & 12 \\ 0 & 7 & 1 & | & 10 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Rang osnovne matrike in rang razširjene matrike sta enaka (oba sta 2) in manjša od števila neznank. V tem primeru imamo neskončno rešitev:

$z = c_1 \in R$, $y = \frac{10 - c_1}{7}$, $x = \frac{64 - 12c_1}{7}$, kjer je c_1 poljubna konstanta.

Sedaj je naša naloga, da določimo c_1 tako, da dobimo smiselno rešitev (nenegativno in v posebnih primerih tudi celoštevilsko). Pri tem pa se lahko zgodi ena izmed treh možnosti:

a) eksistira natanko en ustrezen c_1; imamo eno samo rešitev,
b) ni nobenega ustreznega c_1; možne rešitve ni,
c) je več ustreznih c_1; imamo več možnih rešitev.

Ker imamo v našem primeru opravka s proizvodnim problemom, je logična zahteva, da ima rešitev vse komponente nenegativne. To bomo dosegli, če bo:

$c_1 \geq 0$, $c_1 \leq 10$ in $c_1 \leq 64/12 \rightarrow c_1 \in [0, 64/12]$, kar pomeni, da nastopi primer c), oziroma, da imamo neskončno rešitev. Če pa bi še dodatno zahtevali, da morajo biti komponente rešitve cela števila, pa ustreza tej zahtevi le en $c_1 \in [0, 64/12]$, in sicer $c_1 = 3$, tako da dobimo eno samo rešitev: $z=3$, $y=1$, $x=4$.

3. Protislovje v nehomogenem sistemu linearnih enačb

Sistem linearnih enačb pa je lahko tudi protisloven, kar pomeni, da rešitve ni.
Spet predpostavimo, da imamo v problemu izdelave izdelkov A, B in C problem, podan v preglednici:

Izdelek / Surovine	A	B	C	Količina surovin
P	1	2	2	12
Q	1	9	3	22
R	2	4	4	30
Količina izdelkov	x	y	z	

Problem zapišemo v obliki linearnih enačb:

$$x + 2y + 2z = 12$$
$$x + 9y + 3z = 22$$
$$2x + 4y + 4z = 30$$

Rešimo ga po Gaussovi metodi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & | & 12 \\ 1 & 9 & 3 & | & 22 \\ 2 & 4 & 4 & | & 30 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & | & 12 \\ 0 & 7 & 1 & | & 10 \\ 0 & 0 & 0 & | & 6 \end{bmatrix}$$

Rang osnovne matrike je 2, razširjene pa 3. Ranga sta torej različna, kar pomeni, da je sistem protisloven. Pri protislovnem sistemu moramo odkriti vzroke za protislovje. Ti zahtevajo drugačne količine razpoložljivih surovin ali pa celo spremenjeno tehnologijo.
Na tem mestu se vprašajmo, koliko surovin R naj bi imeli v problemu na razpolago, da bi dobili rešitev (eno ali pa neskončno). Odgovor na zastavljeno vprašanje dobimo, če namesto znane količine surovin v model vnesemo iskano količino surovine R, ki jo označimo s p:

Izdelek / Surovine	A	B	C	Količina surovin
P	1	2	2	12
Q	1	9	3	22
R	2	4	4	p
Količina izdelkov	x	y	z	

Problem zapišemo v obliki linearnih enačb:

$$\begin{aligned} x + 2y + 2z &= 12 \\ x + 9y + 3z &= 22 \\ 2x + 4y + 4z &= p \end{aligned}$$

Rešimo ga po Gaussovi metodi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & | & 12 \\ 1 & 9 & 3 & | & 22 \\ 2 & 4 & 4 & | & p \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & | & 12 \\ 0 & 7 & 1 & | & 10 \\ 0 & 0 & 0 & | & p-24 \end{bmatrix}$$

Rang osnovne matrike je 2. Rang razširjene matrike bo enak rangu osnovne (to zahtevamo, da bomo imeli rešitev), in sicer 2, če bo izraz p – 24 = 0, kar da rešitev, da je p = 24, oziroma zahtevana količina surovin R je 24. Če bi v zgornjem primeru imeli le 24 enot surovine R namesto 30, bi dobili neskončno rešitev, kar smo obdelali v prejšnjem primeru.

Homogeni sistemi linearnih enačb

Homogeni sistem linearnih enačb nam običajno predstavlja tako-imenovane "pipe lines" probleme, to so problemi različnih zbiralnikov vode ali mleka, cestnih križišč ali pa centraliziranih mehaniziranih skladišč. Vsem tem problemom je skupno dejstvo, da moramo količino materiala, ki ga v zbirališče pripeljemo, od tam tudi odpeljati.
Homogeni sistem linernih enačb ima vedno rešitev. Če ima sistem eno samo rešitev, je to trivialna rešitev (x=0,y=0,...), ki pa v praksi nima nobenega pomena. Kadar rešujemo probleme, ki jih predstavimo s sistemom homogenih linearnih enačb, so zaželene netrivialne rešitve (neskončno rešitev; med njimi je tudi trivialna). Sledi diskusija v istem smislu kot v primeru nehomogenega sistema z neskončno rešitvami.

4. Neskončno rešitev homogenega sistema linearnih enačb

Trije sosedje, imenujmo jih A, B in C, so se dogovorili, da bodo drug drugemu pomagali obnoviti hišo. Pri tem bo A 30% svojega časa porabil za obnovitev svoje hiše, 40% časa za obnovitev hiše soseda B in 30% za obnovitev hiše soseda C. B pa bo 40% časa delal pri A-ju, 10% v svoji hiši in 50% pri C-ju. Sosed C pa bo 10% svojega časa delal pri A-ju, 30% pri B-ju in 60% v svoji hiši. Ko bo delo končano, želijo izračunati, koliko naj bi A, B, oziroma C prejel za svoje delo, upoštevajoč delo v lastni hiši in dejstvo, da mora biti plačilo porazdeljeno pravično, kar naj pomeni, da je vsota, ki jo nekdo plača za delo v svoji hiši, enaka vsoti, ki jo prejme od drugih.

Podatki o porazdelitvi časa dela sosedov A, B in C pri obnovi posameznih hiš so zbrani v preglednici:

OD \ DO	A	B	C
A	0.3	0.4	0.3
B	0.4	0.1	0.5
C	0.1	0.3	0.6

Če označimo plačilo, ki ga dobi A z x_A, plačilo B-ju z x_B in C-ju z x_C in če je plačilo A-ju enako njegovim izdatkom za delo pri njegovi hiši (analogno trdimo za soseda B in C), potem velja:

$$x_A = 0.3x_A + 0.4x_B + 0.1x_C$$
$$x_B = 0.4x_A + 0.1x_B + 0.3x_C$$
$$x_C = 0.3x_A + 0.5x_B + 0.6x_C$$

oziroma

$$\begin{aligned} 0.7x_A - 0.4x_B - 0.1x_C &= 0 \\ -0.4x_A + 0.9x_B - 0.3x_C &= 0 \\ -0.3x_A - 0.5x_B + 0.4x_C &= 0 \end{aligned}$$

Rešimo dobljeni homogeni sistem po Gaussovi metodi:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0.7 & -0.4 & -0.1 & 0 \\ -0.4 & 0.9 & -0.3 & 0 \\ -0.3 & -0.5 & 0.4 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 0.7 & -0.4 & -0.1 & 0 \\ 0 & \dfrac{0.47}{0.7} & \dfrac{-0.25}{0.7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Rang osnovne matrike (ta je 2) je manjši od števila neznank, zato ima sistem neskončno rešitev, in sicer:

$$x_C = c_1 \in R,\ x_B = \frac{0.25}{0.47}c_1,\ x_A = \frac{0.147}{0.329}c_1.$$

Če bi za c_1 izbrali 0, bi dobili trivialno rešitev, kar je glede na zastavljeni problem nesmisel. Če pa je $c_1 \neq 0$ oziroma $c_1 \in R^+$, imamo neskončno pozitivnih (smiselnih) rešitev. Tako na primer, če za c_1 izberemo 329 denarnih enot, je $x_A = 147$, $x_B = 175$ in $x_C = 329$.

5. Samo trivialna rešitev sistema linearnih enačb

Predpostavimo, da bi imeli naslednji homogen sistem linearnih enačb:

$$
\begin{aligned}
0.7x_1 - 0.4x_2 - 0.1x_3 &= 0,\\
-0.4x_1 + 0.9x_2 - 0.3x_3 &= 0,\\
-0.3x_1 - 0.5x_2 + 0.5x_3 &= 0.
\end{aligned}
$$

Rešimo ga po Gaussovi metodi:

$$
\begin{bmatrix} 0.7 & -0.4 & -0.1 & | & 0 \\ -0.4 & 0.9 & -0.3 & | & 0 \\ -0.3 & -0.5 & 0.5 & | & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0.7 & -0.4 & -0.1 & | & 0 \\ 0 & \dfrac{0.47}{0.7} & \dfrac{-0.25}{0.7} & | & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{0.07}{0.7} & | & 0 \end{bmatrix}.
$$

Rang osnove matrike (ta je 3) je enak rangu razširjene matrike in številu neznank, kar pomeni, da imamo samo trivialno rešitev:

$x_1 = x_2 = x_3 = 0.$

➢ Povzetek poglavja:

1. Sistem linearnih enačb lahko zapišemo v matrični obliki kot $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$. Če je matrika $\boldsymbol{A}$ kvadratna in če njena determinanta ni enaka nič, lahko sistem linearnih enačb rešimo z uporabo inverzne matrike: $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$.

2. Splošna metoda za reševanje sistema linearnih enačb je Gaussova metoda.

3. Nehomogen sistem linearnih enačb ima ali natanko eno rešitev, ali neskončno rešitev ali pa je protisloven.

4. Homogen sistem linearnih enačb ima ali le eno rešitev (trivialna rešitev) ali pa ima neskončno rešitev (netrivialne rešitve).

➢ Vprašanja za ponavljanje in razpravo:

1. Kako zapišemo sistem linearnih enačb v matrični obliki? Katera matrika je osnovna in katero matriko imenujemo razširjena?

2. Katere metode za reševanje sistema linearnih enačb poznate in kateri pogoji morajo biti izpolnjeni za uporabo posameznih metod?

3. Kako rešujemo nehomogene oziroma homogene sisteme linearnih enačb in kakšne rešitve lahko dobimo?

SISTEMI LINEARNIH NEENAČB IN LINEARNI PROGRAM

- **Kaj bomo spoznali v tem poglavju:**

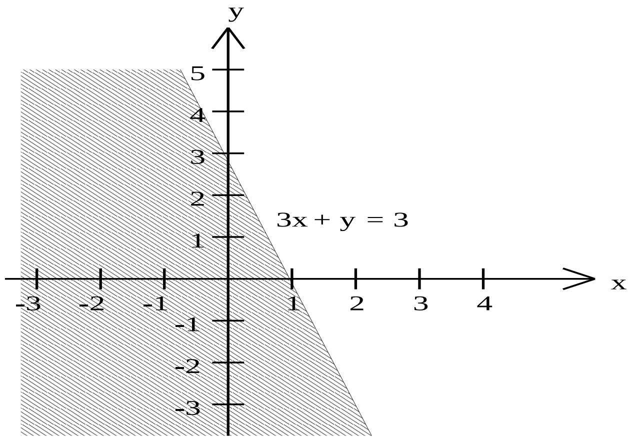
1. Sistem linearnih neenačb, ki ga bomo reševali grafično in ugotovili, kaj je množica rešitev
2. Definicijo linearnega programa
3. Grafično reševanje linearnega programa na primeru proizvodnega, mešalnega in transportnega problema
4. Transportni problem linearnega programiranja z viškom ponudbe oziroma proizvodnje
5. Dualni linearni program

SISTEMI LINEARNIH NEENAČB

Izraz $ax + by + c > 0$ se imenuje linearna neenačba z dvema neznankama (x je neodvisna, y pa odvisna spremenljivka). Množica rešitev linearne neenačbe je ena od obeh polravnin, na kateri razdeli premica $ax + by + c = 0$ ravnino (xy). Če je $c > 0$, je to polravnina, ki vsebuje izhodišče, če pa je $c < 0$, pa polravnina, ki izhodišča ne vsebuje.

Primer:

Neenačba $3x + y - 3 < 0$ oziroma $-3x - y + 3 > 0$ je predstavljena na sliki. Rešitev predstavlja vse točke polravnine, ki ležijo pod premico $3x + y - 3 = 0$.



Sistem linearnih neenačb zapišemo v obliki:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m$$

oziroma v matrični obliki kot $\boldsymbol{AX} \geq \boldsymbol{B}$.

Rešitev sistema linearnih neenačb je presek množic rešitev posameznih neenačb.

Sistem linearnih neenačb predstavimo na naslednjem primeru.

Vsebinska formulacija:

Na manjši kmetiji se občasno ukvarjajo tudi z izdelavo spominkov iz smrekovega in bukovega lesa. Pri tem pa uporabljajo tri različne stroje: S_1, S_2 in S_3. Potreben čas (v urah) uporabe posameznih strojev za izdelavo spominka iz smrekovega lesa oziroma spominka iz bukovega lesa je razviden iz preglednice. V njej je podan tudi potreben čas (v urah), ki ga potrebuje izdelovalec za posamezen spominek in razpoložljiv dnevni čas (v urah), ko imajo na tej kmetiji na razpolago stroje S_1, S_2 in S_3 in ko ima izdelovalec čas za izdelavo spominkov iz smrekovega in bukovega lesa. Problem, ki se pri tem pojavi, je, koliko spominkov iz smrekovega oziroma bukovega lesa lahko izdelajo na tej kmetiji dnevno, ob upoštevanju razpoložljivega časa strojev S_1, S_2 in S_3 in izdelovalca.

	Spominek iz smrekovega lesa	Spominek iz bukovega lesa	Razpoložljiv čas
S_1	1	2	4
S_2	2	0	3
S_3	0	4	6
Izdelovalec	2	1	4
Količina	x	y	

Matematična formulacija:

Če je x število dnevno izdelanih spominkov iz smrekovega lesa in y število dnevno izdelanih spominkov iz bukovega lesa, lahko zapišemo naslednji sistem linearnih neenačb:

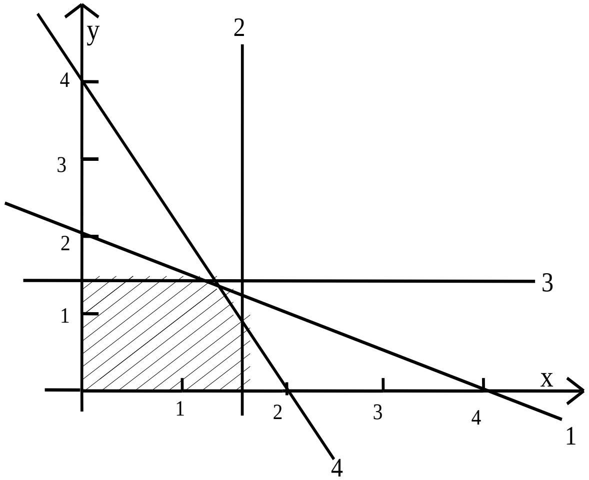
$$\begin{array}{cccrc} x & + & 2y & \leq & 4 \\ 2x & & & \leq & 3 \\ & & 4y & \leq & 6 \\ 2x & + & y & \leq & 4 \\ x & \geq 0, & y & \geq & 0 \end{array}$$

Iskanje rešitve:

Ker imamo samo 2 neznanki, lahko problem rešimo grafično:

1. $x + 2y = 4$
2. $2x = 3$
3. $4y = 6$
4. $2x + y = 4$

Presek vseh polravnin, ki jih določa vseh 6 neenačb, je šrafirana množica.



Ocena rešitve:

Rešitev predstavljajo vse točke šrafirane množice. Rešitev je neskončno. Pri ocenjevanju rešitev zastavljenega problema se spet odpre diskusija o celoštevilskih rešitvah.

Rešitev sistema linearnih neenačb je neskončno, ali ena sama, ali pa rešitve ni (protislovje).

Linearno programiranje

DEFINICIJA LINEARNEGA PROGRAMA

Linearni program zapišemo v matematični obliki kot:

poiskati moramo spremenljivke $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ki zadoščajo:

1) pogojem nenegativnosti:

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

2) linearnim neenačbam:

tako, da ima linearna funkcija

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$ ekstrem (min ali max).

Sistem linearnih neenačb imenujemo omejitve (constraints), linearno funkcijo $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pa imenujemo namenska ali ciljna funkcija (objective function).

Opomba: V omejitvah smo pisali le znak $\geq$. Če imamo v omejitvi znak $\leq$, dobimo znak $\geq$ tako, da neenačbo pomnožimo z (-1).

Bistveno za linearno programiranje je, da je namenska funkcija linearna in da so tudi vse omejitvene neenačbe ali enačbe linearne.

GRAFIČNO REŠEVANJE LINEARNEGA PROGRAMA

Probleme linearnega programiranja, v katerih nastopata samo dve spremenljivki, je mogoče rešiti z grafično metodo. Matematično formulacijo in grafično reševanje takih problemov bomo razložili na proizvodnem, prehrambenem, in transportnem problemu.

1. Proizvodni problem kot primer linearnega programiranja

Vsebinska formulacija:

Delavnica izdeluje iz surovin P in Q izdelka A in B. Za izdelavo enega izdelka A potrebuje 1 enoto surovine P in 3 enote surovine Q. Za izdelavo ene enote izdelka B pa potrebuje 3 enote surovine P in 1 enoto surovine Q. Delavnica ima od ene enote izdelka A 3 denarne enote čistega dohodka, od enote izdelka B pa 4 denarne enote. Na zalogi imajo 24 enot surovine P in 16 enot surovine Q. Določite optimalni načrt izdelave izdelkov A in B, če delavnica želi doseči največji čisti dohodek od prodanih izdelkov A in B. Problem je razviden iz preglednice.

Izdelek / Surovine	A	B	Zaloge omejitve)
P	1	3	24
Q	3	1	16
Čisti dohodek	3	4	
Količina izdelkov	x	y	

Matematična formulacija:

Naj bo x količina izdelka A, y pa količina izdelka B, ki ju bo delavnica izdelala. Problem zapišemo kot linearni program:

$x \geq 0, y \geq 0$

$x + 3y \leq 24$

$3x + y \leq 16$

$f(x,y) = 3x + 4y$ max

Reševanje problema:

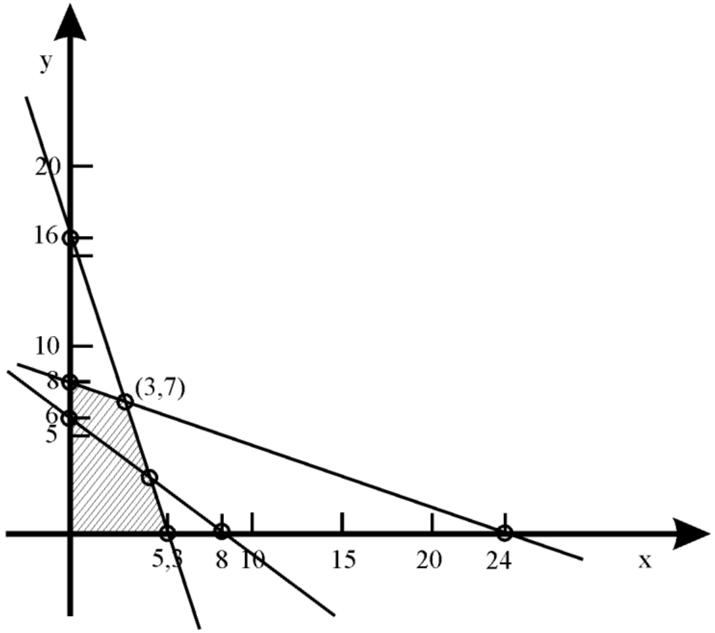
Problem rešimo grafično, kot je prikazano na sliki. Množica K naj bo množica točk, ki zadošča vsem petim neenačbam ($x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + 3y \leq 24$, $3x + y \leq 16$) in jo dobimo kot presek polravnin. Nato za $f(x,y)$ izberemo poljubno premico $3x + 4y = c$ (c je poljubna konstanta). Na sliki smo izbrali premico $3x + 4y = 24$ in je na njej prikazana črtkano.

Narisali smo torej premici:

1: $x + 3y = 24$

2: $3x + y = 16$

in premico $3x + 4y = c = 24$, ki predstavlja ciljno funkcijo. To premikamo vzporedno navzgor, dokler ne zapusti množice rešitev. To se zgodi v točki (3,7). Zato doseže ciljna funkcija maksimum (37) v ekstremni točki (oglišču) (3,7).



Dualni linearni program

Pojem dualnega linearnega programa bomo razložili na naslednjem primeru.

Proizvodni problem, ki smo ga pravkar rešili glede na maksimalni čisti dohodek od proizvedenih izdelkov A in B, obravnavajmo še z drugega zornega kota. Delavnica želi tak proizvodni načrt, pri katerem bo vrednost porabljenih surovin najmanjša. Naj bo u vrednost (v denarnih enotah DE) ene enote surovine P in v vrednost (v DE) ene enote surovine Q v proizvodnem procesu, v katerem izdelajo 3 enote izdelka A in 7 enot izdelka B, in s tem doseżejo maksimalni čisti dohodek (37 DE). Pri izdelavi ene enote izdelka A imajo porabljene surovine vrednost u + 3v. Ker pa naj delavnica ne bi proizvajala z izgubo, ta vrednost ne more biti manjša od čistega dohodka izdelka A. (Za lažje razumevanje te zadnje trditve si lahko predstavljamo tudi, da je u cena enote surovine P, po kateri to surovino odprodamo, namesto da bi izdelali izdelka A in B, ter podobno v cena surovine Q. Ker pa delavnica ne želi odprodati surovin z izgubo, mora biti u + 3v vsaj toliko, kot je čisti dohodek od izdelka A). Podobno razmišljamo pri izdelavi izdelka B. Skupni izdatek za surovine, ki jih je delavnica nabavila in znaša 24u + 16v, pa naj bo čim manjši. Pri takem načinu načrtovanja proizvodnje dobimo naslednji linearni program:

$u \geq 0,\ v \geq 0$
$u + 3v \geq 3$
$3u + v \geq 4$
$g(u,v) = 24u + 16v$ min

Linearni program, ki smo ga tako dobili, imenujemo dualni linearni program k linearnemu programu proizvodnega problema (primarni linearni program). Predstavimo ga lahko v obliki preglednice:

Izdelek / Surovine	P	Q	Vrednosti izdelkov
A	1	3	3
B	3	1	4
Zaloge (omejitve)	24	16	
Vrednost surovin	u	v	

K vsakemu linearnemu programu lahko priredimo dualni linearni program. Pri tem pa velja, da iz primarnega dobimo dualnega tako, da matriko koeficientov v neenačbah transponiramo, neenačaje obrnemo, maximum zamenjamo z minimumom, koeficienti ciljne funkcije postanejo omejitve v neenačbah, omejitve pa koeficienti ciljne funkcije dualnega programa. Od tod je jasno, da je dualni linearni program k dualnemu primarni linearni program. V dualnem linearnem programu imamo toliko spremenljivk, kot imamo v primarnem omejitev, saj vsaki omejitvi primarnega linearnega programa pripada ena dualna spremenljivka.

Dualni linearni program lahko spet rešimo grafično, ker imamo samo 2 neznanki, u in v.
Narišemo premici:

$u + 3v = 3$

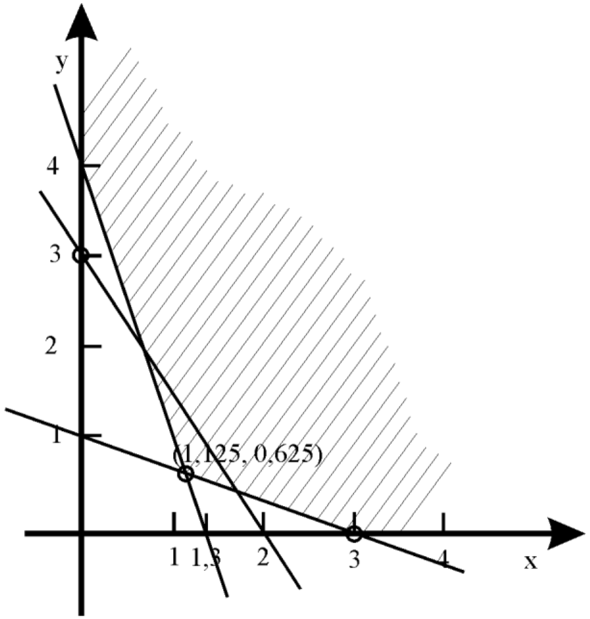
$3u + v = 4$

in vzorčno premico $24u + 16v = 48$, ki jo pomikamo navzdol, dokler ne zapustimo množice rešitev. To je v točki
($u=1,125$ in $v=0,625$).
V tej točki je vrednost ciljne funkcije $24u + 16v = 37$.

Vrednost ciljne funkcije primarnega in dualnega linearnega programa je pri optimalni rešitve vedno ista.

Ker je u≠0, to pomeni, da je surovina P 100% izkoriščena. Povečanje kapacitete surovine P za 1 enoto, nam bi povečalo dobiček za 1,125 de.
Če pa bi bil u v optimalni rešitvi dualnega linearnega programa enak nič, pa surovina P ne bi bila izkoriščena in povečanje kapacitet te surovine ne bi povečalo dobička.

Analogno velja za dualno spremenljivko v.



2. PREHRAMBENI PROBLEM KOT PRIMER LINEARNEGA PROGRAMIRANJA

Vsebinska formulacija:
Problem, ki ga rešujemo, je: kako naj planira družina dnevni nakup dveh vrst živil HR_1 in HR_2 da bo zadostila svojim minimalnim fiziološkim potrebam po vitaminih V_1 in V_2 in da bo imela pri nakupu čim manj izdatkov. Podatki so zbrani v preglednici. Iz nje je razvidno, da ena enota HR_1 vsebuje 1 enoto V_1 in 3 enote V_2 ter stane eno denarno enoto, ena enota HR_2 pa vsebuje 3 enote V_1 in 2 enoti V_2 ter stane prav tako eno denarno enoto.

Živilo / Struktura	HR_1	HR_2	Potrebe (omejitve)
V_1	1	3	11
V_2	3	2	12
Cena za enoto živila	1	1	
Količina živila	x	y	

Matematična formulacija problema:

Če je x količina HR_1 in y količina HR_2, ki ju bo družina kupila in zaužila, da bo zadostila minimalnim potrebam po obravnavanih vitaminih in imela najmanjše stroške za nakup, problem predstavimo v obliki naslednjega linearnega programa:

$$x \geq 0, \quad y \geq 0$$

$$x + 3y \geq 11$$

$$3x + 2y \geq 12$$

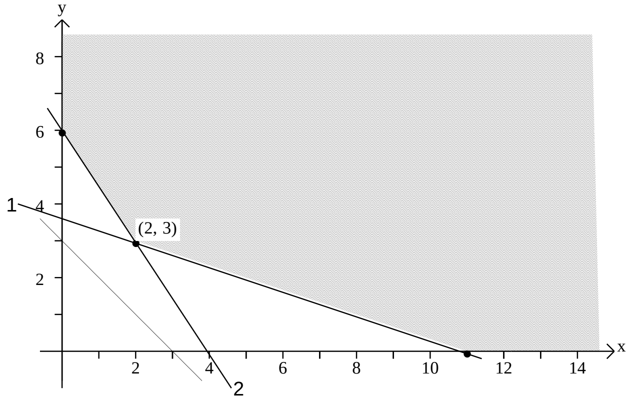
$$f(x,y) = x + y \quad \min$$

Reševanje problema:

Problem rešimo grafično, kot je prikazano na sliki. Za f(x,y,) smo izbrali poljubno premico x + y = c (c je poljubna konstanta), in sicer v našem primeru premico x + y = 3, ki je na sliki prikazana črtkano. Narisali smo premici:

1.	x	+	3y	=	11	
2.	3x	+	2y	=	12,	

ki določata polravnini. Premica x + y = 3 (za c smo izbrali 3), ki predstavlja ciljno funkcijo, doseže minimum (vrednost 5) v točki (2,3).



<u>Diskusija rešitve</u>:

Ker je optimalna rešitev v sečišču premic, z dvema enotama HR_1 in tremi enotami HR_2 dobimo natančno 11 enot V_1 in 12 enot V_2. Če optimalna rešitev izpolni enačbo, je "dualna spremenljivka različna od nič. Njena vrednost v tem primeru pove, za koliko se spremeni ciljna funkcija, če spremenimo zahteve po vitaminih. Če pa bi optimalna rešitev ustrezala neenačbi (nastopalo bi odstopanje navzgor), bi bila dulana spremenljivka enaka nič.

Pri prehrambenem problemu torej razmislimo še o dualnem programu. V primarnem programu smo se vprašali po takem izboru vitaminov (V_1 in V_2), da je skupna nabavna cena najmanjša. Lahko pa želimo, da bo vrednost nabavljenih vitaminov največja, kar je zahteva v dualnem linearnem programu. Vrednost dualne spremenljivke predstavlja torej vrednost posamezne sestavine (vitaminov). Ker imamo v primarnem linearnem programu dve omejitvi (zahtevi), imamo v dualnem torej dve spremenljivki u in v. u je torej vrednost V_1 in v je vrednost V_2. Vrednost vitaminov, ki so v HR_1, naj ne bo večja od cene HR_1, torej $u + 3v \leq 1$. Analogno sklepamo za HR_2 in dobimo naslednji linearni program:

$$
\begin{array}{lllll}
u \geq 0 & & v \geq 0 & & \\
u + 3v \leq 1 & & & & \\
3u + 2v \leq 1 & & & & \\
f(u,v) = 11u + 12v & \max & & &
\end{array}
$$

Vrednosti za u in v poiščite grafično:

u = 0,14205714
v = 0,28571429

u = 0,14205714 pomeni, da je vrednost ene enote vitamina V_1 v najcenejšem prehranjevanju 0,14205714 denarnih enot (DE).
Če bi dobili z optimalno rešitvijo več vitaminov, kot smo jih zahtevali, bi bila vrednost teh vitaminov nič, kar razlagamo z dejstvom, da smo z najcenejšim prehranjevanjem plačali le toliko vitaminov, kot smo jih zahtevali, ostale pa smo dobili zastonj.

3. Transportni problem kot primer linearnega programiranja

Vsebinska formulacija:
Dva obrata (I, II) oskrbujeta 3 trgovine (A, B, C). Obrat I pripravi za te tri trgovine dnevno 50 ton, obrat II pa 40 ton naročene mešanice. Trgovina A naroči dnevno 30 ton, trgovina B 40 ton, trgovina C pa 20 ton mešanice, ki jo dobi iz obrata I oziroma obrata II. Transportni stroški za tono mešanice od posameznih obratov do trgovin so razvidni iz preglednice. Kako moramo usmeriti transport od obratov I oziroma II do trgovin A, B, C, da bodo izpolnjeni vsi zahtevani pogoji in da bodo transportni stroški najmanjši?

	Trgovina			
	A	B	C	Proizvodnja
Obrat I	150	160	200	50
Obrat II	220	200	230	40
Naročila	30	40	20	90

Matematična formulacija:

Zastavljeni transportni problem bomo rešili z linearnim programom. Najprej vpeljimo neznanki x in y. Količina mešanice, ki bo prepeljana iz obrata I v trgovino A, naj bo x, y pa naj bo količina mešanice iz obrata I, ki bo pripeljana v trgovino B. Ker ima obrat I na razpolago le 50 ton mešanice, bo lahko v trgovino C pripeljal le 50 - x - y ton mešanice. Podobno razmišljamo za količino mešanice, ki bo transportirana od obrata II do trgovine A (ta količina bo 30 - x), do trgovine B (ta količina bo 40 - y) in do trgovine C (ta količina bo x + y - 30). Vse te neznanke pregledno zapišemo v preglednici, kjer neznanke (transportirane količine) vpišemo na sredino polja, stroške pa v desni zgornji del polja.

	Trgovina			
	A	B	C	Proizvodnja
Obrat I	150 x	160 y	200 50 - x - y	50
Obrat II	220 30 - x	200 40 - y	230 x + y - 30	40
Naročila	30	40	20	90

Omejitve linearnega programa dobimo na osnovi zahteve, da je transportirana količina lahko le nenegativna, ciljna funkcija pa zahteva, da morajo biti skupni transportni stroški minimalni.

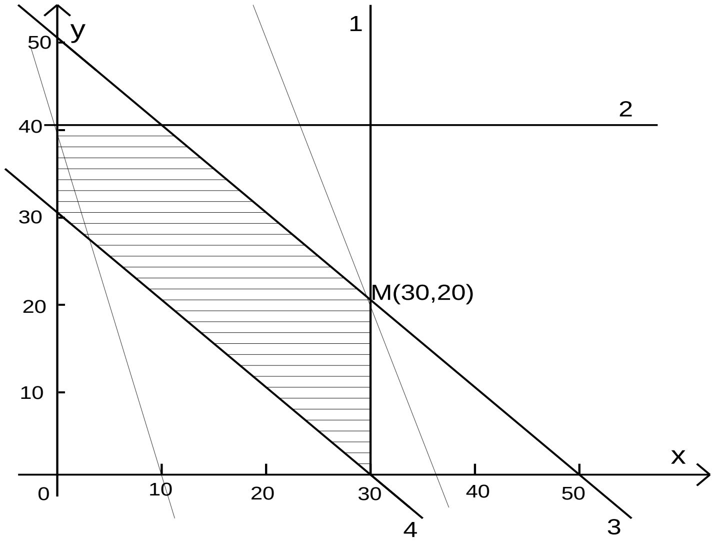
$$\begin{array}{lclcl} x & \geq & 0,y & \geq & 0 \\ x & + & 3y & \leq & 24 \\ 3x & + & y & \leq & 16 \\ 4x & + & y & \leq & 20 \end{array}$$

$f(x,y) = 150x + 160y + 200(50-x-y)+220(30-x)+200(40-y)+230(x+y-30)= 17700 - (40x + 10y)\min \rightarrow 40x + 10y \max$

Reševanje problema:

Ker imamo samo dve neznanki, lahko problem rešimo grafično. Grafično lahko rešujemo transportne probleme do razsežnosti 2x3 ali 3x2.

V našem primeru smo narisali premice: $30 - x = 0$, $40 - y = 0$, $50 - x - y = 0$ in $x + y - 30 = 0$, ki glede na omejitve določajo množico možnih rešitev. Kot vzorčno ciljno funkcijo smo izbrali premico $40x + 10y = 400$, ki je na sliki narisana črtkano. Ker iščemo maksimum ciljne funkcije, vzorčno premico premikamo navzgor. Množico zapusti v točki (30, 20), ki predstavlja optimalno rešitev. Rešitev je $x = 30$ in $y = 20$, $f(30,20) = 16300$.



	Trgovina			
	A	B	C	Proizvodnja
Obrat I	30	20	0	50
Obrat II	0	20	20	40
Naročila	30	40	20	90

Še nekaj specialnih primerov transportnega problema za utrjevanje:

1. Degeneracija transportnega problema linearnega programiranja

Proizvajalca A in B, ki proizvedeta 6 oziroma 8 enot istega blaga, oskrbujeta s tem blagom potrošnika P in Q, ki sta pri A oziroma B naročila 8 in 6 enot. Kako naj usmerimo transport od proizvajalcev A in B do potrošnikov P in Q, da bosta ta dva dobila naročeno blago in da bodo transportni stroški najmanjši, če poznamo transportne stroške za prevoz ene enote blaga na posameznih relacijah in so podani v preglednici:

	Potrošnika		
	P	Q	Proizvodnja
Proizvajalec A	6	3	6
Proizvajalec B	2	5	8
Naročila	8	6	14

<u>Reševanje problema:</u>

V tem primeru je dovolj, da vpeljemo le eno neznanko x. Iskane količine vpišemo na v prejšnjem primeru predloženi način

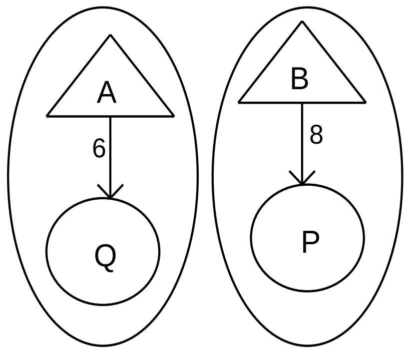
	Potrošnika		Proizvodnja
	P	Q	
Proizvajalec A	6 x	3 6 – x	6
Proizvajalec B	2 8 - x	5 x	8
Naročila	8	6	14

Omejitve so: $x \geq 0$, $6 - x \geq 0$, $8 - x \geq 0$.

Ciljna funkcija : $6x + 3(6-x) + 2(8-x) + 5x = 34 + 6x$ min

Vse omejitve se dajo zreducirati na eno samo: $0 \leq x \leq 6$, ki predstavlja konveksno množico (v tem primeru daljico s krajiščima $x = 0$ in $x = 6$) z ekstremnima točkama 0 in 6. Po teoriji linearnega programiranja ima ciljna funkcija $34 + 6x$ minimum v eni ekstremni točki; v našem primeru torej v ekstremni točki $x = 0$.

Optimalna rešitev je torej x = 0, stroški pri tej rešitvi pa znašajo 34 DE. Glede na to rešitev dosežemo najnižje transportne stroške, kadar proizvajalec A sam oskrbuje potrošnika Q, proizvajalec B pa potrošnika P:



Proizvajalec A se je povezal s potrošnikom Q, B pa s P. Takšnemu razpadu sistema rečemo tudi **degeneracija transportnega problema.**

2 . Neskončno rešitev transportnega problema linearnega programiranja
Obravnavajmo transportni problem:

	Potrošnika		Proizvodnja
	P	Q	
Proizvajalec A	1	2	9
Proizvajalec B	3	4	16
Naročila	6	19	25

Reševanje problema:

Vpeljemo neznanko x in iskane transportne količine zapišemo v preglednici:

	Potrošnika		Proizvodnja
	P	Q	
Proizvajalec A	1 x	2 $9 - x$	9
Proizvajalec B	3 $6 - x$	4 $10 + x$	16
Naročila	6	19	25

Omejitve $x \geq 0$, $9 - x \geq 0$, $6 - x \geq 0$, $10 + x \geq 0$ združimo v eno samo: $0 \leq x \leq 6$. Ciljna funkcija pa je: $x + 2(9-x) + 3(6-x) + 4(10+x) = 76$. Le ta je neodvisna od x in ima vrednost 76 pri vsakem $x \in [0,6]$, kar pomeni, da ima problem neskončno optimalnih rešitev (celotna spojnica ekstremnih točk 0 in 6).

3. Transportni problem linearnega programiranja s ponudbo, večjo od povpraševanja
Vsi transportni problemi, ki smo jih do sedaj rešili, so imeli lastnost, da je bila ponudba enaka povpraševanju, ali proizvodnja enaka potrošnji (naročilom). Z uporabo metode linearnega programiranja lahko rešimo tudi transportni problem, če je ponudba večja od povpraševanja. Vzemimo primer, ko imamo proizvajalca A in B in potrošnika P in Q. Ponudba, naročila in transportni stroški na posameznih relacijah so podani v preglednici:

	P	Q	Proizvodnja
Proizvajalec A	4	5	8
Proizvajalec B	3	6	10
Naročila	5	7	12 / 18

Reševanje problema:

Problem preoblikujemo najprej v transportni problem, pri katerem je ponudba enaka povpraševanju. To naredimo tako, da uvedemo fiktivnega potrošnika S, ki naroči preostanek blaga, oziroma odvečno količino proizvedenega blaga uskladiščimo. Transportni stroški od proizvajalcev A in B do potrošnika (skladišča) S pa morajo biti manjši od stroškov na relacijah od A do P in Q ter od B do P in Q, ker je naš cilj, da imamo v optimalni rešitvi (to je pri najmanjših transportnih stroških) na relaciji od A oziroma B do S odvečno količino proizvedenega blaga (neničelna rešitev).
Zaradi poenostavitve računanja privzamemo, da so transportni stroški od A in B do S kar 0. Problem, predstavljen v razširjeni obliki, je zapisan v preglednici:

	Potrošniki			Proizvodnja
	P	Q	S	
Proizvajalec A	4	5	0	8
Proizvajalec B	3	6	0	10
Naročila	5	7	6	18

Reševanje problema:

Vpeljemo neznanki x in y:

	Potrošniki			Proizvodnja
	P	Q	S	
Proizvajalec A	4 x	5 y	0 $8 - x - y$	8
Proizvajalec B	3 $5 - x$	6 $7 – y$	0 $x + y - 2$	10
Naročila	5	7	6	18

Problemu prirejeni linearni program pa je:

$x \geq 0, \quad y \geq 0$

$5 - x \geq 0$

$7 - y \geq 0$

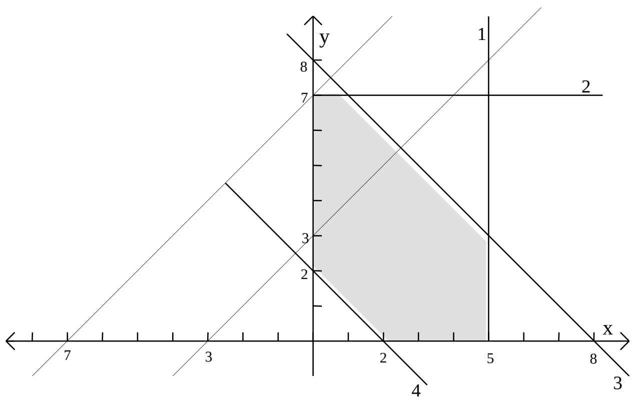
$8 - x - y \geq 0$

$x + y - 2 \geq 0$

$$4x + 5y + 0(8-x-y) + 3(5-x) + 6(7-y) + 0(x+y-2) = x - y + 57 =$$

$$= 57 - (y-x) \min \rightarrow y - x \max$$

Problem je grafično rešen na sliki, kjer je črtkano narisana vzorčna premica ciljne funkcije y - x = 3.



Optimalna rešitev je x = 0, y = 7, stroški pa so 50 DE. Optimalna rešitev je predstavljena v preglednici, iz katere je razvidno, da mora pri najcenejšem transportu A uskladiščiti 1 enoto, B pa 5 enot proizvedenega blaga.

	Potrošniki			
	P	Q	S	Proizvodnja
Proizvajalec A	0	7	1	8
Proizvajalec B	5	0	5	10
Naročila	5	7	6	18

4. Transportni problem linearnega programiranja s ponudbo, manjšo od povpraševanja

V preglednici je prikazan transportni problem proizvajalcev A in B ter potrošnikov P in Q. Ker je ponudba manjša od povpraševanja, moramo v problem vpeljati fiktivnega proizvajalca, recimo proizvajalca C, ki proizvede manjkajočo količino materiala.

	Potrošnika		Proizvodnja
	P	Q	
Proizvajalec A	2	4	8
Proizvajalec B	4	5	18
Naročila	15	20	35 / 26

Transportni stroški od proizvajalca C do potrošnikov P in Q morajo biti veliki v primerjavi s transportnimi stroški na drugih relacijah. S tem zagotovimo, da bo fiktivni proizvajalec C prišel v optimalno rešitev le z minimalno potrebno količino. V našem primeru vzemimo, da so ti stroški, na primer, 50 DE.

	Potrošnika		Proizvodnja
	P	Q	
Proizvajalec A	2	4	8
Proizvajalec B	4	5	18
Proizvajalec C	50	50	9
Naročila	15	20	35

Reševanje problema:

Neznanki x in y uvedemo v preglednico

	Potrošnika		Proizvodnja
	P	Q	
Proizvajalec A	2 x	4 8 - x	8
Proizvajalec B	4 y	5 18 - y	18
Proizvajalec C	50 15 - x - y	50 x + y - 6	9
Naročila	15	20	35

Problemu prirejeni linearni program pa je:

$$x \geq 0, \quad y \geq 0$$
$$15 - x \geq 0$$
$$8 - y \geq 0$$
$$18 - x - y \geq 0$$
$$x + y - 6 \geq 0$$
$$f(x,y) = 2x + y \quad \max$$

$$2x + 4y + 50(15-x-y) + 4(8-x) + 5(18-y) + 50(x+y-6) = -2x - y + 572$$

$$= 572 - (2x+y) \min \rightarrow 2x + y \max$$

Rešitev poiščemo grafično in je zapisana v preglednici, iz katere je razvidno, da bo potrošnik P prejel vseh 15 naročenih enot blaga, potrošnik Q pa od naročenih 20 enot le 11 enot, ker so transportni stroški od A oziroma B do njega večji kot do potrošnika P. Pri tej optimalni rešitvi so transportni stroški 99 DE (8 . 2 + 7 . 4 + 11 . 5).

	Potrošnika		Proizvodnja
	P	Q	
Proizvajalec A	8	0	8
Proizvajalec B	7	11	18
Proizvajalec C	0	9	9
Naročila	15	20	35

Povzetek poglavja:

1. Množico rešitev linearne neenačbe z dvema neznankama predstavimo grafično kot polravnino ravnine (xy).
2. Rešitev sistema linearnih neenačb z dvema neznankama dobimo grafično kot presek polravnin, ki jih določajo posamezne neenačbe.
3. Rešitev sistema linearnih neenačb je lahko neskončno, lahko je ena sama ali pa ni rešitve.
4. Linearni program je vsak problem, pri katerem spremenljivke zadoščajo pogojem nenegativnosti, sistemu linearnih neenačb in za katere ima linearna funkcija, definirana na množici rešitev, ki jo določajo te neenačbe, ekstrem. Rešitev linearnega programa je ali eno oglišče te množice ali dve oglišči (v tem primeru tudi celotna spojnica teh dveh točk) ali pa rešitve ni (množica rešitev je v tem primeru prazna).
5. Linearni program z dvema neznankama lahko rešimo grafično.
6. Vsakemu linearnemu programu lahko priredimo dualni linearni program.
7. Glede na vsebino problema smo spoznali linearne programe proizvodnih, mešalnih in transportnih problemov.

➢ Vprašanja za ponavljanje in razpravo:

1. Kako rešujete sisteme linearnih neenačb in kakšne rešitve lahko dobite?
2. Kaj je linearni program? Kakšne so v splošnem rešitve linearnega programa?
3. Katere linearne programe lahko rešujemo grafično in kako poteka to reševanje?
4. Katere probleme linearnega programa poznate glede na vsebino problema?
5. Kakšen pomen ima dualni linearni program?