AGRONOMIJA + ZOOTEHNIKA-ŽIVILSTVO IN PREHRANA

1. letnik BSc

MATEMATIKA/MATEMATIČNE MEOTDE
7. del

MREŽNO PLANIRANJE

Kaj bomo spoznali v tem poglavju:

1. Osnovne pojme iz teorije grafov
2. Definicijo mrežnega plana
3. Mrežni plan, kritično pot in Ganttov diagram
4. Računanje kritične poti in rezerve časa nekritičnih aktivnosti

Vse metode mrežnega planiranja temeljijo na algebri, matematični statistiki in teoriji grafov.
Tako bomo najprej definirali nekaj znanih pojmov iz teorije grafov.

OSNOVE TEORIJE GRAFOV

Graf tvorita neprazna množica točk $V = \{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ in relacija R, definirana na množici V in je podmnožica kartezičnega produkta V x V:

$R \subset V \times V = \{(v_i, v_j), i = 0,1,2, \ldots, n; j = 0,1,2, \ldots, n\}$.

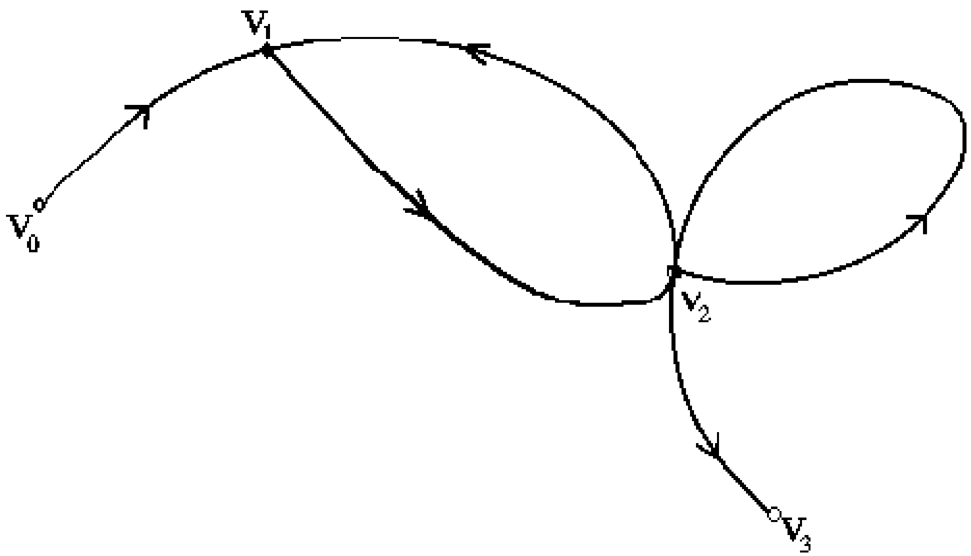
Relacijo R predstavimo grafično kot spojnico točk v_i in v_j. Puščica na tej spojnici je usmerjena od točke v_i k točki v_j. Glede na takšno grafično predstavitev imenujemo elemente množice V vozlišča, elemente množice R pa povezave (slika spodaj).

Na sliki je prikazan graf, ki ima štiri vozlišča, in sicer:

$V = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$

in pet povezav:

$R = \{(v_0, v_1), (v_1, v_2), (v_2, v_1), (v_2, v_2), (v_2, v_3)\}$.



Slika: Graf s štirimi vozlišči in petimi povezavami.

Povezava, ki se začne in konča v istem vozlišču, je **zanka**. Tako je na sliki zgoraj zanka povezava (v_2, v_2). Del grafa, v katerem se začetno vozlišče naslednje povezave ujema s končnim vozliščem prejšnje, imenujemo **pot.** Na sliki predstavljajo pot povezave (v_0, v_1), (v_1, v_2) in (v_2, v_3). **Krožna pot** pa je pot, v kateri se začetna točka ujema s končno. Na sliki tvorita povezavi (v_1, v_2) in (v_2, v_1) krožno pot. Najkrajša krožna pot je seveda zanka.

Graf je **krepko povezan**, če med poljubnima vozliščema v_i in v_j obstaja vsaj ena pot. Vozlišče, v katerem se pri povezanem grafu ne konča nobena povezava, je **vhod** grafa (vozlišče v_0), vozlišče, v katerem se pri povezanem grafu ne začne nobena povezava, pa je **izhod** grafa (vozlišče v_3). Graf ima lahko tudi več vhodov in izhodov.

Vsaki povezavi (v_i, v_j) lahko priredimo neko **število t_{ij},** ki ga imenujemo **vrednost povezave**. V krepko povezanem in ovrednotenem grafu brez zank in krožnih poti, z enim vhodom in enim izhodom, nas zanima **maksimalna pot** med vozliščema v_i in v_j. To je tista pot, ki se začne v vozlišču v_i in konča v vozlišču v_j in ki ima glede na vrednost povezav na tej poti največjo vrednost, pri predpostavki, da vrednosti povezav lahko seštevamo, ko potujemo po tej poti v smeri od v_i do v_j. Tako vsakemu vozlišču v_i grafa lahko pripišemo vrednost vozlišča, ki jo bomo označili s s_i, ki jo bomo imenovali **maksimalna vrednost vozlišča** v_i.

Izračunamo jo retrogradno s pomočjo Bellmanovih rekurzijskih enačb. Pri tem damo izhodu, to je vozlišču v_n, vrednost 0 ($s_n = 0$) in vrednost vozlišča v_i, označeno s s_i, računamo retrogradno po formuli:

$$\boxed{s_i = \max_{k \in K_i} \left(s_k + t_{ik} \right)}$$

za $i = n - 1, n - 2, \ldots, 0$, če predpostavimo, da gre pot v grafu od vhoda v_0 do izhoda v_n, in da je K_i množica vseh tistih vozlišč v_k, s katerimi je vozlišče v_i neposredno povezano. Vrednost s_k je torej vrednost vozlišča v_k, ki je glede na zgornjo enačbo maksimalna vrednost poti od v_k do v_n. Pot vodi torej od v_i preko v_k do v_n, tako da je v_k vozlišče, ki sledi vozlišču v_i.

DEFINICIJA MREŽNEGA PLANA

Mrežno planiranje se ukvarja s kontrolo in vodenjem procesov ter njihovim časovnim in stroškovnim planiranjem. Tako moramo pri mrežnem planiranju najprej dobro poznati (definirati) vse aktivnosti (dejavnosti), ki v procesu nastopajo, in njihovo trajanje. Aktivnosti bomo označevali z velikimi črkami, A, B, C,... Vsaka aktivnost se mora v nekem trenutku začeti in enako tudi končati. Trenutke imenujemo dogodke, ki jih bomo označevali kot v_i ($i = 0,1,2,\dots,n$). Proces se torej začne v trenutku v_0 in konča v trenutku v_n. Če aktivnost A poteka od dogodka v_i do dogodka v_k, označimo njeno trajanje s t_{ik}.

Mrežni plan je končen, ovrednoten graf brez zank in krožnih poti, z enim vhodom in enim izhodom. Vozlišče grafa imenujemo v mrežnem planiranju dogodek, povezavo pa dejavnost (aktivnost). Vrednost povezave imenujemo trajanje aktivnosti, maksimalno pot od vhoda mrežnega plana, to je dogodka v_0, do izhoda mrežnega plana, to je dogodka v_n, pa v mrežnem planu imenujemo **kritična pot**.

To poiščemo tako, da rešimo sistem Bellmanovih rekurzijskih enačb za s_i, kot je zapisano v enačbi v poglavju Osnove teorije grafov, s tem da začnemo v izhodu v_n mrežnega plana, ki mu pripišemo vrednost $s_n = 0$ in gremo proti vhodu v_0 mrežnega plana.

Glede na poznavanje trajanja posameznih aktivnosti pa bomo v mrežnem planiranju ločili dve metodi:

1) Metodo CPM uporabljamo tam, kjer lahko trajanje posameznih aktivnosti natančno določimo iz razpoložljivih podatkov (trajanje aktivnosti je determinističen podatek).
2) Metoda PERT/TIME uporabljamo v primerih, ko trajanja posameznih aktivnosti ni mogoče vnaprej natančno določiti, ker je odvisno od vrste dejavnikov in slučajnosti. Pri tej metodi moramo trajanje aktivnosti A, ki se na primer začne v dogodku v_i in traja do dogodka v_k, oceniti s tremi vrednostmi, in sicer z optimističnim (najkrajšim možnim) časom t_o, pesimističnim (najdaljšim možnim) časom t_p, najverjetnejšim (v splošnem povprečnim) časom t_n in nato izračunamo trajanje aktivnosti po formuli:

$$\boxed{t_{ij} = \frac{t_0 + 4t_n + t_p}{6}}.$$

Tu bomo uporabljali le metodo enostavne časovne analize ali CPM (Critical Path Method) metodo.

Glede na skromno teorijo mrežnega planiranja, ki smo jo tu podali, rešujemo probleme mrežnega planiranja po metodi CPM tako, da najprej naredimo tako imenovano strukturno analizo in potem še časovno analizo. Strukturna analiza pomeni izdelavo seznama aktivnosti, izdelavo pregleda povezanosti aktivnosti in izdelavo mrežnega načrta. S časovno analizo pa ugotovimo trajanje aktivnosti in kritično pot. Kritično pot lahko poiščemo tudi s pomočjo računalniških programov (taki so na primer SPJ, OPTIMA in CPM, MS Project).

ILUSTRACIJA MREŽNEGA PLANA NA PREPROSTEM PRIMERU

Vzemimo naslednji primer mrežnega plana: dva prijatelja se odločita, da bosta odšla na izlet. Pred odhodom morata opraviti proces (projekt), ki ga sestavljajo naslednje aktivnosti (dejavnosti):

1. sestanek 1, ki se ga udeležita oba in kjer se dogovorita o nadaljnjih akcijah. Sestanek 1 bomo označili z A in predpostavimo, da traja 1 uro;
2. nabava opreme, kar naj bi naredil prvi prijatelj. Aktivnost nabava opreme bomo označili z B in z njo začne prvi prijatelj takoj, ko se konča aktivnost A. Aktivnost B traja 2 uri;
3. nabava hrane, kar naj bi tudi opravil prvi prijatelj. Aktivnost nabava hrane bomo označili s C in z njo začne prvi prijatelj takoj, ko konča z aktivnostjo B. Aktivnost C naj traja 3 ure;
4. servisiranje avtomobila, kar naj bi opravil drugi prijatelj, medtem ko prvi nabavlja opremo in hrano. Aktivnost servisiranje avtomobila bomo označili z D in z njo drugi prijatelj lahko začne takoj po končani aktivnosti A. Aktivnost D naj traja 4 ure;

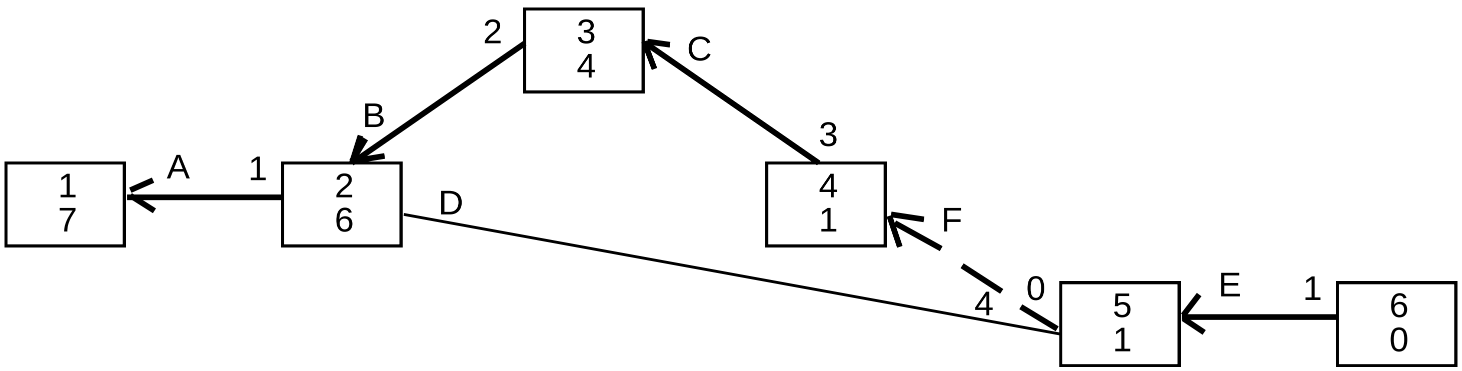
5. sestanek 2, kjer preverita, ali sta res pripravljena za odhod na izlet. Aktivnost sestanek 2 bomo označili z E. Sestanka 2 se udeležita oba prijatelja in z njo začneta takoj, ko se končata aktivnosti C in D. Aktivnost E naj traja 1 uro.

Na osnovi teh aktivnosti lahko že zapišemo seznam aktivnosti, odvisnost med aktivnostmi in trajanje aktivnosti v spodnji razpredelnici.

Preglednica: Aktivnosti mrežnega plana (primer dveh prijateljev)

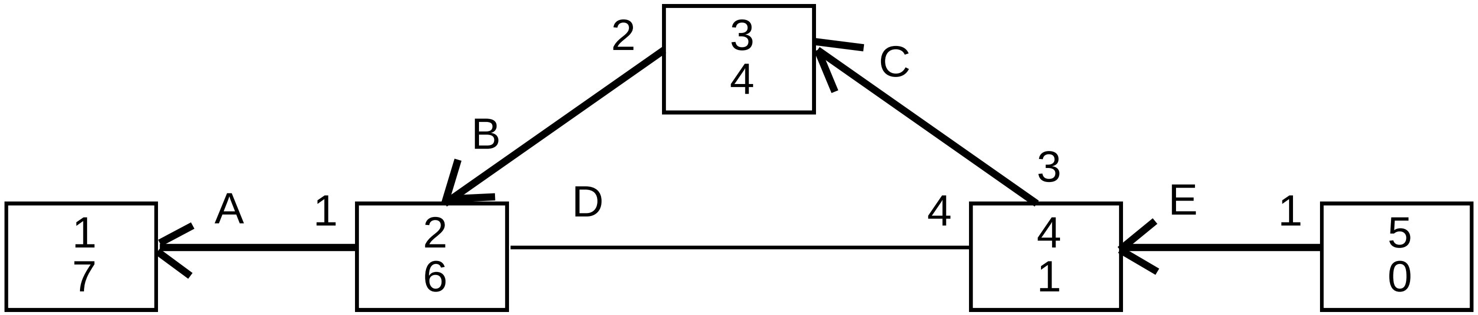
Zap. št.	Aktivnost	Oznaka aktivnosti	Odvisnost, povezanost	Trajanje (ure)	Kdo opravlja
1	sestanek 1	A	-	1	oba
2	nabava opreme	B	A	2	prvi
3	nabava hrane	C	B	3	prvi
4	servis avta	D	A	4	drugi
5	sestanek 2	E	C, D	1	oba

Ker smo privzeli, da je trajanje vseh aktivnosti natančno znano in določeno (deterministično), imamo opravka z mrežnim planom tipa CPM. Mrežni plan narišemo tako, da s kvadratom označimo dogodek, v katerem se aktivnost začne ali konča. V kvadrat najprej vpišemo zaporedno številko dogodka (zgoraj). Povezava dveh dogodkov (kvadratov) je aktivnost. Na začetku spojnice vpišemo oznako aktivnosti, na koncu pa trajanje aktivnosti. Mrežni plan za priemr dveh prijateljev je narisan na spodnji sliki.



Slika: Mrežni plan za primer dveh prijateljev

Na sliki je vrisana tudi tako imenovana navidezna aktivnost F, ki ima trajanje 0 časovnih enot. Vpeljali smo jo, da smo na sliki izrazili dejstvo, da se aktivnost E lahko začne šele, ko sta aktivnosti C in D končani. Vpeljava navidezne aktivnosti ni vedno nujna, saj lahko narišemo mrežni plan, prirejen problemu dveh prijateljev tudi tako, kot je predstavljeno na naslednji sliki.



Slika: Mrežni plan za primer dveh prijateljev

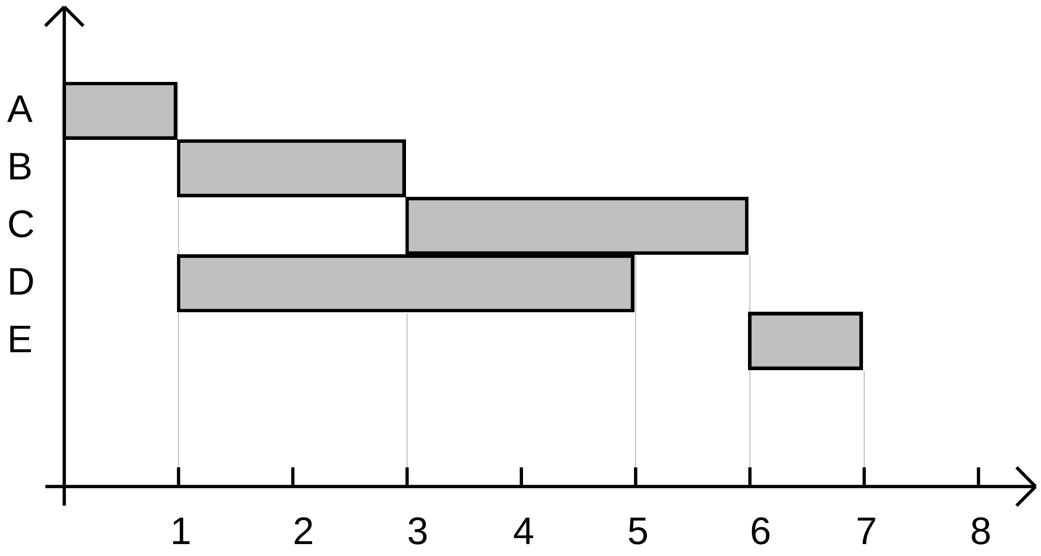
Glede na obe zgornji sliki lahko povzamemo, da je risanje mrežnega plana subjektivno delo. Kljub tej navidezni svobodi pa se moramo držati osnovnih principov, kot so:

- vsaka aktivnost se mora začeti in končati z dogodkom,
- če je konec neke (nekih) aktivnosti pogoj za začetek druge, se mora konec te (teh) ujemati z začetkom druge,
- posebno pozornost moramo posvetiti risanju aktivnosti, ki potekajo vzporedno, da teh ne narišemo kot aktivnosti, ki potekajo zaporedno (na primer aktivnost D poteka vzporedno z aktivnostma B in C),
- v enem dogodku se lahko začne ali konča več aktivnosti,
- dve različni aktivnosti ne smeta imeti začetka in konca v istem dogodku (lahko imata skupen začetek, a različen konec in obratno),
- aktivnosti se lahko sekata, a presečišče ni dogodek.

Kritično pot na zgornjih slikah smo poiskali po sistemu Bellmanovih rekurzijskih enačb za s_i, kot je zapisano v enačbi v poglavju Osnove teorije grafov, s tem da začnemo v izhodu v_n mrežnega plana (končnemu dogodku označenem kot dogodek 6), ki mu pripišemo vrednost $s_n = 0$ in gremo proti vhodu v_0 mrežnega plana (začetnemu dogodku mrežnega plana).

Iščemo torej retrogradno (od zadaj naprej) maksimum, tako da predpišemo zadnjemu dogodku, to je dogodku 6, vrednost 0. To vrednost smo zapisali v končnemu dogodku (izhodu grafa), v kvadratu spodaj. Vrednost končnega dogodka je vedno 0, kar utemeljimo z dejstvom, da je v končnem dogodku proces končan, da je do konca procesa še 0 časovnih enot. Vse nadaljnje maksimalne vrednosti dogodkov na poti od vhoda (dogodek 1) do izhoda (dogodek 6) so vpisane v ustreznem kvadratu spodaj. Kritična pot je na obeh slikah izvlečena debelo in znaša 7 ur. Aktivnosti, ki ležijo na kritični poti, so kritične aktivnosti. Zanje je značilno, da nimajo nobene rezerve časa (v našem primeru so to aktivnosti A, B, C in E). Če zakasnimo s kritično aktivnostjo, zakasnimo s celotno izvedbo plana, ker s tem podaljšamo kritično pot.

Problem mrežnega planiranja lahko namesto z mrežnim planom (sliki zograj) predstavimo tudi z Ganttovim diagramom (slika spodaj).

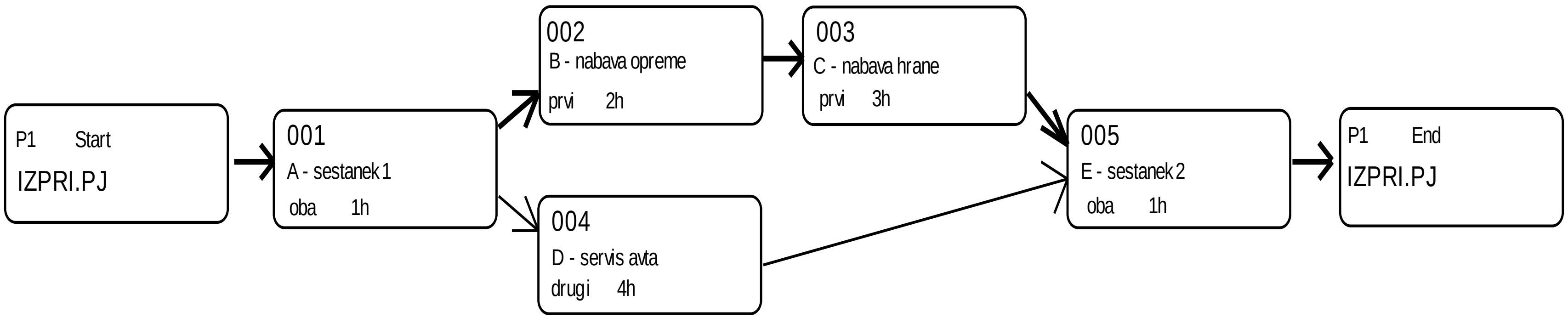


Slika: Ganttov diagram za primer dveh prijateljev

Problem mrežnega plana dveh prijateljuev lahko rešimo tudi z računalniškim programom SPJ. Pri tem opravimo naslednje korake:

1. poimenovanje programa, na primer izpri (izlet prijateljev),
2. vnos aktivnosti (create task) opravimo s tipko F3; (če se pri vnosu zmotimo, lahko aktivnost zbrišemo z "delete task", tipka F5); vnesemo aktivnosti A, B, C, D, E, kot so zapisane v preglednici zgoraj,

3. vnos povezav aktivnosti (link task) opravimo s tipko F4; (če se pri vnosu povezave zmotimo, lahko to zbrišemo z "unlink task", tipka F2); povežemo aktivnosti A - B, B - C, A - D, C - E, D - E,
4. kritično pot poiščemo z ukazom "calculate" (F9 ali !),
5. mrežni plan izpišemo z "output, plot/graph", (slika spodaj); kritična pot je izvlečena debelo,
6. Ganttov diagram lahko dobimo pod "task outline".



Slika: Mrežni plan dveh prijateljev, rešen s programom SPJ

ŠE EN PROBLEM KOT PRIMER MREŽNEGA PLANA

Vsebinska formulacija problema

Recimo, da pri izvedbi projekta nastopajo naslednje aktivnosti: odločitev (A), lokacija (B), nakup zemljišča (C), investicijsko tehnična dokumentacija (D), soglasja (E), gradbeno dovoljenje (F), projekti (G), gradnja (J), nabava in montaža strojev (K), urejanje okolice (L), šolanje kadrov (M), poskusno obratovanje (N), finančna sredstva (O), končni tehnični prevzem (P). Vse aktivnosti, njihove odvisnosti, trajanje in stroški so razvidni iz preglednice spodaj.

	aktivnost	trajanje	Stroški
oznaka	odvis. od	(meseci)	(denarne enote)
A	neodvis.	6	50
B	A	3	170
C	A	4	270
D	A	6	350
E	B	2	150
F	B,C,D	1	200
G	D	6	400
J	E,F,G	8	1800
K	E,F,G	10	1900
L	J	1	400
M	D	4	300
N	L,K,M	3	100
O	A	3	200
P	O,N	1	50

Reševanje problema

Na osnovi preglednice lahko narišemo mrežni diagram (slika spodaj) in dogodke numeriramo v naraščajočem vrstnem redu. Dogodke narišemo v obliki kvadratov. Številka dogodka je na sliki zapisana v desnem spodnjem delu kvadrata, ki predstavlja dogodek. Deset dogodkov je povezanih med seboj s 16 aktivnostmi. Uvedli smo tudi navidezni aktivnosti I in H. Z njima povemo, da se aktivnost F ne more začeti prej, kot se končata B in D. Trajanje aktivnosti smo na sliki vpisali na koncu spojnice ob puščici. Kritično pot izračunamo tako, da začnemo v končnem dogodku (izhodu), to je dogodku 10, ki mu pripišemo vrednost 0, kar je zapisano v levem zgornjem delu kvadrata, ki predstavlja dogodek 10. Nato pa retrogradno sledimo formulam:

$s_i = \max_j (s_j + t_{ij})$, $i = 9, 8, 7, ..., 1$; $s_{10} = 0$.

Pri tem smo predvideli, da je j indeks vseh tistih dogodkov, ki so z dogodkom i povezani, in sicer na poti od vhoda (dogodek 1) do izhoda (dogodek 10). Vrednost s_i zapišemo v kvadratu, ki predstavlja dogodek i, levo zgoraj. Na spojnicah označimo "maksimalne" povezave s puščico v levo. Tako na primer dobimo vrednost dogodka 6 kot:

$s_6 = \max\limits_{j=7,8}(s_j + t_{6j}) = \max(5+8, 4+10) = 14$, ki je zapisana v levem zgornjem delu kvadrata, ki predstavlja dogodek 6 (desni spodnji del istega kvadrata). Ker smo do vrednosti 14 prišli pri povezavi dogodka 6 in dogodka 8, je povezava med dogodkoma 6 in 8 (aktivnost K) označena s puščico tudi v nasprotni smeri, to je od dogodka 8 do dogodka 6. Brž ko sledimo puščicam od vhoda do izhoda, dobimo kritično pot, ki je na sliki izvlečena krepko in poteka po aktivnostih A, D, G, K, N, P ter znaša 32 mesecev (optimalna vrednost dogodka 1, zapisana v kvadratu, ki pripada dogodku 1, levo zgoraj).

Najzgodnejši začetek dogodka j, ki ga bomo označili s t_j^0, izračunamo po obrazcu:

$$\boxed{t_j^0 = \max_i \left\{ t_i^0 + t_{ij} \right\}}; \; j = 2, 3, ..., n,$$

pri čemer je $t_1^0 = 0$. t_j^0 računamo torej progresivno, tako da začnemo pri vhodu (dogodek 1) in sledimo formuli za računanje najzgodnješega zaćetka dogodka. Izračunajmo te čase za naš primer in jih sproti vpisujmo na sliki v kvadrat v desnem zgornjem delu. Tako je na primer:

$$t_8^0 = \max_{i=4,6,7} \{ t_4^0 + t_{4,8}, t_6^0 + t_{6,8}, t_7^0 + t_{7,8} \} = \max\{12+4, 18+10, 26+1\} = 28.$$

Najpoznejši nastop (začetek) dogodka i bomo označili s t_i^1 in ga izračunamo po formuli:

$$\boxed{t_i^1 = \min_j \{ t_j^1 - t_{ij} \}}; \; i = n - 1, n - 2, ..., 2, 1; \text{ in } t_n^1 = t_n^0.$$

Najpoznejši nastop dogodka i, to je t_i^1, računamo retrogradno, tako da pripišemo dogodku 10, to je izhodu, najpoznejši nastop, ki je enak najzgodnejšemu začetku. Najpoznejše nastope dogodkov zapišemo na sliki v kvadratih, ki predstavljajo ustrezen dogodek, v levem spodnjem delu. Izračunajmo in vpišimo te čase na sliki v kvadratu v levem spodnjem delu. Tako je na primer:

$$t_6^1 = \min_{j=7,8} \{ t_7^1 - t_{6,7}, t_8^1 - t_{6,8} \} = \min \{27 - 8, 28 - 10\} = 18.$$

Povejmo še enkrat, kakšen pomen imajo vrednosti, zapisane v kvadratu, ki predstavlja dogodek mrežnega plana:

s_i	t_j^0
t_i^1	i

s_i vrednost dogodka

t_j^0 najzgodnejši začetek dogodka

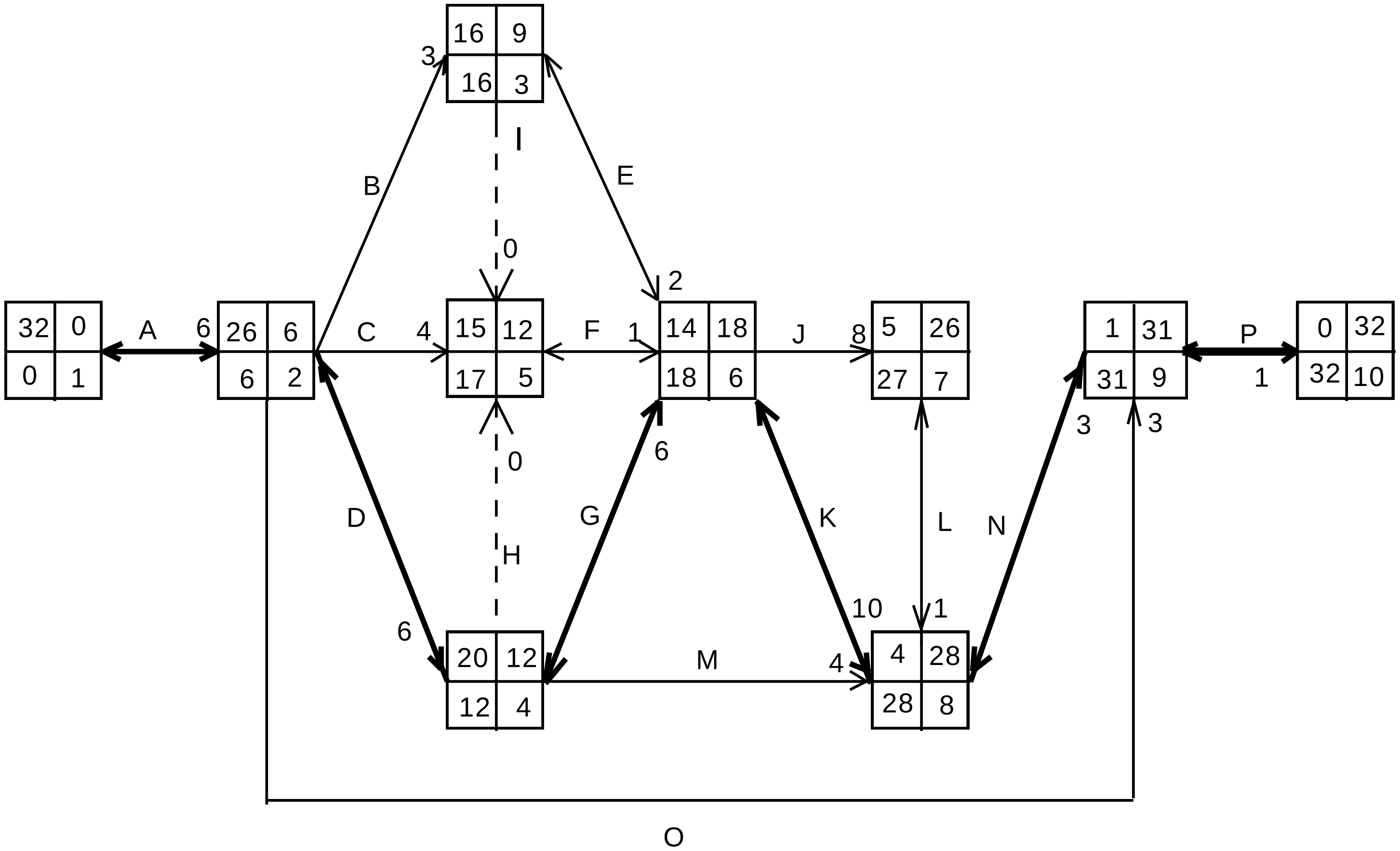
t_i^1 najpoznejši nastop dogodka

i zaporedna številka dogodka

Dogodki na kritični poti (v našem primeru dogodki 1, 2, 4, 6, 8, 9, 10) imajo enak najzgodnejši začetek in najpoznejši nastop.

Časovno rezervo aktivnosti, ki se začne v dogodku i in konča v dogodku j, izračunamo po formuli:

$$\boxed{s_{ij} = t_j^1 - t_i^0 - t_{ij}}.$$



Slika: Mrežni plan za zgornji problem

Povzetek poglavja:

1. Graf tvorita množica vozlišč in množica povezav. V ovrednotenem, krepko povezanem grafu, brez zank in krožnih poti, z enim vhodom in enim izhodom, iščemo maksimalno pot, in sicer retrogradno. Izhodu priredimo vrednost nič in nato izračunamo vrednosti vseh ostalih vozlišč po Belmannovi rekurzijski enačbi.
2. Z mrežnim planom planiramo in kontroliramo vodenje tistih procesov, pri katerih nastopa množica aktivnosti. Aktivnosti potekajo zaporedno ali pa vzporedno. Pri znanem trajanju posameznih aktivnosti iščemo kritično pot procesa, to je najkrajši čas trajanja procesa.
3. Mrežni plan je končen, ovrednoten graf brez zank in krožnih poti z enim vhodom in enim izhodom. Vozlišče grafa imenujemo dogodek, povezavo pa aktivnost. Vrednost povezave je trajanje aktivnosti, maksimalna pot pa je kritična pot. Glede na poznavanje trajanja aktivnosti ločimo dve metodi: CPM metodo in PERT/TIME metodo.
4. Probleme mrežnega planiranja rešujemo tako, da naredimo najprej strukturno analizo, to je seznam aktivnosti, povezanost aktivnosti in mrežni plan (grafičen prikaz), nato pa časovno analizo, pri kateri ugotovimo trajanje posameznih aktivnosti in poiščemo kritično pot.
5. Dogodki na kritični poti nimajo nobene rezerve časa, dogodki izven kritične poti pa imajo rezervo časa. Formula za računanje rezerve časa (formule za računanje najzgodnejšega in najpoznejšega nastopa dogodka).

Vprašanja za ponavljanje in razpravo:

1. Kaj sestavlja graf, kateri so osnovni pojmi teorije grafov in kako poiščemo maksimalno pot skozi ovrednoten in povezan graf?
2. Kakšne probleme lahko rešujemo z mrežnim planiranjem?
3. Kaj je mrežni plan? Kaj sestavlja strukturno analizo in kaj časovno?
4. Kako narišete mrežni plan? Kako določite kritično pot?
5. Kako narišete Ganttov diagram?
6. Kako izračunate rezervo časa za nekritične aktivnosti.