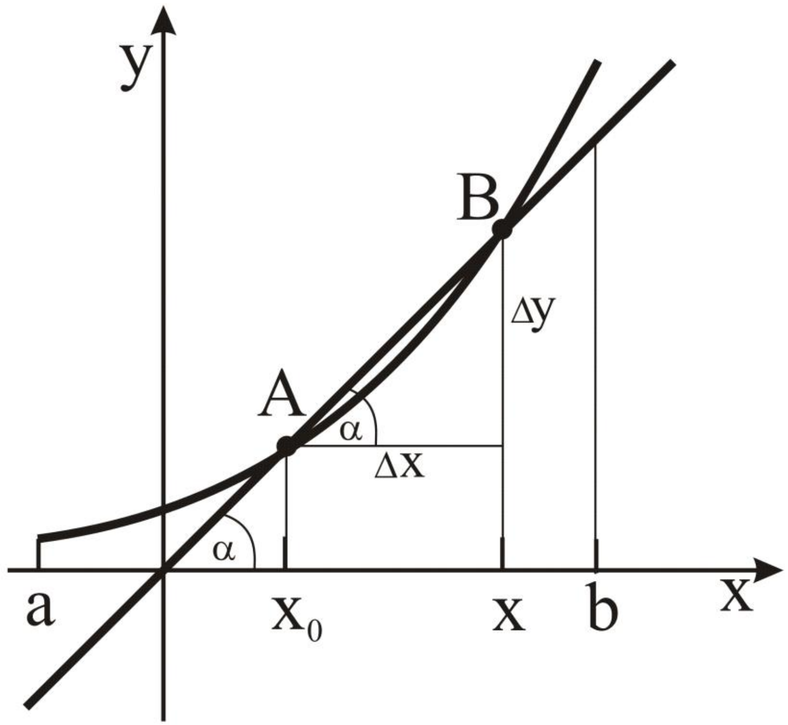
# AGRONOMIJA + ZOOTEHNIKA+ ŽP

**1. letnik BSc**

# MATEMATIKA
# 4. del

# ODVODI (Diferencialni račun)

y(x), [a,b], $x_0$ ,x $\in$ [a,b], x $\neq x_0$




$$\Delta x = h = x - x_0$$

$$\Delta y = y(x) - y(x_0) = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)$$

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ …diferenčni kvocient odvod funkcije: $\boxed{y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$

Definicija.
Če obstaja končna limita diferenčnega kvocienta, ko gre $\Delta x \to 0$, imenujemo to limito odvod funkcije y(x) v točki x ali če po predpisu poljubno majhnega ε in poljubno majhnega δ iz dejstva,

da je $|\Delta x| < \delta$ sledi, da je $\left| \frac{y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)}{\Delta x} - y' \right| < \varepsilon$, potem pravimo, da je y' odvod funkcije $y(x)$ v točki $x_0$.

## Levi in desni odvod

$$y'(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad desni \qquad y'(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad levi$$

## Geometrijski pomen odvoda

$tg\alpha = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ … naklonski kot sekante

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = tg\alpha_t = k_t$ … naklonski kot tangente

Odvod funkcije v dani točki je smerni koeficient tangente na funkcijo v isti točki.

Primer:

$y = e^{x^2} + 2x$ Zapiši enačbo tangente na krivuljo v T(0,1)

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

$$k = y'(T) = \left(e^{x^2} \cdot 2x + 2\right)(T) = 2$$

$$y - 1 = 2(x - 0)$$

$$y = 2x + 1$$

**PRAVILA ZA ODVAJANJE**

$$C' = 0$$

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(Cy)' = Cy'$$

$$(u.v)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(y(u(x)))' = y'(u).u'(x)$$

Enačba normale: y=(-1/2)x + 1

Normala je premica, ki je pravokotna na tangento $k = -\frac{1}{2}$

# Kdaj je funkcija odvedljiva?

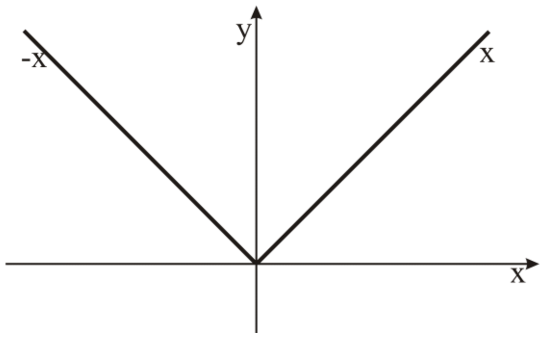
Izrek: **Funkcija je odvedljiva v točki $x_0$, kadar je v tisti točki zvezna in gladka.**
Gladka = da ni špičasta

Če je funkcija v neki točki $x_0$ odvedljiva, je v tisti točki levi odvod enak desnemu odvodu.

Če je funkcija odvedljiva, je funkcija avtomatično v tisti točki tudi zvezna. Obratno pa ni nujno res.

Če je funkcija v $x_0$ odvedljiva velja: $\lim_{x \to x_0} \Delta y = 0 \; in \; y'(x_0^+) = y'(x_0^-) = y'(x_0)$

Primer: $y = |x|$




zvezna povsod : x = ?

$$\lim_{x \to 0^+} x = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} (-x) = 0$$

leva in desna limita enaki→zvezna

ODVODI ELEMENTARNIH FUNKCIJ:

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^e x}$$

ni odvedljiva pri x = 0

$$y'(0^+) = 1$$

$$y'(0^-) = -1$$

$1 \neq -1 \Rightarrow$ funkcija ni odvedljiva

# Lastnosti odvedljivih funkcij

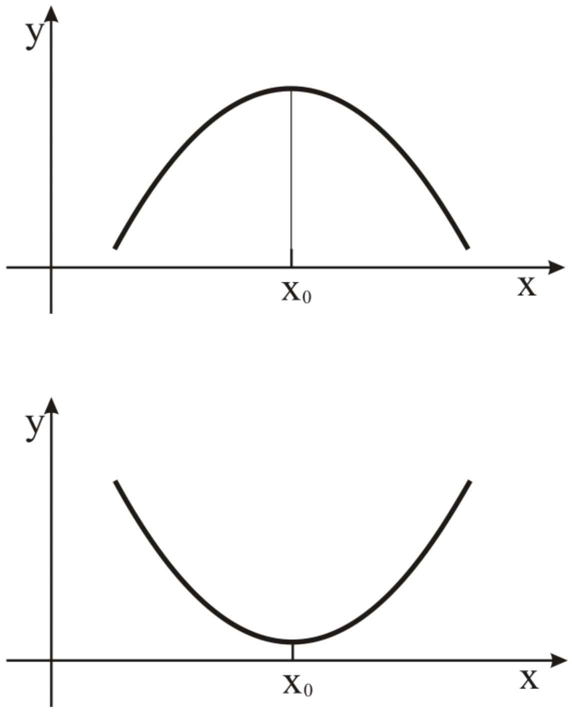
Če je v neki točki $x_0$ odvod večji kot nič, v tisti točki funkcija narašča.

$y'(x_0) > 0$ y narašča v $x_0$

- Če je v neki točki $x_0$ odvod manjši kot nič, v tisti točki f. pada

$y'(x_0) < 0$ y pada v $x_0$

- Če obstaja tak $x_0$, da je levo od $x_0$ funkcija naraščajoča, desno pa padajoča, potem pravimo, da ima funkcija v točki $x_0$ lokalni maksimum.




Obratno ima v točki $x_0$ funkcija lokalni minimum.

! FERMATOV izrek:

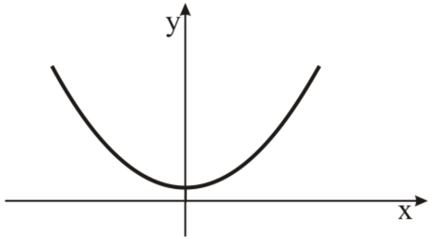
**Če ima odvedljiva funkcija v točki $x_0$ lokalni ekstrem (min, max), je v tej točki njen odvod enak O.**

# Ekstremi funkcij in prevoji

Ekstrem je lahko samo v tistih točkah $x_0$, v kateri je prvi odvod enak 0.

Primeri:

1. $y = x^2$

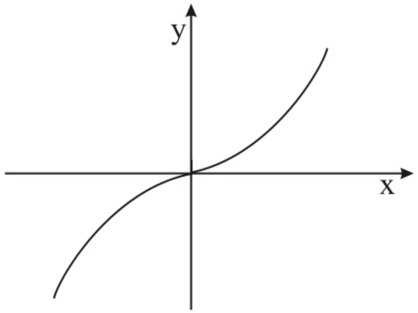



$$y' = 2x$$

$$2x = 0$$

$$x = 0$$

2. $y = x^3$




$$y' = 3x^2$$

$$3x^2 = 0$$

$$x = 0$$

ekstrema pa vseeno ni

- Rešitve enačbe y'=0 imenujemo <u>stacionarne točke</u>.
- V stacionarnih točkah ekstrem lahko je ali pa ni, drugje kot v stacionarnih točkah pa zaradi Fermatovega izreka ekstrem ne more biti.
- Če je prvi odvod levo od stacionarne točke pozitiven, desno od stacionarne točke negativen → potem je ekstrem → max
- Če je levo od stacionarne točke prvi odvod negativen, desno pa pozitiven → potem je ekstrem → minimum
- Če je levo in desno od stacionarne točke prvi odvod istega predznaka, potem v tej točki ekstrema ni

Pogosto uporabljamo kriterij drugega odvoda!

$\boxed{y''(x_0) > 0 \qquad \text{min}}$

$\boxed{y''(x_0) < 0 \qquad \text{max}}$

$y' = 2x \Rightarrow y'' = 2 > 0$ min

$y' = 3x^2 \Rightarrow y'' = 6x$

$y''(0) = 0$? ni odločitve $y''(x_0) = 0$ ni odločitve $\rightarrow$ prvi odvod!

$y = x^4$

$y' = 4x^3 = 0$

$x = 0$

$y'' = 12x^2$

$12x^2 = 0$

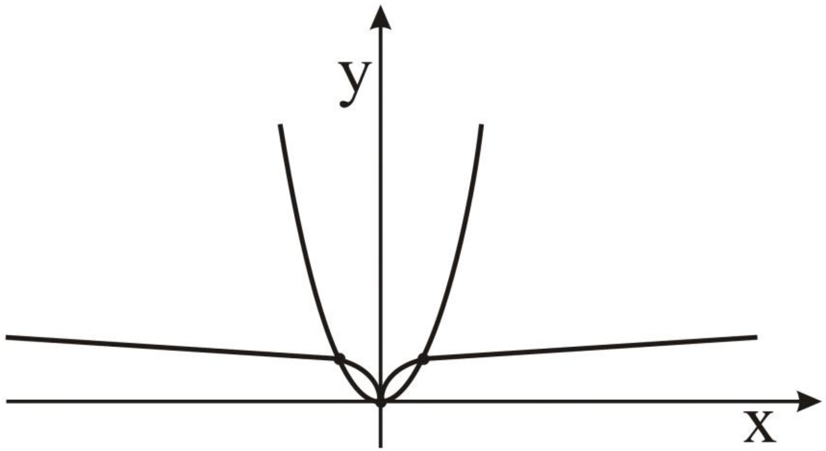
$x = 0$

$\left.\begin{array}{l} y'(-1) = -4 \\ y'(1) = 4 \end{array}\right\}$ predznak se spremeni (je ekstrem) ; najprej negat., potem pozit. $\rightarrow$ min

Primeri:

1. $y = x^{\frac{2}{3}}$

$$y = \sqrt[3]{x^2}$$




$$\left.\begin{array}{l} y'(0^+) \doteq \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{\underbrace{3\sqrt[3]{x}}_{+0}}(0^+) = +\infty \\ y'(0^-) = \frac{2}{\underbrace{3\sqrt[3]{x}}_{-0}} = -\infty \end{array}\right\}$$

funkcija je špičasta

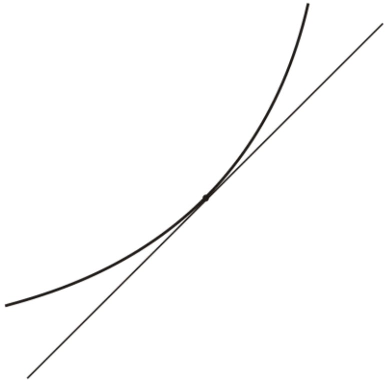
Ekstremi: $y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = 0 \Leftrightarrow 2 = 0$

Stacionarnih točk ni

$$\left.\begin{array}{l} y'(-1) < 0 \\ y'(1) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ je ekstrem}$$

iz – v + $\Rightarrow$ lokalni minimum (x = 0)

## Konveksnost, konkavnost

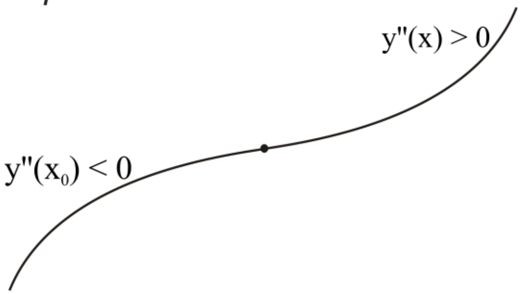


Konveksna, kadar v vsaki točki leži vsa nad tangento

$$y''(x_0) > 0$$

Konkavna, kadar v vsaki točki leži vsa pod tangento

$$y''(x_0) < 0$$




Točko v kateri preide funkcija iz konveksnosti v konkavnost, pa imenujemo prevoj.

$$y''(x_0) = 0$$

$y'''(x_0) \neq 0$ prevoj

Primeri:

1. $y = x^4$

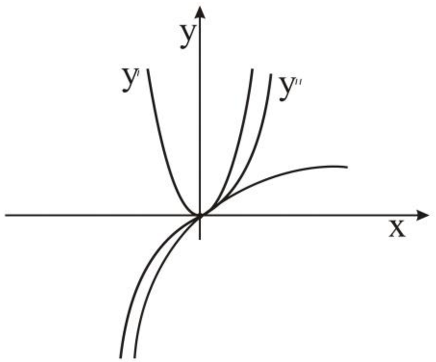
$y' = 4x^3$

$y'' > 0, x \in R$ povsod konveksna

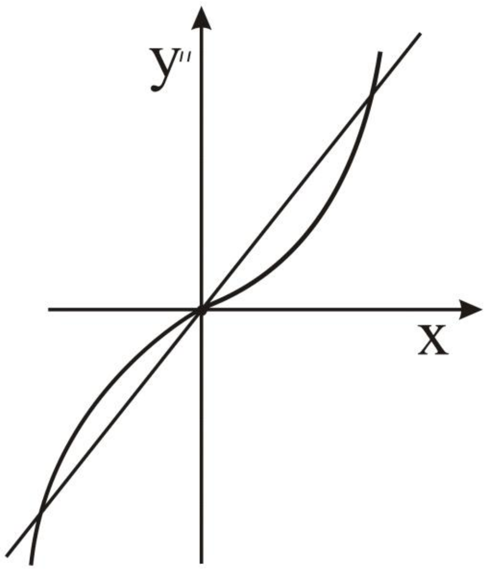
2. $y = x^3$

$y' = 3x^2$

$y'' = 6x$




- približno gibanje odvodov

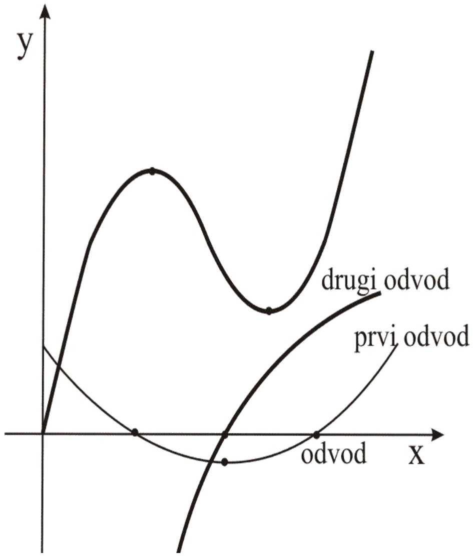



$x > 0$ konveksna

$x < 0$ konkavna

x = 0 prevoj

$y''' = 6 \neq 0$



# L'Hospitalovo pravilo

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, -\frac{0}{\infty}, \ldots$$

- $$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{2x + 3x^2} = \lim_{x \leftrightarrow \infty} \frac{2x}{2 + 6x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$
- $$y = \frac{x}{\ln x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)} = +\infty; \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\ln x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)} = 0$$

# ELASTIČNOST

ELASTIČNOST $y'^{(e)} = \dfrac{\frac{dy}{y}}{\frac{dx}{x}} = \dfrac{dy}{dx} \cdot \dfrac{x}{y} = y' \dfrac{x}{y}$

$$\boxed{y'^{(e)} = y' \frac{x}{y}}$$

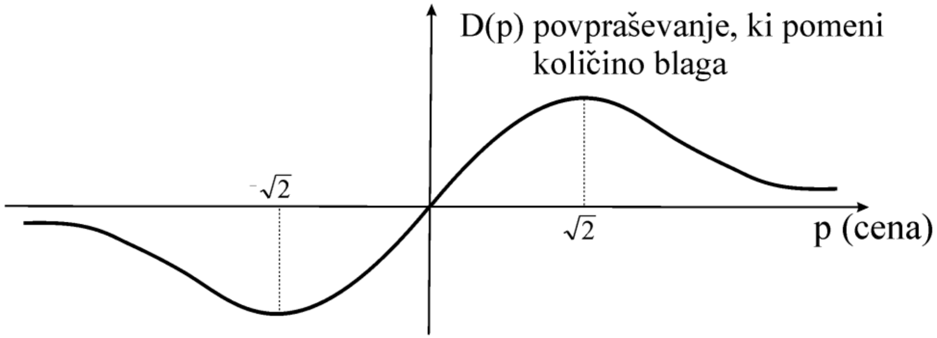
Elastičnost povpraševanja: $y'^{(e)} = -y' \dfrac{x}{y}$

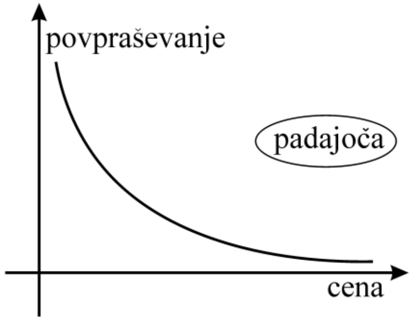
PRIMER:

Naj p pomeni ceno blaga, $D(p) = \dfrac{5p}{p^2 + 2}$ pa povpraševanje v odvisnost od cene.

Za katere p je funkcija D(p) smiselna?

Pri kateri ceni p se povpraševanje D(p) spremeni za ½ %, če se cena x = p spremeni za 1 %?




smiselno od
cene $\sqrt{2}$ dalje
$(\sqrt{2}\,,\,\infty)$

$$y'^{e} = \frac{x}{y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{dx}\cdot\frac{dy}{y} = \frac{\frac{dy}{y}}{\frac{dx}{x}}$$

$$\frac{\Delta y}{y} = y'^{(e)}\,\frac{\Delta x}{x}$$ (elastičnost pove za koliko % se spremeni y=D(p), če se x=p spremeni za 1 %.)

$$y = D(p) = \frac{5p}{p^2+2};\quad y' = D'(p) = \frac{10-5p^2}{(p^2+2)^2} = 0 \Rightarrow p = \pm\sqrt{2}$$

$$y'^{(e)} = D'^{(e)} = \frac{p}{y}\cdot y' = D'(p) = \frac{p^2-2}{p^2+2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{p = +\sqrt{6}}$$

# FUNKCIJE VEČ SPREMENLJIVK

x, x ∈ [a, b]  x … neodvisna spremenljivka

y = y(x) … funkcija ene spremenljivke

▶ $x_1, x_2, ..., x_n$  $x_1, x_2, ..., x_n$ … med seboj neodvisne

$z = z(x_1, x_2, ..., x_n)$  z funkcija n med seboj neodvisnih spremenljivk

x, y … neodv. spr.  x ∈ [a, b], y ∈ [c, d]

z = z(x,y)… z je funkcija dveh spremenljivk

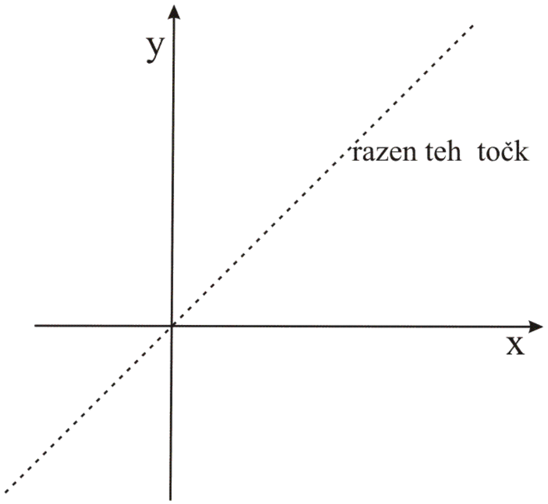
<u>Primeri</u>:

1. $z = x^2 - xy + y^2 \quad T(x, y, z)$

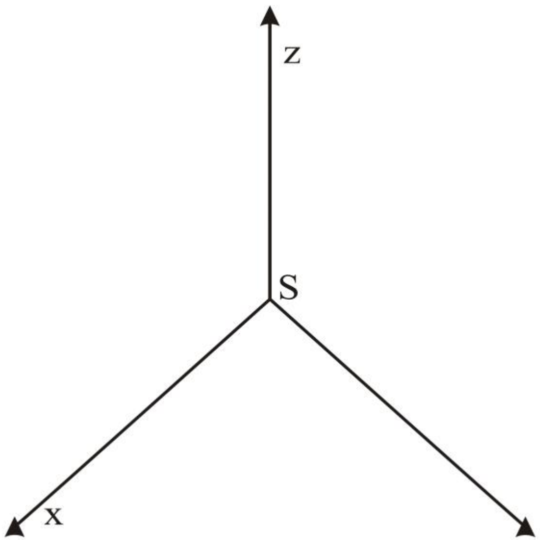
Df: $\begin{Bmatrix} x \in R \\ y \in R \end{Bmatrix}$ – definirana za vse x-e in y-e

2. $z = \dfrac{x+y}{x-y}$

Df: $\{x \in R, y \in R, x \neq y\}$




Df se sedaj riše

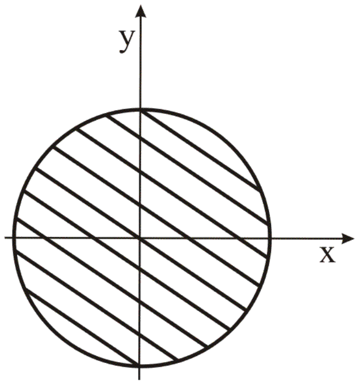


3. $z = \sqrt{1-(x^2+y^2)}$

$x^2+y^2+z^2=1\ldots$ enačba krogle

$1-(x^2+y^2) \geq 0$

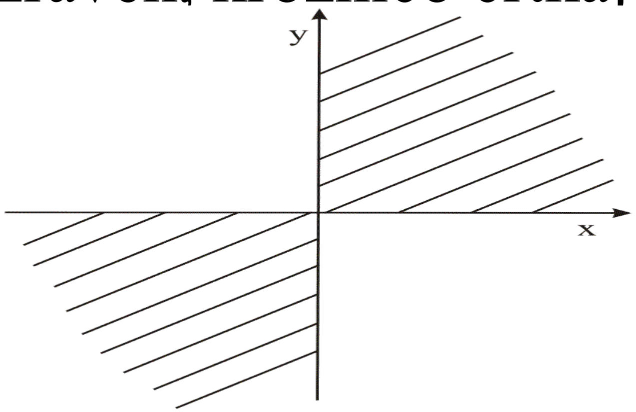
$x^2+y^2 \leq 1$




Če roba ni zraven, krožnico črtkaj!

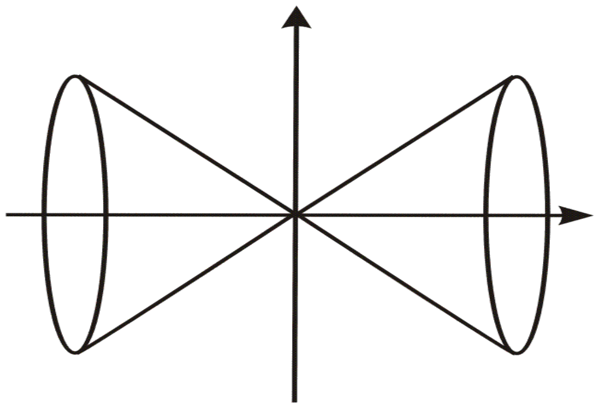
4. $z = \ln \frac{x}{y}$

$\frac{x}{y} > 0$



5. $z^2 = x^2 + y^2$ – rotacijski paraboloid

$z = \sqrt{x^2 + y^2}$ – dvojni stožec (če zavrtiš premico)



# ODVODI FUNKCIJE DVEH SPREMENLJIVK

z = z (x, y)

$$\boxed{\begin{gathered}\Delta z = z(x+\Delta x, y) - z(x)\\ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \cdot z}{\Delta x} = z'_{(x)}(x,y) = \frac{\delta z}{\delta x}\end{gathered}}$$

spreminja se samo x
odvod z-ja po x-u
PARCIALNI
ODVOD z-ja po x-u

Primer:

$$z = x^2 + 2xy, \frac{\delta z}{\delta x} = 2x + 2y$$

NE MEŠAJ S TEM !

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$2x + 2y \cdot y' = 0$$

$$y' = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\Delta z = z(x, y+\Delta y) - z(x,y) \\ \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta y} = z'_{(y)}(x,y) = \frac{\delta z}{\delta y}\end{gathered}}$$

spreminja se samo y
PARCIALNI ODVOD z-ja po y-u

$$z = x^2 + 2xy, \frac{\delta z}{\delta y} = 2x$$

odvajaš samo po y-u

Primeri:

$$z = \ln\sqrt{\frac{x}{y}}\,;$$

$$\frac{\delta z}{\delta x} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{y}}\cdot\sqrt{\frac{x}{y}}}\cdot\frac{1}{y} = \frac{1}{2x}$$

$$\frac{\delta z}{\delta y} = \frac{1}{\sqrt{\frac{x}{y}}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^{-1}\left(-xy^{-2}\right) = -\frac{1}{2y}$$

# TOTALNI DIFERENCIAL

Če se spreminjata x in y govorimo o <u>totalnem diferencialu</u> **dz**

(diferencial: $dy = y' \cdot dx$)

$$\Delta z = z(x+\Delta x, y+\Delta y) - z(x,y) =$$

$$= \underbrace{z(x+\Delta x, y+\Delta y) - z(x, y+\Delta y)}_{tu\ se\ spremin ja\ samo\ x} + \underbrace{z(x, y+\Delta y) - z(x,y)}_{tu\ se\ spremin ja\ samo\ y}$$

$$dz = \frac{\delta z}{\delta x} \cdot dx + \frac{\delta z}{\delta y} \cdot dy \qquad dx = \Delta x \qquad dy = \Delta y$$

<u>Primer</u>:

$z = x^2 + xy - y^2$ Zapiši totalni diferencial! $dz = (2x+y)dx + (x-2y)dy$

# UPORABA TOTALNEGA DIFERENCIALA

$dz = \Delta z \Leftrightarrow dx, dy$ majhna glede na $x_0$ in $y_0$

1. Valj ima polmer 35 cm in višino 40 cm. Pri merjenju je napaka 0,1 cm. S kolikšno absolutno (relativno) napako je izračunana prostornina valja?

r = 35

$V = \pi r^2 v$

v = 40

$\Delta$r = dr = 0,1

$\Delta$v = dv = 0,1

$$\Delta V = dV = 2\pi \cdot r \cdot v \cdot dr + \pi \cdot r^2 \cdot dv =$$

$$2\pi \cdot 35 \cdot 40 \cdot 0{,}1 + \pi \cdot 35^2 \cdot 0{,}1 =$$

$$825 cm^3$$

Absolutna napaka volumna je $\pm$825 cm$^3$.

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot v = \pi \cdot 35^2 \cdot 40 = 15400\text{cm}^3; V = (15400 \pm 825)\text{cm}^3$$

Relativna napaka (v %): $\frac{\Delta V}{V} = \frac{825}{15400} = 0{,}54\%$

# Odvod implicitnih funkcij ene spremenljivke

$x^2 + y^2 = 1$ implicitna enačba krožnice

▶ $2x + 2yy' = 0$; $\quad - y' = -\dfrac{x}{y}$

$x^2 + y^2 - 1 = 0 \Rightarrow (x^2 + y^2 - 1 = z)$

y (x) = 0

---------------------------

z = z (x,y); $\boxed{dz = \dfrac{\delta z}{\delta x} \cdot dx + \dfrac{\delta z}{\delta y} \cdot dy = 0}$ $z = 0 \Rightarrow dz = 0$

$\dfrac{\delta z}{\delta y} \cdot dy = -\dfrac{\delta z}{\delta x} \cdot dx \quad / : dx$; $\quad \dfrac{\delta z}{\delta y} \cdot \dfrac{\delta y}{\delta x} = -\dfrac{\delta z}{\delta x}$ $\quad \dfrac{\delta z}{\delta y} \cdot y' = -\dfrac{\delta z}{\delta x}$

$$\boxed{y' = -\frac{\left(\dfrac{\delta z}{\delta x}\right)}{\left(\dfrac{\delta z}{\delta y}\right)}}$$

Primer:

1. $x^2 + y^2 - 1 = 0$;  $y' = -\frac{2x}{2y}$

2. $e^{xy} + 2x^2 - 3y = 0$;  $y' = -\frac{e^{xy} \cdot y - 4x}{e^{xy} \cdot x - 3}$;  $x = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{3}$  $T\left(0, \frac{1}{3}\right)$

$k = -\frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{-3} = \frac{1}{9}$; $y - \frac{1}{3} = \frac{1}{9}(x - 0)$;  $y = \frac{1}{9}x + \frac{1}{3}$ enačba tangente

# Višji parcialni odvodi in ekstremi

$$y = x^3$$
$$y' = 3x^2$$
$$y'' = 6x$$
$$y''' = 6$$
$$y^{IV} = 0$$
$$y^{V} = 0$$
$$\ldots$$

- $z = z(x, y)$

$$\frac{\delta z}{\delta x} \to \boxed{\frac{\delta^2 z}{\delta x^2}}$$

Čisti parcialni odvod 2.reda po x-u

$$\frac{\delta^2 z}{\delta y \delta x}$$

Mešani parcialni odvod 2.reda.

$$\frac{\delta z}{\delta y} \to \boxed{\frac{\delta^2 z}{\delta y^2}}$$

Čisti parcialni odvod. 2. reda po y-u

$$\frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y}$$

Mešani parcialni odvod 2.reda.

Primer:

$$z = x^2 y^4$$

$$\frac{\delta z}{\delta x} = 2xy^4 \,;\, \frac{\delta^2 z}{\delta x^2} = 2y^4 \;\; ; \;\; \frac{\delta^2 z}{\delta y \delta x} = 8xy^3$$

$$\frac{\delta z}{\delta y} = 4x^2 y^3 \,;\, \frac{\delta z}{\delta y^2} = 12x^2 y^2 \,; \;\; \frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y} = 8xy^3$$

Izrek: Če sta mešana odvoda drugega reda enaka, je funkcija zvezna.

# EKSTREMI:

- $y' = 0 \Rightarrow T \quad y''(T) > 0$ min; $y''(T) < 0$ max ; za eno spremenljivko
- $z = z(x, y)$ Fermat: $\left.\begin{array}{l} \dfrac{\delta z}{\delta x} = 0 \\ \dfrac{\delta z}{\delta y} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow T$ ; 2 enačbi z 2 neznankama

Ali je v T ekstrem?

$$K(x, y) = \frac{\delta^2 z}{\delta x^2} \cdot \frac{\delta^2 z}{\delta y^2} - \left(\frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y}\right)^2$$

V točkah, kjer funkcija ni zvezna, ekstremov nimamo.

$K(T) > 0$ ekstrem je $\rightarrow$ Kakšen? $\dfrac{\delta^2 z}{\delta x^2}(T)$ $>0, T$ min; $<0, T$ max

$< 0$ ekstrema ni $\rightarrow$ za nas konec naloge

$= 0$ ?

## Zgled:

$z = xy - xy^2 - x^2 y - \frac{1}{27}$ Poišči ekstreme!.

$$\frac{\delta z}{\delta x} = y - y^2 - 2xy = 0,\ y(1 - y - 2x) = 0$$

$$\frac{\delta z}{\delta y} = x - 2xy - x^2 = 0$$

$$\frac{\delta^2 z}{\delta x^2} = -2y,\ \frac{\delta^2 z}{\delta y \delta x} = \underline{1 - 2y - 2x},\ \frac{\delta^2 z}{\delta y} = -2x$$

$$\frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y} = \underline{1 - 2y - 2x}$$

z je zvezna

1.

$y = 0, x - x^2 = 0$

$x = 0$

$x = 1$

$T_1\left(0,0,-\frac{1}{27}\right)$

$T_2\left(1,0,-\frac{1}{27}\right)$

2.

$1 - y - 2x = 0$

$y = 1 - 2x$

$x - 2x + 4x^2 = 0$

$3x^2 - x = 0$

$x = 0, \quad y = 1$

$x = \frac{1}{3}, \quad y = \frac{1}{3}$

$T_3\left(0,1,-\frac{1}{27}\right)$

$T_4\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},0\right)$

$$K(x, y) = 4xy - (1 - 2y - 2x)$$

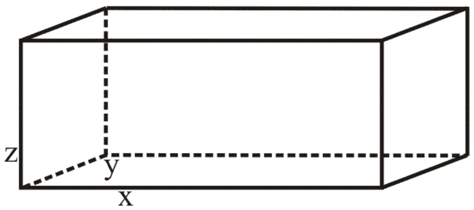
$K(T_1) = -1$ ni ekstrem; $K(T_2) = -1$ ni ekstrem; $K(T_3) = -1$ ni ekstrem

$K(T_4) = \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} > 0$ ekstrem je; $\frac{\delta^2 z}{\delta x^2}(T_4) = -\frac{2}{3} < 0$ max $T_4\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},0\right)$

# Vezani ekstremi

<u>Naloga:</u>

Kateri izmed kvadrov, ki ima vsoto robov $x+y+z=a$, ima največjo prostornino?




$$V=x\cdot y\cdot z;\ z=a-x-y;\ V=xy(a-x-y)=axy-x^2y-xy^2$$

$$\frac{\delta V}{\delta x}-ay-2xy-y^2=0$$

$$\frac{\delta V}{\delta x}=ax-x^2-2xy=0$$

$$y(a-2x-y)=0\ ;\cancel{y=0}$$

$$a-2x-y=0$$

$$y=a-2x$$

$$ax - x^2 - 2ax + 4x^2 = 0$$

$$3x^2 - ax = 0$$

$$x = 0; \quad x = \frac{a}{3}; \quad y = \frac{a}{3}; \quad z = \frac{a}{3}$$

$$\frac{\delta^2 V}{\delta x^2} = -2y \qquad \frac{\delta^2 V}{\delta y \delta x} = a - 2x - 2y$$

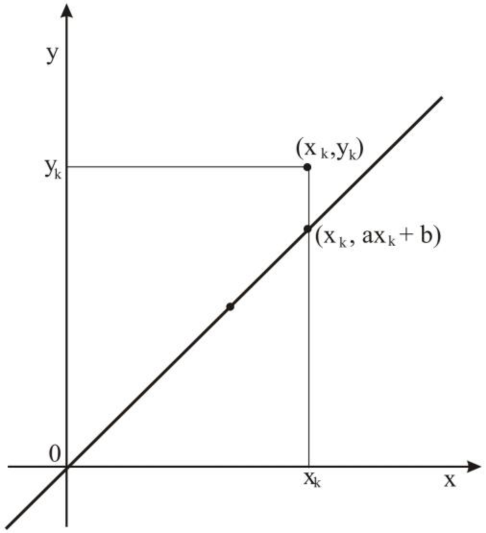
$$\frac{\delta^2 V}{\delta y^2} = -2x \qquad \frac{\delta^2 V}{\delta x \delta y} = a - 2x - 2y$$

$$K(x, y) = 4xy - (a - 2x - 2y)^2$$

$$K\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right) = \frac{4a}{9} - \frac{a^2}{9} = \frac{a^2}{3} > 0 \text{ ekstrem je; } \frac{\delta^2 V}{\delta x^2}\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right) = -\frac{2a}{3} < 0 \text{ max}$$

# Empirična izravnava funkcij z metodo najmanjših kvadratov

| $x_i$ | $y_i$ |
|---|---|
| $x_1$ | $y_1$ |
| $x_2$ | $y_2$ |
| … | … |
| $x_k$ | $y_k$ |
| … | … |
| $x_n$ | $y_n$ |




$y=ax+b,\ y=f(x_0, c_1, c_2, \dots, c_j)$

! Izmed vseh premic poiščemo tisto, ki se tem točkam najbolj prilega.

$$y_k = (ax_k + b); \quad \sum_{k=1}^{n} (y_k - (ax_k + b)) \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \left|(y_k - (ax_k + b))\right| \Rightarrow k = 1,2 \dots n$$

Vsota razdalj ni v redu → absolutne vrednosti razdalj (poz. in neg. razdalja)

Vzamemo kvadrat razdalj

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\left(y_k-\left(ax_k+b\right)\right)\right)^2$$ Vsota kvadratov razdalj od točke do premice naj bo min.

$a,\, b = ?;$ **!** $F(a,b)=\sum_{k=1}^{n}\left(\left(y_k-\left(ax_k+b\right)\right)\right)^2$ **!min**

$$\frac{\delta F}{\delta a}=2\sum_{k=1}^{n}\left(y_k-\left(ax_k+b\right)\right)\cdot\left(-x_k\right)=0$$

$$\frac{\delta F}{\delta b}=2\sum_{k=1}^{n}\left(y_k-\left(ax_k+b\right)\right)\cdot\left(-1\right)=0$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}x_k y_k-a\sum_{k=1}^{n}x_k{}^2-b\sum_{k=1}^{n}x_k=0\\&\sum_{k=1}^{n}y_k-a\sum_{k=1}^{n}x_k-nb=0\end{aligned}}$$

$y = ax+b$

Zgled:

1.

| $x_i$ | $y_i$ | $x^2$ | $x_i y_i$ | $y_{i(i)}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | 2 | 3,87 |
| 2 | 6 | 4 | 12 | 4,92 |
| 4 | 9 | 16 | 36 | 7,02 |
| 7 | 9 | 63 | 63 | 10,16 |
| **14** | **26** | **70** | **113** | |

$$\boxed{\begin{gathered}\sum x_k^2 \neq \left(\sum x_k\right)^2 \\ \sum x_k y_k \neq \sum x_k \cdot \sum y_k\end{gathered}}$$

*113-70a-14b=0 /·2*

*26-14a- 4b=0 /·7* -

---------------------

*44 – 42a=0*

*a=1,048*

*b=2,83*

<u>*y=1,048 x + 2,83*</u>

2.Prilagodi podatke funkciji $y=ab^x$!

| $x_k$ | izračunani $y_k$ | $\ln y_k$ | $x_k^2$ | $x_k \ln y_k$ | $y_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 0,69 | 1 | 0,69 | 2,69 |
| 2 | 7 | 1,95 | 4 | 3,90 | 4,68 |
| 3 | 9 | 2,20 | 9 | 6,60 | 8,19 |
| 4 | 12 | 2,48 | 16 | 9,92 | 14,34 |
| **10** | | **7,32** | **30** | **21,19** | |

$$\ln y = \ln a + x \ln b$$

$$y = b + xa$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \ln y_k - \ln b \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \ln a \sum_{k=1}^{n} x_k = 0$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \ln y_k - \ln b \sum_{k=1}^{n} x_k - n \ln a = 0} \quad n=4$$

*21,11-30*ln*b-10*ln*a=0*

*7,32-10*ln*b- 4*ln*a=0 / ·(-3)* +

*-0,85+2*ln*a=0;* ln*a=0,42,5; a=1,53; b=1,75;*ln*b=0,56*

$$y = 1{,}53 \cdot 1{,}75^x$$