ZAPOREDJA REALNIH ŠTEVIL

Zaporedje je predpis, ki vsakemu naravnemu številu n priredi neko realno število. Na primer, če priredimo naravnemu številu n njegovo obratno vrednost, dobimo zaporedje: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

Zaporedje lahko podamo tako, da:

- zapišemo nekaj prvih členov zaporedja ali
- zapišemo njegov **splošni člen**.

Primer

Zaporedje: 1, 2, 4, 8, 16, 32
lahko nadaljujemo kot 64, 128, 256, 512, ...
ali pa kot 16, 8, 4, 2, 1, 2,4, 8,...

Pri takšni predstavitvi zaporedja moramo zapisati toliko členov, da je očitno, kako se zaporedje nadaljuje.

Primer:

Če so z zaporedjem:1, 2, 4, 8, 16, 32,…….mišljene potence števila 2, lahko rečemo, da je n-ti člen tega zaporedja število 2^{n-1}, kar zapišemo kot:

$$a_n = 2^{n-1}$$

in imenujemo n-ti ali splošni člen tega zaporedja. Prvi člen tega zaporedja je $a_1 = 1$, drugi člen je $a_2 = 2$, itd.

Primer:

Zapišimo prve štiri člene zaporedja $a_n = \frac{2n+1}{n^2+1}$.

$$a_1 = \frac{2+1}{1+1} = \frac{3}{2},\ a_2 = \frac{4+1}{4+1} = 1,\quad a_3 = \frac{6+1}{9+1} = \frac{7}{10},\ a_4 = \frac{8+1}{16+1} = \frac{9}{17}.$$

Zaporedje s splošnim členom a_n je **naraščajoče**, če velja $\boxed{a_n \le a_{n+1}}$ pri vseh indeksih $n \in N$.

Če je $\boxed{a_n < a_{n+1}}$ govorimo o **<u>strogo naraščajočem</u>** zaporedju. Podobno definiramo **padajoče** oziroma **strogo <u>padajoče</u>** zaporedje. Strogo padajočim in naraščajočim zaporedjem rečemo **monotona** zaporedja.

Zaporedje s splošnim členom a_n je **navzdol omejeno**, če obstaja takšno realno število m, ki mu rečemo **spodnja meja**, da je $m \le a_n$; ($n \in N$).

Če je zaporedje navzdol omejeno in je m njegova spodnja meja, je tudi vsako število m', ki je manjše od m spodnja meja zaporedja. Največja med vsemi spodnjimi mejami je natančna **<u>spodnja meja</u>** <u>oziroma</u> **<u>infimum (označena z m)</u>**<u>.</u>

<u>Primer</u>

Zaporedje $a_n = \frac{1}{n}$ *je navzdol omejeno, saj so vsa števila* a_n *pozitivna in je torej vsako nenegativno število spodnja meja tega zaporedja. Natančna spodnja meja je število 0.*

Zaporedje a_n je navzgor omejeno, če za neko realno število M velja $a_n \leq M$ za $(n \in N)$.

Število M je **zgornja meja** zaporedja. Najmanjša med vsemi zgornjimi mejami je **natančna zgornja** meja oziroma **supremum (označena z M)**.

Zaporedje, ki je navzgor in navzdol omejeno, je **omejeno**.

Primer

Zaporedje $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ *je omejeno. Natančna spodnja meja je* $m = \dfrac{1}{2}$, *natančna zgornja meja pa* $M = 1$.

Z zaporedji lahko tudi računamo: lahko jih seštevamo, odštevamo, množimo in včasih delimo. Poglejmo podrobnosti.

Vsota zaporedij a_n in b_n je zaporedje c_n, za katerga pri vsakem indeksu n velja:

$c_n = a_n + b_n$.

Podobno je **razlika zaporedij** a_n in b_n je zaporedje c_n, za katerga pri vsakem indeksu n velja: $c_n = a_n - b_n$.

Produkt zaporedij a_n in b_n je zaporedje c_n, za katerga pri vsakem indeksu n velja: $c_n = a_n . b_n$.

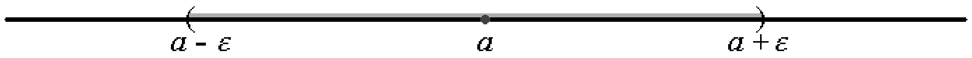
Količnik zaporedij a_n in b_n lahko definiramo le, če je $b_n \neq 0$ za vsak indeks n. Če to velja, je količnik zaporedje c_n, za katerga pri vsakem indeksu n velja: $c_n = \frac{a_n}{b_n}$.

<u>Primer</u>

Naj bo $a_n = 2n - 3$ in $b_n = 2^n$. Ker je $b_n \neq 0$ pri vseh indeksih n, obstaja količnik teh dveh zaporedij. To je zaporedje: $c_n = \frac{a_n}{b_n} = \frac{2n-3}{2^n}$.

Naj bo a realno število in $\varepsilon > 0$ pozitivno realno število. **ε-okolica** števila a je množica $O_\varepsilon(a)$ vseh tistih števil, ki so od a oddaljena za manj kot ε :

$$O_\varepsilon(a) = \{x; |a - x| < \varepsilon\},$$



Število **S** je **stekališče** zaporedja realnih števil a_n, če je za vsako pozitivno število $\varepsilon > 0$ v ε -okolici števila **S** neskončno mnogo števil iz zaporedja a_n , izven te okolice pa le končno mnogo.

Primer

Zaporedje $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ *ima dve stekališči:* -1 *in 1.*

Zaporedje realnih števil ima lahko eno, dve, tri, …, neskončno mnogo stekališč, lahko pa je tudi brez končnega stekališča. Velja pa, da ima vsako omejeno zaporedje vsaj eno stekališče. Obrat zadnje trditve ne velja. Naslednji primer nam kaže, da obstajajo neomejena zaporedja, ki imajo stekališča.

Primer 8:

Naj bo

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n \quad lih \\ (-1)^{n/2} n^2, & n \quad sod \end{cases}.$$

To zaporedje je navzgor in navzdol ***neomejeno****, saj členi s sodimi indeksi zavzamejo izmenično vrednosti* n^2 *oziroma* $-n^2$*, členi z lihimi indeksi pa so pozitivni in vedno manjši, kar pomeni, da je 0 stekališče tega zaporedja.*

Poseben primer stekališča je **limita** zaporedja.

Limita zaporedja je tudi stekališče, in sicer **edino končno stekališče**, obratno pa ni nujno res.

Če ima dano zaporedje a_n eno samo limito ℓ, rečemo, da zaporedje **konvergira** k ℓ oziroma je **konvergentno zaporedje** z limito ℓ in pišemo:

$$\ell = \lim_{n\to\infty} a_n .$$

Za zaporedje, ki ne konvergira, ki torej nima limite, pravimo, da **divergira**, da je **divergentno**.

Pravila za računanje limit so naslednja.

- *Naj bo* $a_n = c$ *zaporedje, katerega vsi členi so enaki istemu realnemu številu c. Potem seveda za vsako* ε *-okolico števila c velja, da so vsi členi zaporedja* a_n *v tej okolici. To pomeni, da je* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c = c$.
- *Zaporedje* $a_n = \frac{1}{n}$ *obratnih vrednosti naravnih števil je konvergentno z limito 0.*

- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to n} b_n$;
- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to n} b_n$;
- $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$, če je $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$.

<u>Primer</u>

Z uporabo pravkar navedenih pravil za računanje lahko izračunamo naslednjo limito:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{3n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{3-\frac{1}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 2}{\lim\limits_{n\to\infty} 3 - \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}} = \frac{2}{3}.$$

<u>Računanje limit kvocienta</u> glede na stopnjo števca in imenovalca!!

ARITMETIČNO ZAPOREDJE

Aritmetično zaporedje je tisto, katerega členi linearno naraščajo oziroma padajo. To pomeni, da je splošni člen takega zaporedja oblike $\boxed{a_n = (n-1)\cdot d + a_1}$
pri čemer sta d in a_1 realni števili, ki določata aritmetično zaporedje.

Vzemimo poljubna dva zaporedna člena aritmetičnega zaporedja $a_n = (n-1)\cdot d + a_1$, recimo a_n in a_{n+1}. Potem je: $\boxed{a_{n+1} - a_n = (n\cdot d + a_1) - ((n-1)\cdot d + a_1) = d}$.

Razlika poljubnih dveh zaporednih členov aritmetičnega zaporedja je torej ves čas enaka. To je značilno za aritmetična zaporedja, nobeno drugo zaporedje ne zadošča temu pogoju. Se pravi, če poznamo en člen v aritmetičnem zaporedju in razliko med dvema zaporednima členoma tega zaporedja, lahko zapišemo vse člene tega zaporedja.

Običajno aritmetično zaporedje podamo s prvim členom a_1 in razliko d. Splošni člen zaporedja se torej glasi $\boxed{a_n = a_1 + (n-1)\cdot d}$

Primer:

Zapišimo splošni člen aritmetičnega zaporedja, za katerega vemo, da je $a_{16} = 22$ *in* $a_9 = -5$. *Rešiti moramo naslednji linearni sistem dveh enačb z neznankama* d *in* a_0:

$$a_{16} = 16d + a_0 = 22; \qquad a_9 = 9d + a_0 = -5.$$

Sistem ima rešitev $a_0 = -\frac{278}{7}$ *in* $d = \frac{27}{7}$, *tako da je splošni člen zaporedja:* $a_n = \frac{27}{7}n - \frac{278}{7}$.

V praksi velikokrat potrebujemo **vsoto prvih nekaj členov aritmetičnega zaporedja** $a_n = n \cdot d + a_0$. Formula za izračun vsote prvih n členov zaporedja - tej vsoti rečemo **n-ta delna vsota** aritmetičnega zaporedja in označimo z S_n - je

$$\boxed{s_n = \frac{n}{2}\left(2a_1 + (n-1)\cdot d\right)} \qquad \text{ali} \qquad \boxed{s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}}.$$

O konvergenci aritmetičnega zaporedja: aritmetično zaporedje $a_n = (n-1)\cdot d + a_1$ narašča čez vse meje, če je razlika d pozitivno število, in pada čez vse meje, če je $d < 0$. Ko je $d = 0$, imamo $a_n = a_1$ in tedaj zaporedje konvergira, njegova limita je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a_1.$$

Primer

V neki tovarni avtomobilov je proizvodnja v letih 1995, 1996, ..., 2000 naraščala kot aritmetično zaporedje. V letu 1995 so izdelali 50000*, skupno pa so v letih od 1995 do 2000 poslali na trg* 600000 *avtomobilov. Kakšna je bila proizvodnja leta 1998?*

Število izdelanih avtomobilov po letih tvori aritmetično zaporedje, pri tem je število avtomobilov izdelanih leta 1995 prvi člen zaporedja, tj. $a_1 = 50000$*. Vemo še, da je:*

$$s_6 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 600000.$$

Zanima pa nas a_4*, saj je to število avtomobilov izdelanih leta 1998.*

Iz formule za n-to delno vsoto dobimo:

$$d = \frac{2(s_n - n \cdot a_1)}{n(n-1)} = d = \frac{2(s_6 - 6a_1)}{30} = \frac{2(600000 - 6 \cdot 50000)}{30} = 20000,$$

kar nam da: $a_4 = a_1 + 3d = 50000 + 3 \cdot 20000 = 110000$,

število izdelanih avtomobilov leta 1998.

GEOMETRIJSKO ZAPOREDJE

Pri geometrijsko zaporedje je količnik poljubnih dveh zaporednih členov vedno enak istemu številu k, ki mu pravimo **količnik** ali **kvocient** zaporedja: $\boxed{\frac{a_{n+1}}{a_n} = k}$ za vsak n∈N. Tako za geometrijsko zaporedje velja: $\boxed{a_n = a_1 \cdot k^{n-1}}$.

Torej je tudi geometrijsko zaporedje natančno določeno z dvema neodvisnima podatkoma; najenostavneje je, če poznamo prvi člen in količnik.

Primer

Poiščimo geometrijsko zaporedje, za katero velja $a_1 + 2a_2 = 6$ in $a_2 + 2a_3 = 3$. Najprej v danih enakostih izrazimo vse člene zaporedja z a_1 in k. Dobimo sistem enačb: $a_1(1+2k) = 6$ *in* $a_1(1+2k)k = 3 \rightarrow k = \frac{1}{2}$ *in* $a_1 = 3$. *Iskano geometrijsko zaporedje je torej:* $3,\ \frac{3}{2},\ \frac{3}{4},\ \frac{3}{8},\ \ldots$

Konvergenca geometrijskega zaporedja $a_n = a_1 k^{n-1}$. Če je $a_1 = 0$, so seveda vsi členi zaporedja enaki *0* in zaporedje konvergira, ima limito *0*. Glede na to, kakšen je količnik k, ločimo naslednje primere.

1. $k = 1$. V tem primeru imamo $a_n = a_1$ za vsak indeks n. To je konstantno zaporedje, ki konvergira in njegova limita je število a_1.
2. $k = -1$. Zdaj se zaporedje glasi $a_n = a_1(-1)^{n-1}$, kar pomeni, da so členi zaporedja z lihimi indeksi enaki a_1, tisti s sodimi indeksi pa $-a_1$. Imamo alternirajoče zaporedje $a_1, -a_1, a_1, -a_1, \ldots$, ki ni konvergentno, ima pa dve stekališči: a_1 in $-a_1$.
3. $|k| < 1$. Zaporedje potenc $|k|^n$ je padajoče in se približuje *0*, zato velja $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a_1 \lim\limits_{n\to\infty} k^{n-1} = 0$.
4. $k > 1$. Zaporedje potenc k^n je monotono naraščajoče in neomejeno: če je $a_1 > 0$, zaporedje narašča čez vse meje, če pa je $a_1 < 0$, zaporedje pada čez vse meje.
5. $k < -1$. zaporedje potenc k^n je alternirajoče in po absolutni vrednosti narašča čez vse meje. Samo geometrijsko zaporedje $a_n = a_1 k^{n-1}$ je alternirajoče in po absolutni vrednosti narašča čez vse meje.

POVZETEK: *Geometrijsko zaporedje* $a_n = a_1 k^{n-1}$ *konvergira natanko tedaj, ko je* $k \in (-1,1]$. *Če je* $k = 1$, *je* $\lim_{n\to\infty} a_n = a_1$, *za* $-1 < k < 1$ *pa velja* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

<u>Vsota n členov geometrijskega zaporedja</u> $a_n = a_1 k^{n-1}$: $\boxed{S_n = a_1 \frac{k^n - 1}{k - 1}}$.

<u>Primer</u>

Za neko geometrijsko zaporedje velja $a_1 = 3$, $a_p = 96$ in $s_p = 189$. Določimo zaporedje. Izrazimo vse s prvim členom a_1 in količnikom k: $a_p = a_1 k^{p-1}$ in $s_p = a_1 \frac{k^p - 1}{k - 1}$,

$96 = 3k^{p-1}$ in $189 = 3\frac{k^p - 1}{k - 1}$ z neznankama p in k. Iz prve enačbe dobimo $k^{p-1} = 32$ oziroma $k^p = 32k$, iz druge enačbe pa sledi $63(k-1) = k^p - 1$. Upoštevajmo v zadnji enačbi, da je $k^p = 32k$ pa dobimo linearno enačbo $63(k-1) = 32k - 1$, katere rešitev je $k = 2$. To vstavimo v enačbo $k^{p-1} = 32$ in izračunamo $p = 6$. Splošni člen iskanega zaporedja je $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$.

GEOMETRIJSKA VRSTA

Vsota neskončno členov geometrijskega zaporedja se imenuje geometrijska vrsta.

Če je količnik k geometrijskega zaporedja po absolutni vrednosti manjši od 1 **($|k| < 1$)**, potem lpravimo, da je vrsta **konvergentna** in lahko seštejemo vseh neskončno členov zaporedja in dobimo končno **vsoto S:**

$$\boxed{S = a_1 + a_1 k + a_1 k^2 + a_1 k^3 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_1 k^{n-1} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} a_1 \frac{k^n - 1}{k - 1} = \frac{a_1}{1-k}}$$

Poudarimo še enkrat, da ima ta formula smisel in je veljavna takrat in le takrat, ko je $|k| < 1$.

Primer

Določimo geometrijsko zaporedje, za katero velja $s_2 = 1$ in $S = 2$.

Najprej dani enakosti izrazimo s prvim členom zaporedja a_1 in količnikom k:

$a_1 + a_1 k = 1$ in $\frac{a_1}{1-k} = 2 \rightarrow a_1 = \frac{1}{1+k}$ in $a_1 = 2(1-k) \rightarrow \frac{1}{1+k} = 2(1-k) \rightarrow k^2 = \frac{1}{2}$.

Ta enačba ima dve rešitvi: $k_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ in $k_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\rightarrow$ $a_1 = 2 - \sqrt{2}$ oziroma $a_1 = 2 + \sqrt{2}$.

Zastavljena naloga ima torej dve rešitvi

$a_n = (2 - \sqrt{2})\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$ in $a_n = (2 + \sqrt{2})\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$.

PRIMERI ZA UTRJEVANJE:

1. Kakšen je splošni člen zaporedja, ki se začne s števili $2, \frac{5}{2}, \frac{10}{3}, \frac{17}{4}, \frac{26}{5}, \ldots$?

   (Rez: $a_n = \frac{n^2+1}{n}$)

2. Poiščite vsa stekališča naslednjih zaporedij:

- $\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{5}{4}, \frac{5}{6}, -\frac{7}{6}, \ldots$ (Rez: -1 in 1)
- $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \ldots$ (Rez: 0 in 1)
- $1, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}, \ldots$ (Rez: 0)

3. Izračunajte limite

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-n+3}{1+2n-n^2}$ (Rez: -1)

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-12n}{12-n}$ (Rez: 12)

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$ (Rez: 0)

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$. (Rez. 1)

4. Določite realno število x tako, da bodo $x+3$, $\frac{x^2+1}{2}$ in x^2 zaporedni členi aritmetičnega zaporedja (Namig: a_2=a_2; Rez: x=-2).

5. Določite realno število x tako, da bodo 2^x, $3 \cdot 2^{2x}$ in 2^{4x} zaporedni členi geometrijskega zaporedja (Isti namig kot pri prejšnji nalogi; Rez: x=2$\log_2 3$)

6. Dano je geometrijsko zaporedje $a_n = \left(\frac{2x}{x+1}\right)^{n-1}$.Določite realno število x tako, da bo geometrijska vrsta $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2x}{x+1}\right)^{n-1}$ imela vsoto S=2 (Namig in rezultat: a_1=1, k=$\frac{a_2}{a_1} = \frac{2x}{x+1}$; S=2 $\rightarrow$ x=1/3)

DEFINICIJA ŠTEVILA e (osnova naravnih logaritmov)

Imamo zaporedje s splošnim členom: $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$.

$a_1=2$, $a_2=2,25$, $a_3=2,370370$,………, $a_{1050}=2,716988$, $a_{1000000}=2,718280$, $a_{100000000}=2,718282$,……....

To zaporedje je naraščajoče in v obe strani omejeno: m=2, M= $\lim_{n\to\infty} a_n = e$

$$\boxed{e = \lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n}$$

POSLOVNA MATEMATIKA (uporaba zaporedij)

Navadni obrestni račun:

Uporablja se pri tekočih računih in različnih hranilnih vlogah in je omejen na krajše časovno obdobje.

Tu je osnova ves čas le glavnica (obrestuje se le glavnica), zato prinese upniku obrestovanje vsako leto iste obresti ⇒ glavnica narašča kot aritmetično zaporedje.

Na začetku obodobja imamo glavnico G_0. Letna obrestna mera (imenovana tudi **nominalna)** naj bo p%. Potem so **relativne obrestne mere**: mesečna obrestna mera $\frac{p\%}{12}$, dnevna $\frac{p\%}{365}$, itd.

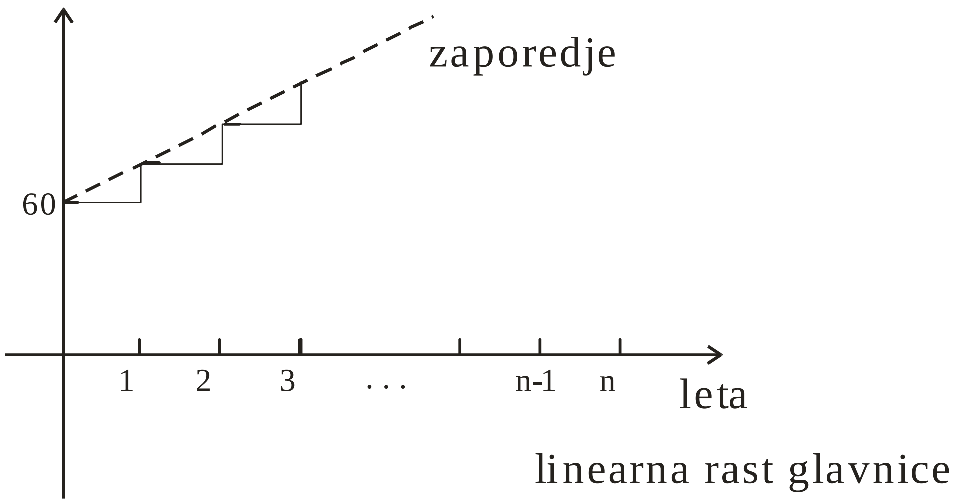
Letne obresti *o* potem znašajo: $\boxed{o = \frac{G_0 . p}{100}}$

Glavnica na koncu prvega leta je G_1, drugega G_2, itd:

$$G_1 = G_0 + \frac{G_0 . p}{100}; \quad G_2 = G_0 + 2\frac{G_0 . p}{100};.........;G_n = G_0 + n\frac{G_0 . p}{100}$$

Osnovna formula za navadni obrestni račun je:

$$\boxed{G_n = G_0 + n\frac{G_0 . p}{100}}$$



Primer

Banka uporablja navadni obrestni račun in p=8%. Vsak mesec (na začetku mesca od 1.januarja - 1.decembra –prenumerandno) vlagamo znesek a. Ob koncu leta imamo 25040 de. Kolikšen je a? (Opomba: vse zneske preračunavamo na skupni končni termin; pri nas na konec leta).

$$S=25040=a+\frac{a\cdot p\cdot 12}{1200}+a+\frac{a\cdot p\cdot 11}{1200}+...+a+\frac{a\cdot p\cdot 1}{1200}=12\cdot a+\frac{a\cdot p}{1200}(12+11+..+1)=$$

$$=12\cdot a+\frac{a\cdot p}{1200}\cdot\frac{12\cdot 13}{2}=\frac{12\cdot 1200\cdot a+78\cdot a\cdot 8}{1200}=\frac{a(14400+78\cdot 8)}{1200}\Rightarrow a=2000$$

Poglejmo isti primer, le da imamo vloge na koncu meseca (postnumerandno):

$$S=25040=a+\frac{a\cdot p\cdot 11}{1200}+a+\frac{a\cdot p\cdot 10}{1200}+...+a=12\cdot a+\frac{a\cdot p}{1200}(11+10+..+1)=$$

$$=\frac{14400a+a\cdot p\cdot 66}{1200}=\frac{a(14400+66\cdot 8)}{1200}\Rightarrow a=2012{,}86$$

Obrestno obrestni račun

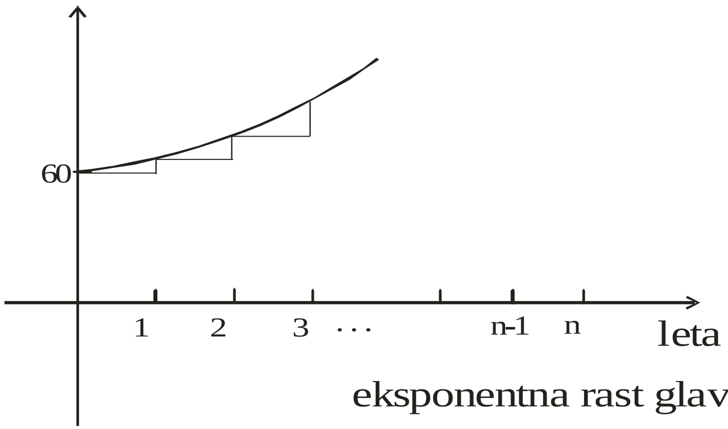
Tu je osnova glavnica z obrestmi vred (obrestuje se glavnica in obresti). Glavnica narašča kot geometrijsko zaporedje.

Na začetku obodobja imamo glavnico G_0. Letna obrestna mera naj bo p%. Potem je glavnica na koncu prvega leta je G_1, drugega G_2, itd:

$$G_1 = G_0 + \frac{G_0 . p}{100} = G_0(1+\frac{p}{100}) = G_0 q;\ kjer\ je\ q\ obrestni\ faktor;\ q = 1+\frac{p}{100}$$

$$G_2 = G_0 q^2; ....; G_n = G_0 q^n$$

Osnovna formula za obrestno obrestni račun je: $\boxed{G_n = G_0 q^n; \quad q = 1+\frac{p}{100}}$



eksponentna rast glavnice

Primer

Banka obrestuje po p=8% (dekurzivno, letno obrestovanje). Vanjo vlagamo po a=1000 de letno

a) prenumerandno
b) postnumerandno).

Kolikšna je skupna vrednost vlog na koncu 40. leta (n=40)?

$$S^{(pre)} = a \cdot r + a \cdot r^2 + ... + a \cdot r^n = a \cdot r \frac{r^n - 1}{r - 1} = 279781{,}04$$

$$S^{(post)} = a + a \cdot r^2 + ... + a \cdot r^{n-1} = a \frac{r^n - 1}{r - 1} = 259056{,}52$$

Primer

Poglejmo na primeru razliko med navadnim in obrestno obrestnim obrestovanjem: G_0=100 de; p=10%; n=10 let

1) Navadno obrestovanje: $G_{10} = G_0 + 10 \frac{G_0 \cdot p \cdot}{100} = G_0 (1+1) = 200$

2) Obrestno obrestno obrestovanje: $G_{10} = G_0 (1 + \frac{p}{100})^n = G_0 \cdot 1{,}1^{10} = 259{,}37$

Primer:

1) Banka uporablja obrestno obrestni račun. Kolikšna je letna obrestna mera, če je G_0=12500 in G_4=17644,77?

$$G_n = G_0(1+\frac{p}{100})^n \text{, n=4} \quad \to p = 100\,(\sqrt[4]{\frac{G_n}{G_0}} - 1) = 9\%$$

2) Banka uporablja obrestno obrestni račun. Koliko let se je glavnica obrestovlala, če je G_0=114000; letna obrestna mera p=12%, in G_n=252017,68?

$$G_n = G_0(1+\frac{p}{100})^n \to \qquad n = \frac{\log G_0 - \log 60}{\log(1+\frac{p}{100})} = 7$$

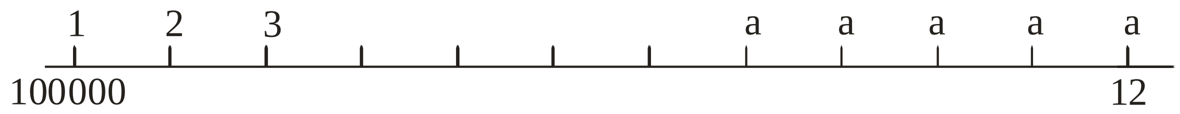
3) Neko blago smo podražili za p (p=10%) procentov. Za koliko procentov, ga moramo poceniti, da dobimo prvotno ceno tega blaga?

$$a \xrightarrow{+p\%} a_1 \xrightarrow{-p_1\%} a$$, a je cena blaga, ki ni znana (podatka ne potrebujemo)

$$a_1 = a + a\cdot\frac{p}{100} = a\cdot(1+\frac{p}{100});\quad a = a_1 - a_1\cdot\frac{p}{100} = a_1\cdot(1-\frac{p_1}{100}) = a\cdot(1+\frac{p}{100})\cdot(1-\frac{p_1}{100});$$

$$1 = (1+\frac{p}{100})\cdot(1-\frac{p_1}{100});\qquad \frac{1}{1+\frac{p}{100}} - 1 = -\frac{p_1}{100} \Rightarrow p_1 = 100 - \frac{100}{1+\frac{p}{100}} = 9{,}09\%$$

3) Najamemo 100.000 de posojila, ki ga vrnemo v 5 enakih letnih obrokih. Prvega čez 7 let po najetju posojila. Koliko znaša letni obrok, če je letna obrestna mera 7,5 %? (Opomba: vse moramo preračunati na skupni termin – končni, pri nas je to na koncu 12. leta; ves izposojen denar z obrestmi vred je enak vsemu vrnjenemu denarju z obrestmi vred.Narišite časovno os!).



$K_n = K \cdot q^n = 100.000 \cdot q^{11} = a \cdot q^4 + a \cdot q^3 + a \cdot q^2 + a \cdot q$ (izposojeno, nismo obrestovali na koncu 1.leta)

$$100.000 \cdot q^{11} = a \cdot q^4 + a \cdot q^3 + a \cdot q^2 + a \cdot q^1 + a$$

Komentar: $\boxed{a \cdot q^{n-1} + a \cdot q^{n-2} + ... + a \cdot q + a}$ geometrijsko zaporedje

$$\boxed{a \cdot q^{n-1} + a \cdot q^{n-2} + ... + a \cdot q + a = \frac{a \cdot (q^n - 1)}{q - 1}} \quad S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

$$100.000 \cdot q^{11} = \frac{a \cdot (q^5 - 1)}{q - 1} \rightarrow a = \frac{100.000 \cdot 1{,}075^{11} \cdot 0{,}075}{1{,}075^5 - 1} = 38144{,}997$$

OBRESTNE MERE

Nominalna ali letna obrestna mera p% (na primer p=8%)

Relativne obrestne mere: mesečna obrestna mera $\frac{p\%}{12}$ = 0,66..%, dnevna $\frac{p\%}{365}$ =0,0219%,

Primer:

Če znesek G obrestujemo enkrat letno po 8% niminalni obrestni meri imamo na koncu leta 1,0800.G

Če znesek G obrestujemo mesečno po nominalni obrestni meri 8%,oziroma relativni mesečni obrestni meri 0,666..%, imamo na koncu leta G. $1{,}06666..^{12}$ = 1,08299995G , torej 0,2999..% več kot če bi bil pripis le enkrat letno. Zaradi te razlike so banke uvedle konformno obrestno mero.

Konformna (mesečna, dnevna,….) obrestna mera p(m) je tista obrestna mera, ki v enem letu in večkratni (mesečni, dnevni,…) kapitalizaciji prinese enake obresti kot nominalna (letna) obrestna mera pri celoletni kapitalizaciji.

$$\boxed{k(m) = \sqrt[m]{q} \rightarrow \ p(m) = \left(\sqrt[m]{q} - 1\right) * 100}$$

m- število kapitalizacijskih obdobij v enem letu; q- obrestovalni faktor q= 1+p/100

k(m)- konformni obrestni faktor in p(m) konformna obrestna mera

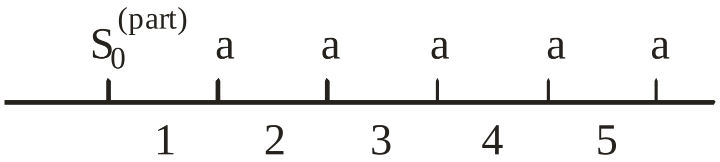
p=8%, k(m=12, mesečni)=1,006434; p(m=12,mesečna)=0,6434.

RENTA

Končna renta: primer

Koliko je treba vložiti v banko, da lahko n=5 let izplačujemo 1000 de letno, če je kapitalizacija celoletna, obrestovanje dekurzivno, p=8%, izplačila dospejo ob koncu leta.

reducirana
na začetek



$$S_0^{(part)} = \frac{a}{q} + \frac{a}{q^2} + \ldots + \frac{a}{q^5} = \frac{a}{q^5}(1 + q + \ldots + q^5) = \frac{a(q^5 - 1)}{q^5(q-1)}$$

$$S_0^{(part)} = \frac{1000(1{,}08^5 - 1)}{1{,}08^5(1{,}08 - 1)} = 3992{,}71 \;\; d.e$$

Splošna formula: $\boxed{S_o = \frac{a(q^n - 1)}{q^n(q-1)}}$

Večna renta (primer)

Koliko moramo vložiti v sklad, če želimo večno rento 60000 letno in banka obrestuje po p=12% letno, dekurzivno, s celoletno kapitalizacijo in izplačilom na koncu leta.

V tem primeru se poslužimo geometriske vrste.

$$\boxed{S_\infty = \lim_{n\to\infty} S_0 = \lim_{n\to\infty} \frac{a(q^n - 1)}{q^n(q-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{q-1}(1 - \frac{1}{q^n}) = \frac{a}{q-1}}$$

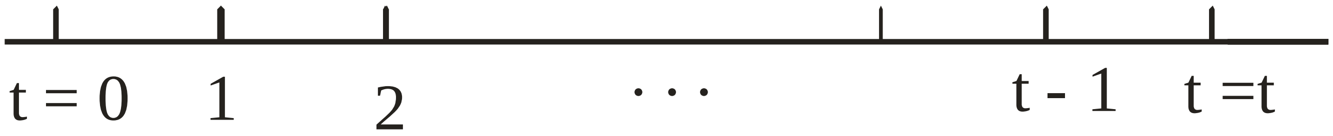
S=60000/(1,12 – 1) = 500 000 de

ZAKON NARAVNE RASTI

(uporabimo število e, limite, eksponentne in logaritemske enačbe)

Neka snov naravno raste. Naj bo y_0 količina snovi v času t=0. Zanima nas, koliko snovi imamo po preteku časa, to je v času t. Naj bo to y(t) = ?

Časovni interval [0,t] razdelimo na n enakih podintervalov:
[0,1], [1,2], …..,[t-1,t] z dolžino t/n.



$$y_1 = y_0 + k \cdot y_0 \cdot \frac{t}{n} = y_0 \cdot (1 + k \cdot \frac{t}{n}),$$

kjer je y_1 količina snovi v času t=1; predpostavimo pa premo sorazmerje s premosorazmernostnim faktorjem k.

$$y_2 = y_1 + k \cdot y_1 \cdot \frac{t}{n} = y_1 \cdot (1 + k \cdot \frac{t}{n}) = y_0 \cdot (1 + k \cdot \frac{t}{n})^2,$$ y_2 je količina snovi v času t=2

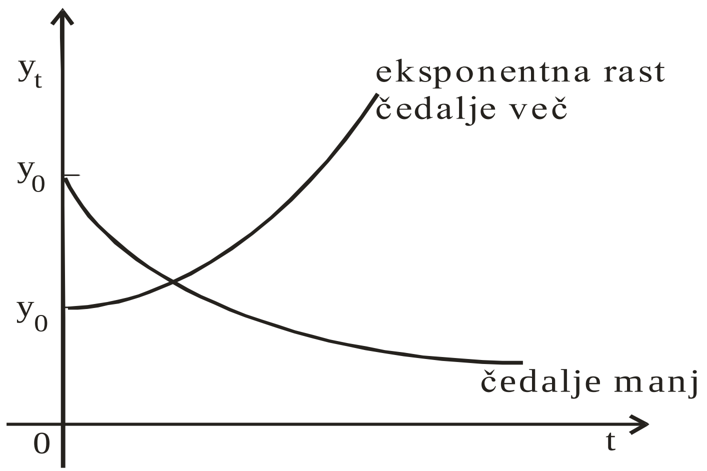
....

$\boxed{y_n = y_0 \cdot (1 + k \cdot \frac{t}{n})^n}$; y_n je količina snovi v času t=n

$$y(t) = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} y_0 \cdot (1 + k \cdot \frac{t}{n})^n = y_0 \lim_{n\to\infty} (1 + k \cdot \frac{t}{n})^n =$$

nova spremenljivka: $k \cdot \frac{t}{n} = \frac{1}{h} \Rightarrow n = h \cdot k \cdot t$; $\frac{k \cdot t}{n} \to 0$; $\frac{1}{h} \to 0$ ko $h \to \infty$

$$= y_0 \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{h})^{h \cdot k \cdot t} = y_0 \cdot (\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{h})^h)^{k \cdot t} = y_0 \cdot e^{k \cdot t}$$



$$\boxed{y(t) = y_0 \cdot e^{k \cdot t}}$$

Primer:

1. Neka količina naravno raste $y(2)=12$, y(4) = 48. Koliko je y(5)?

$$y(2) = y_0 \cdot e^{2\cdot k} = 12$$

$$y(4) = y_0 \cdot e^{4\cdot k} = 48$$

$$k = \ln 2 = 0{,}69 \Leftarrow \frac{e^{2\cdot k} = 4}{e^{k} = 2}$$

Če je $k > 0$ količina narašča !!!

$$y_0 = \frac{12}{e^{2\cdot k}} = \frac{12}{4} = 3$$

$$y(5) = y_0 \cdot e^{5\cdot k}$$

$$y(t) = 3 \cdot 2^{t}$$

$$y(5) = 3 \cdot 2^{5} = 96$$

2. Pri radioaktivnem razpadu se je količina snovi v prvem letu zmanjšala za 2%. Izračunaj razpolovno dobo te snovi!
   T naj bo razpolovna doba =?

$$y(t) = y_0 \cdot e^{k \cdot t}$$

$$y(T) = \frac{1}{2} \cdot y_0;$$

$$y_1 = 98\% \; od \; y_0$$

$$y_1 = 0{,}98 \cdot y_0 = y_0 \cdot e^k; \quad t = 1 \Rightarrow e^{k \cdot t} = e^k$$

$$e^k = 0{,}98 \Rightarrow k = \ln \cdot 0{,}98 = -0{,}0202027$$

$$y(T) = y_0 \cdot e^{k \cdot T} = 0{,}5 \cdot y_0 \rightarrow k \cdot T = \ln \cdot 0{,}5 \rightarrow \underline{\underline{T}} = \frac{\ln \cdot 0{,}5}{k} = \frac{\ln \cdot 0{,}5}{\ln \cdot 0{,}98} = 34{,}3 \, let$$

INDEKSI S STALNO IN PREMIČNO OSNOVO

Imamo 2 spremenljivki, prva predstavlja čas (leta, dneve,…), druga pa nek pojav v tem času; vrednsoti druge spremenljivke tvorijo časovno vrsto $S_{0,}$ $S_{1,}$ $S_2\ldots,$ $S_{i,}$ $S_{i+1,\ldots,}$ $S_{n.}$
Vrednosti spremenljivk zapišemo v tabeli:

Leta	70	71	72	73	74	75	76
Proizvodnja	3200	3500	3600	3650	3600	3780	3820
Proizvodnja	S_0	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6

$S_{0,}$ $S_{1,}$ $S_2\ldots,$ $S_{i,}$ $S_{i+1,\ldots,}$ $S_{n\ldots}$ <u>časovna vrsta</u>

Pojav torej lahko prikažemo s časovno vrsto (s konkretnimi vrednostmi glede na čas) ali pa pojav lahko popišemo z <u>indeksi</u> namesto s časovno vrsto.

Indeksi s stalno osnovo

S_0 … osnova ali baza → temu pripišemo indeks 100

Indeks $i_0 = 100$ (rečemo tudi 100%)

$$i_1 = \frac{S_1 \cdot 100}{S_0} = 109{,}4$$

ali proizvodnja je bila leta 71 za 9,4% višja kot leta 70.

$$S_1 : S_0 = i_1 : i_0 \Rightarrow i_1 = \frac{S_1 \cdot 100}{S_0}$$

$$\boxed{i_k = \frac{S_k \cdot 100}{S_0}}$$

INDEKSI S STALNO OSNOVO

Leta	70	71	72	73	74	75	76
Proizvodnja	3200	3500	3600	3650	3600	3780	3820
Proizvodnja	S_0	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
Indeks s stalno osnovo i_k	100	109,4	112,5	114,1	112,5	118,1	119,4

Indeksi s premično osnovo (verižni)

Pojav popisujemo glede na pojav v predhodnem letu.

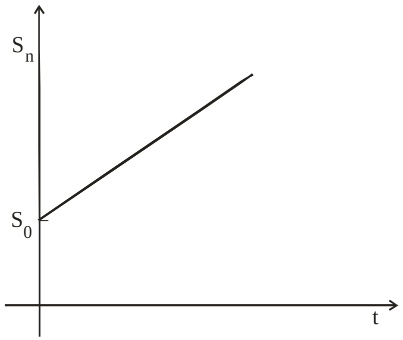
$$S_k : S_{k-1} = i_{k,p} : 100$$

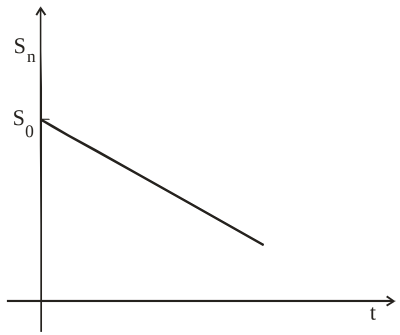
$$\boxed{i_k = \frac{S_k}{S_{k-1}} \cdot 100}$$

INDEKS S PREMIČNO OSNOVO (VERIŽNI)

Leta	70	71	72	73	74	75	76
Proizvodnja	3200	3500	3600	3650	3600	3780	3820
Proizvodnja	S_0	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
Indeks s premično osnovo $i_{k,p}$	-	109,4	102,9	101,4	98,6	105	101,1

Če imajo členi v časovni vrsti lastnost: $\boxed{S_k - S_{k-1} = d}$, kjer je za vsak k d vedno konstanten, potem pravimo, da členi časovne vrste predstavljajo aritmetično zaporedje. Členi linearno naraščajo, kadar je d>0 in linearno padajo, kadar je d<0.





Kadar pa velja za člene čas. vrste lastnost, da je $\frac{S_k}{S_k - 1}$=q, potem ti členi tvorijo geometrijsko zaporedje; q>1 – pojav eksponentno narašča, q<1 – pojav eksponentno pada