Dinamika fluidov

Masne bilance
Energijske bilance
Bernoullijeva enačba

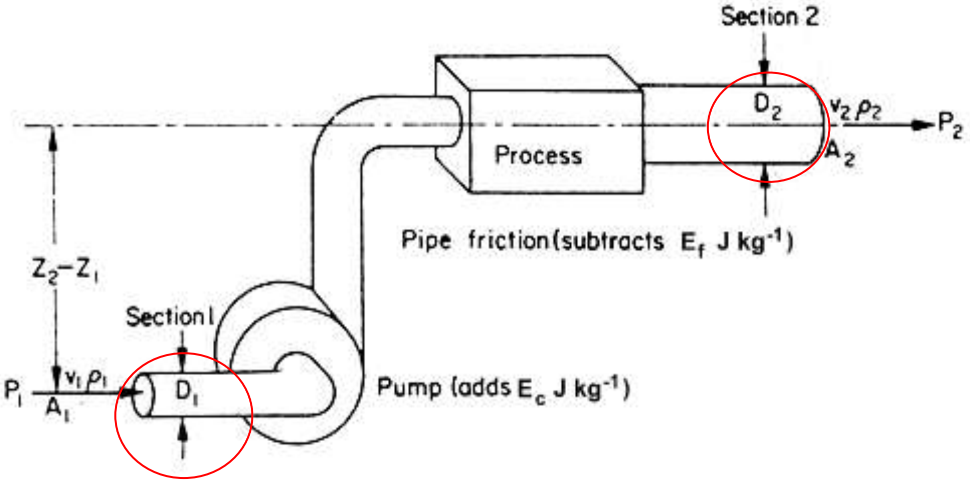
Dinamika tekočin

V številnih procesih se tekočine pretakajo. Problemi pretakanja tekočin se rešujejo z upoštevanjem principov ohranitve mase in ohranitve energije.

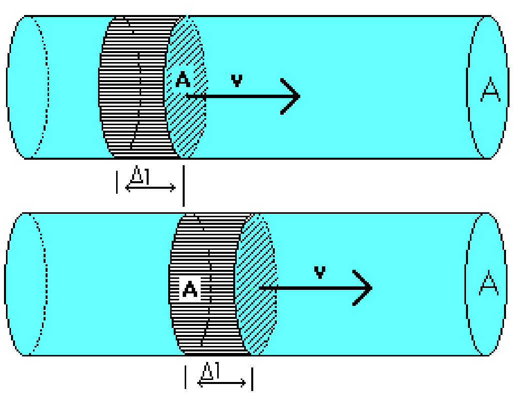
Za katerikoli sistem lahko napišemo **masno in energijsko bilanco**.

Masne bilance:

Skica: pretok nestisljive tekočine:
stacionarni pogoji,
ni akumulacije tekočine v sistemu



Masni pretok: $\Phi_m = \Delta m/\Delta t$ $\quad\quad$ $m = \rho * V$

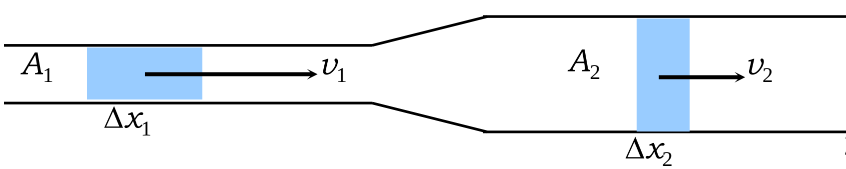


$\Phi_m = (A*\Delta l*)*\rho / \Delta t$

$\Delta l = v*\Delta t$

$\Phi_m = (A*v*\Delta t)*\rho/\Delta t = \mathbf{A* v *\rho}$

Pretok tekočine po cevi različnega premera:



Zakon o ohranitvi mase:

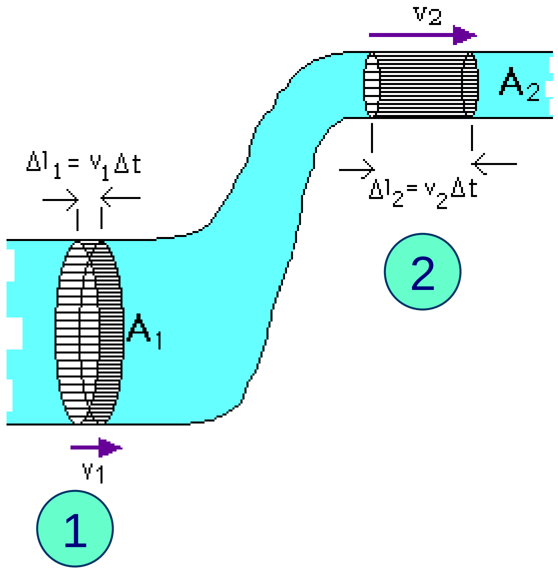
tekočina ki vstopa na točki 1 gre ven na točki 2

Masni pretok: $\Phi_m = A^* v * \rho$ (enote: m^2*m/s*kg/m^3 =kg/s)

Vstop: Vstopna površina: A_1, vstopna hitrost v_1, vst. tekočina z gostoto ρ_1

Izstop: Izstopna površina: A_2, izstopna hitrost v_2, izst. tekočina z gostoto ρ_2

Φ_m vstop = Φ_m izstop $\rightarrow$ torej: $A_1 * v_1 * \rho_1 = A_2 * v_2 * \rho_2$



Kontinuitetna enačba:

$$A_1 * v_1 * \rho_1 = A_2 * v_2 * \rho_2$$

v primeru ne-stisljive tekočine: ρ = konst

$$A_1 * v_1 = A_2 * v_2$$

Primer: Venturijeva cev za merjenje hitrosti tekočin

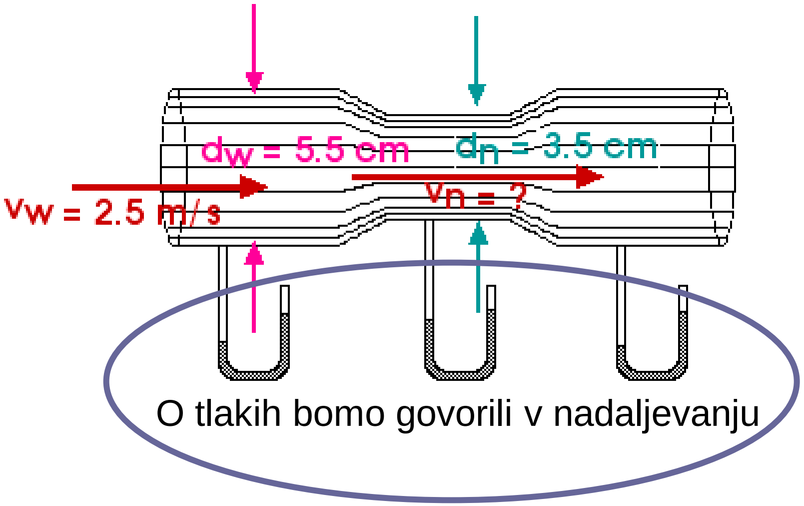
Tekočina teče po cevi s konstantnim pretokom. Izračunaj hitrost tekočine, če se premer cevi zoži iz 5.5cm na 3.5 cm.

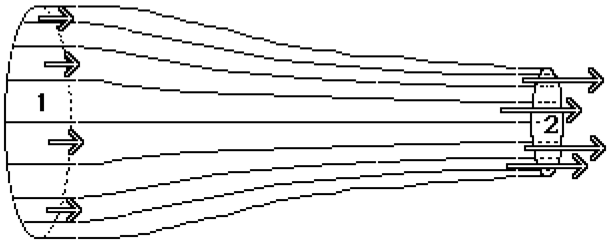
$$\mathbf{A_w * v_w = A_n * v_n}$$

$$v_n = (A_w/A_n) * v_w$$

$$v_n = \frac{\pi \cdot D_w^2 \cdot 4}{4 \cdot \pi \cdot D_n^2} \cdot v_w = \frac{D_w^2}{D_n^2} \cdot v_w$$

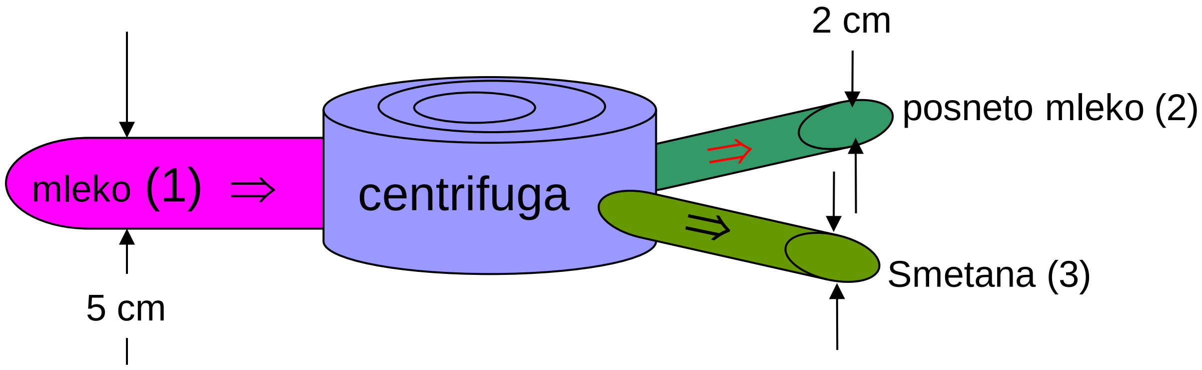
$$v_n = \frac{5.5^2 cm^2}{3.5^2 cm^2} \cdot 2.5\ m/s = 6.2\ m/s$$





Primer: Centrifugiranje mleka

Mleko uvajamo v proces centrifugiranja po cevi prmera 5 cm s hitrostjo 0.22 m/s. Gostota mleka je 1.035 kg/m^3. Proces centrifugiranja, zaradi različnih gostot, loči mleko na posneto mleko z gostoto 1.04 kg/m^3 in smetano z gostoto z gostoto 1.01 kg/m^3. Izračunaj hitrosti tokov posnetega mleka in smetane, ki izstopajo iz centrifuge po ceveh premera 2 cm.



Ne- stisljiva tekočina

$\Phi_{v1} = \Phi_{v2} + \Phi_{v3}$

$\Phi_{v2} = \Phi_{v1} - \Phi_{v3}$

$\Phi_v = A * v$ (m^2 * m/s)

Kontinuitetna enačba: $A_1 * v_1 * \rho_1 = A_2 * v_2 * \rho_2 + A_3 * v_3 * \rho_3$

Ker je tekočina <u>ne-stisljiva</u>, bo celotni volumen mleka, ki vstopa izstopil kot volumna ki ga zavzema smetana in posneto mleko. Zato enačbo poenostavimo, da lahko v_2 izrazimo z v_3 in v_1.

$$A_1 * v_1 = A_2 * v_2 + A_3 * v_3$$

$$v_2 = (A_1 * v_1 - A_3 * v_3)/A_2$$

Izraz za v_2 vstavimo v masno bilanco: $A_1 * v_1 * \rho_1 = [A_2 * (A_1 * v_1 - A_3 * v_3)/A_2] * \rho_2 + A_3 * v_3 * \rho_3$

$$A_1 * v_1 * \rho_1 = \rho_2 A_1 * v_1 - \rho_2 A_3 * v_3 + A_3 * v_3 * \rho_3$$

$$A_1 * v_1 * (\rho_1 - \rho_2) = A_3 * v_3 * (\rho_3 - \rho_2)$$

Primer: Centrifugiranje mleka

Znane količine: gostote:

Mleko: ρ_1=1.035 kg/m^3

Pos. ml. ρ_2 = 1.04 kg/m^3

Smetana: ρ_3= 1.01 kg/m^3.

Vstopna hitrost mleka: 0.22 m/s

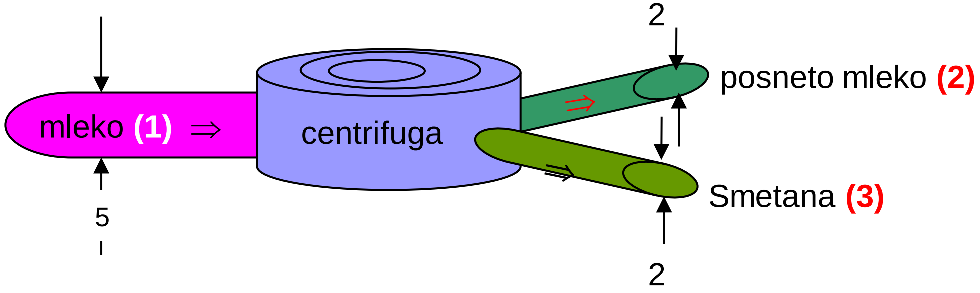
Izračunamo površine presekov cevi:

$$A_1 = \frac{\pi \cdot 0.05^2 m^2}{4}$$

A_1= 1.96*10^{-3} m^2

$$A_2 = \frac{\pi \cdot 0.02^2 m^2}{4}$$

$A_2 = A_3$ = 3.14*10^{-4} m^2



A_1*v_1*(ρ_1-ρ_2) = A_3*v_3*(ρ_3–ρ_2)

$$v_3 = \frac{1.96 \cdot 10^{-3} \cdot 0.22 \cdot (1.035 - 1.04)}{3.14 \cdot 10^{-4} \cdot (1.01 - 1.04)} = 0.23 m/s$$

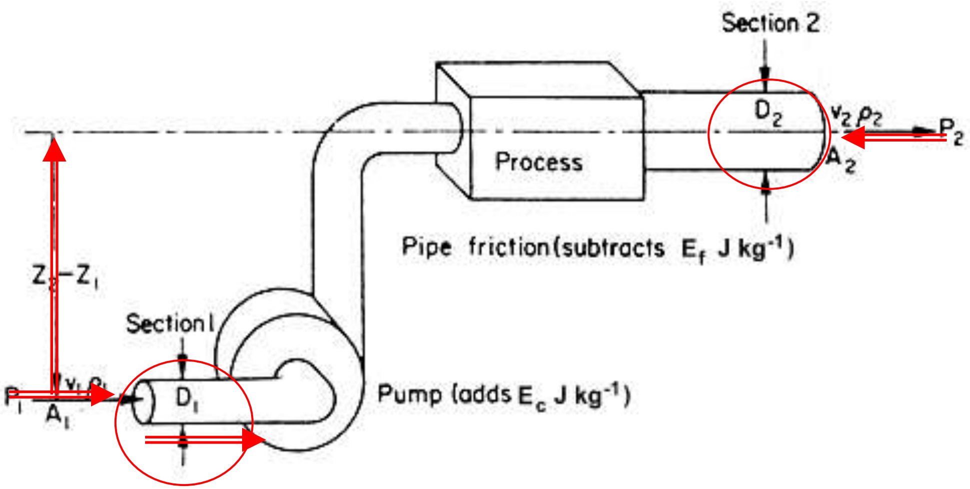
v_2 = (A_1*v_1-A_3*v_3)/A_2

v_2 = [(1.96 10^{-3}*0.22) – (3.14 10^{-4}*0.23)] /3.14 10^{-4} = 1.1m/s

Poleg masne bilance je pri pretoku tekočin treba upoštevati energijske bilance

Pri pretoku tekočine iz točke 1 na točko 2

Analiza energetskih bilanc: izbira referenčne točke.



Izmenjava energije z okolico:

Energetske izgube v okolico zaradi trenja

Mehanski vnos energije s črpanjem

Toplotna energija pri ogrevanju oz. hlajenju

Sekundarne oblike energije

Oblike energije:

Potencialna energija

Kinetična energija

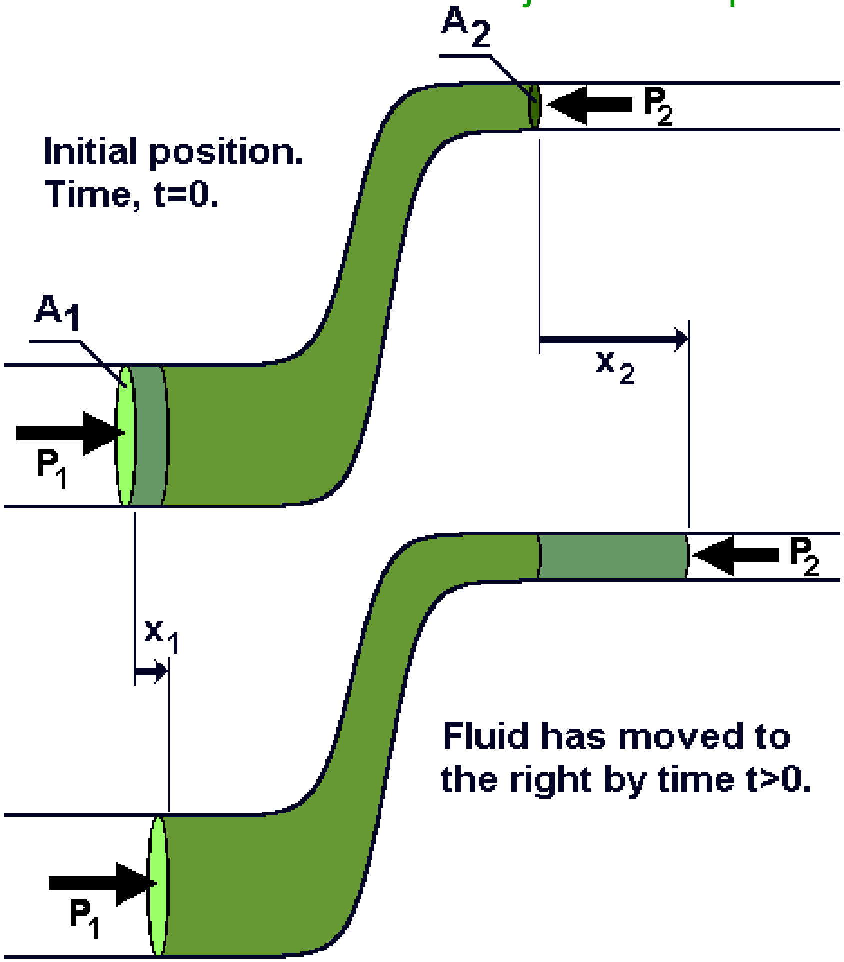
Energija tlaka

Primarna energija ki jo tekočina v procesu poseduje

Tlačna energija:

Proučujemo tekočino mase **m** na poti med mestom 1 in 2.Tekočina pri pretoku iz mesta 1 na mesto 2 opravi delo **W** proti sili **F**, ki potiska tekočino na določeni poti **x**.

Sila tlaka je enaka **P*A**. in je pravokotna na površino A. V točki 1 ima sila tlaka nasprotno smer kot v točki 2. Delo je sila krat pot **W = F*x**. Razlika v tlačni energiji je torej:



$$W = W_1 + W_2 = F_1 x_1 - F_2 x_2 .$$

$$\Delta W = P_1 A_1 x_1 - P_2 A_2 x_2 .$$

Volumen, ki ga zavzema proučevana tekočina:

$$\text{Volumen segmenta} = A_1 x_1 = A_2 x_2 .$$

$$\Delta W = P_1 A_1 \Delta x_1 - P_2 A_2 \Delta x_2 = (P_1 - P_2)\Delta V$$

Tlak tekočine pri pretakanju je merilo energije na enoto volumna oz. gostota energije.

$$\Delta P = \frac{F}{A} = \frac{F \cdot \Delta x}{A \cdot \Delta x} = \frac{\Delta W}{V} = \frac{\text{delo}}{\text{volumen}}$$

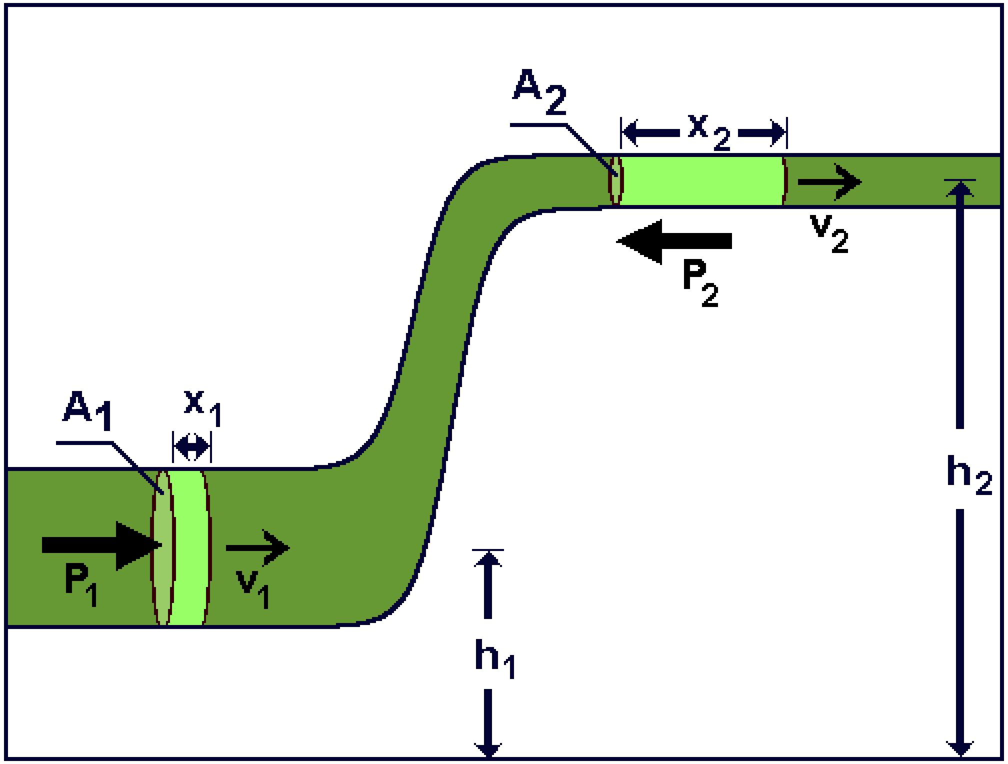
Kinetična in potencialna energija:

Posledica dela ki ga je opravila tekočina s pretakanjem je v spremembi mehanske energije segmenta tekočine. Torej v spremembi njene kinetične **K** in potencialne **U** energije.

Sprememba v kinetični energiji: $\Delta K = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$

v je povprečna hitrost tekočine v laminarnem strujanju in **m** je masa segmenta tekočine

Primernejša oblika kinetične energije premikajoče se tekočine je energija na enoto volumna:



$$\frac{\text{kinetičin energija}}{\text{volunen}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2}{V} = \frac{1}{2}\cdot\rho\cdot v^2$$

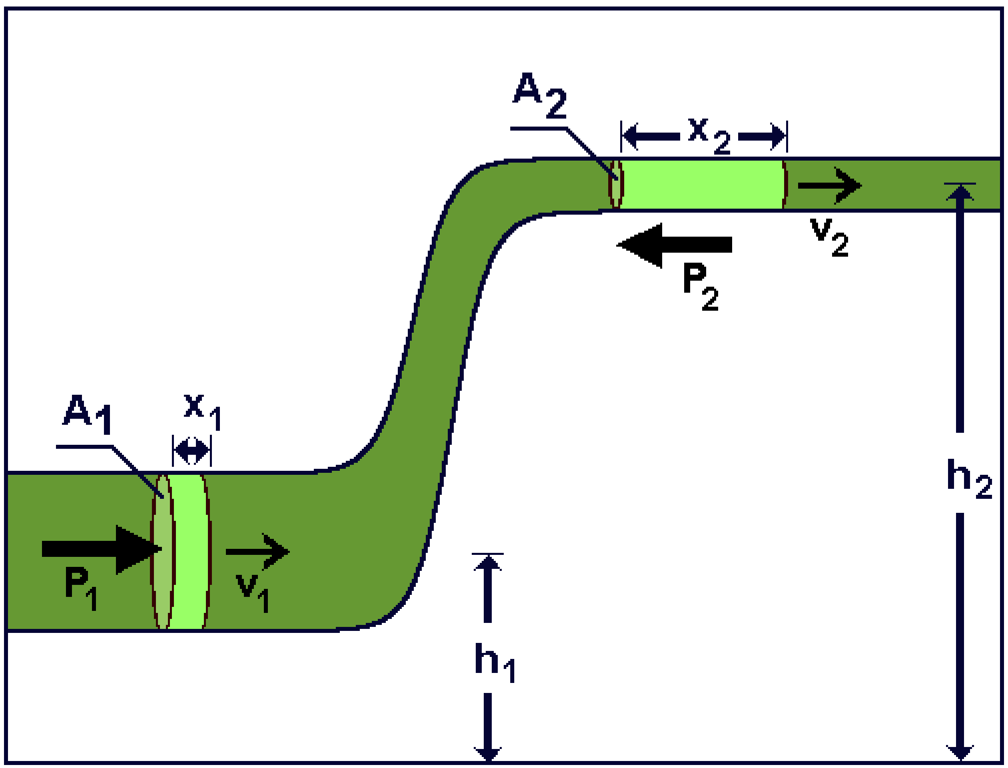
$$\frac{\Delta K}{V} = \frac{1}{2}\cdot\rho\cdot v_2^2 - \frac{1}{2}\cdot\rho\cdot v_1^2$$

Kinetična in potencialna energija:

Posledica dela ki ga je opravila tekočina s pretakanjem je v spremembi mehanske energije segmenta tekočine. Torej v spremembi njene kinetične **K** in potencialne **U** energije.

Sprememba v potencialni energiji $\Delta U = mgh_2 - mgh_1$

Primernejša oblika kinetične energije premikajoče se tekočine je energija na enoto volumna:



$$\frac{\text{potencialna energija}}{\text{volumen}} = \frac{m \cdot g \cdot h}{V} = \rho \cdot g \cdot h$$

$$\frac{\Delta U}{V} = \rho \cdot g \cdot h_2 - \rho \cdot g \cdot h_1$$

Celotna sprememba mehanske energije tekočine:

$$\Delta E = E_2 - E_1 = (U_2 + K_2) - (U_1 + K_1),$$

$$\Delta E = (mgh_2 + mv_2^2/2) - (mgh_1 + mv_1^2/2).$$

Celotna sprememba mehanske energije tekočine na enoto volumna:

$$\frac{\Delta E}{V} = \left(\rho \cdot g \cdot h_2 - \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2\right) - \left(\rho \cdot g \cdot h_1 - \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2\right)$$

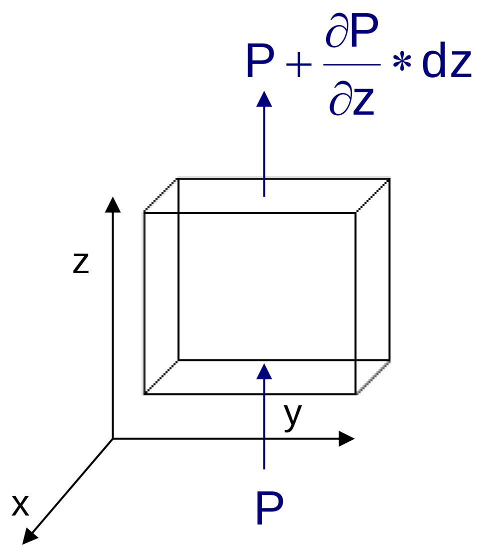
P: enota = N/m^2 = kg/ms^2

Statika tekočin

Stisljiva tekočina -plini

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0$$



Stisljiva tekočina $\rho = f(P)$

Idealni plin: P*V = n*R*T

$$\rho = \frac{m}{V}$$

$$P * V = \frac{m}{M} * R * T \Rightarrow \rho = \frac{P * M}{R * T}$$

$$P = P + \frac{\partial P}{\partial z} * dz$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho * g$$

$$dP = -\rho * g * dz$$

nestisljiva tekočina:

$$\rho = \text{konst}$$

$$\int_{P_1}^{P_2} dP = -\rho * g * \int_{z_1}^{z_2} dz$$

$$P_2 - P_1 = \rho * g * (z_2 - z_1)$$

$$dP = -\frac{P * M}{R * T} * g * dz$$

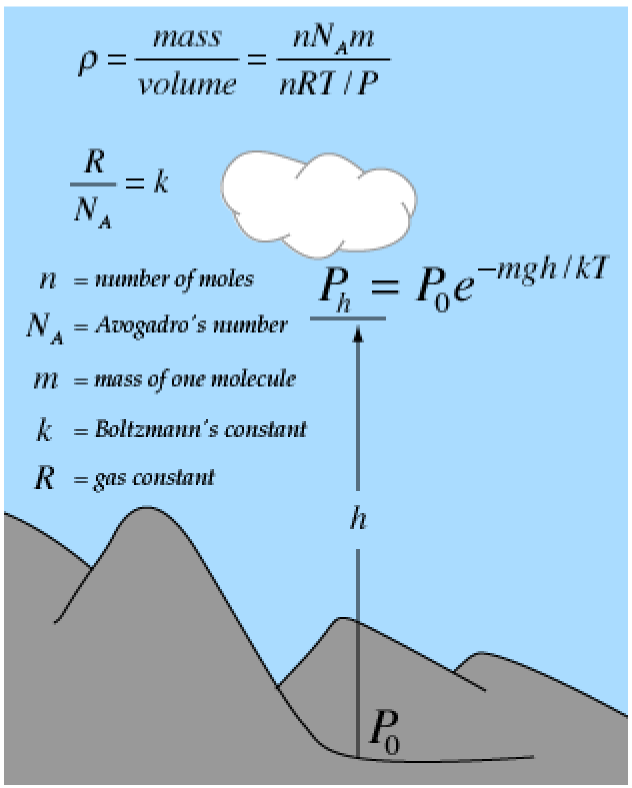
$$\int_{P_1}^{P_2} \frac{dP}{P} = -\frac{M * g}{R * T} * \int_{z_1}^{z_2} dz$$

$$\ln(P_2) - \ln(P_1) = \left(-\frac{M * g}{R * T}\right) * (z_2 - z_1)$$

Barometrska enačba:

$$\ln(P_2 / P_1) = \left(-\frac{M * g}{R * T}\right) * (z_2 - z_1)$$

$$P_2 = P_1 * e^{\left(-\frac{M*g}{R*T}\right)*(z_2 - z_1)}$$



Enačba velja za idealne pline

Uporabimo jo lahko za približen izračun spremembo atmosferskega pritiska nadmorsko višino.

Pri čemer zanemarimo spremembo temperature in s tem povezano spremembo gostote.

V troposferi se temperatura z višino linearno spreminja (do cca 11000 m nadmorske višine in sicer:

$$\mathbf{T = T_0 - B*z}$$

T_0.. temp v K na nadmorski višini = 0 m in je 15°C,

B.. 0.0065 K/m pri 15°C; = 288.15 K

Če spremembo temperature z višino vstavimo v barometrično enačbo dobimo:

$$P = P_0 * \left(1 - \frac{B * z}{T_0}\right)^{(M*g/R*B)}$$

P: enota = N/m^2 =kg/ms^2

Barometrska enačba:

$$P = P_0 * e^{\left(-\frac{M*g}{R*T}\right)*(z-z_0)}$$

Primer:

Če je na morski gladini zračni tlak 101.35 KPa, kakšen bo zračni tlak na nadmorski višini 5000 m?

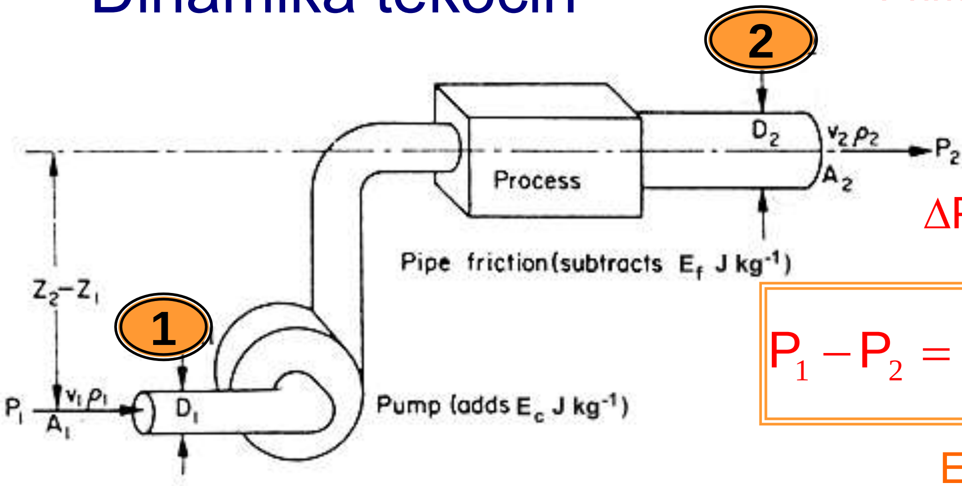
(a) Ob predpostavki izotermnih pogojev pri dogovorjeni standardni temp. 15°C

$$P = 101.35 * 10^3 * e^{\left(-\frac{29*9.81*5000}{8314*288}\right)} = 101.35 * 10^3 * e^{-0.594} = 0.559 * 10^5 \text{Pa}$$

Enote:
R = 8314 J / kmol K
J: kg m^2 / s^2
M: kg / kmol

DN: Izračunaj zračni tlak na Mt. Everestu (8847m), preveri kako je z enotami v gornjih enačbah

Dinamika tekočin



Primarna energija ki jo tekočina v procesu poseduje:

U: Potencialna energija
K: Kinetična energija
W: Energija tlaka

$$\Delta W = \Delta U + \Delta E$$

$$\Delta P = \frac{\Delta W}{V} = \frac{\text{delo}}{\text{volumen}}$$

$$\boxed{P_1 - P_2 = \left[\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot v_2^2 - \frac{1}{2}\cdot\rho\cdot v_1^2\right] + [\rho\cdot g\cdot h_2 - \rho\cdot g\cdot h_1]}$$

Energijska bilanca upošteva le spremembe energije idealne tekočine pri pretakanju

Izmenjava energije z okolico:

F: Energetske izgube v okolico zaradi trenja: zaradi viskoznega trenja v tekočini in zaradi trenja tekočine v stiku s trdno cevjo se sprošča toplota. Dejanska vrednost tornih izgub zavisi od tipa toka(laminarni-turbulentni), lastnosti tekočine, sistema procesa, oblika in lastnosti cevi, itd.

M: Mehanski vnos energije s črpanjem: da tekočina teče navzgor je potrebna mehanska moč črpalk ali vodnih turbin

T: Toplotna energija pri ogrevanju oz. hlajenju tekočine med proučevanim procesom.

Celokupna energijska bilanca procesa: $\mathbf{W_1 + U_1 + K_1 = W_2 + U_2 + K_2 - F + M + T}$

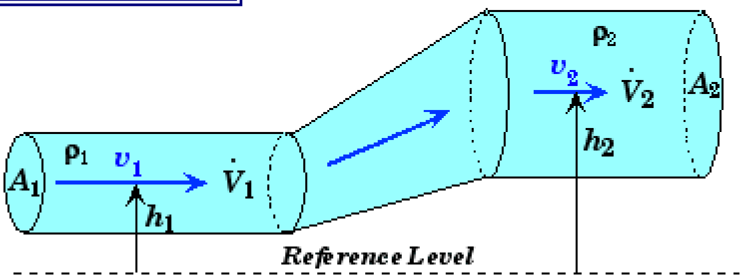
Dinamika tekočin

BERNOULLI-jeva enačba za idealni tok tekočin

Bernoulli - švicarski matematik je l. 1738 podal enačbo ki je še danes osnova fluidne mehanike.

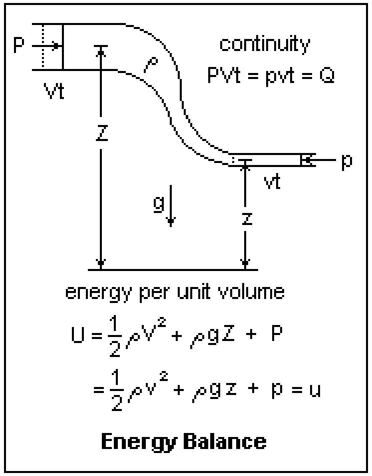
Enačba je matematični zapis toka tekočin ob upoštevanju energijske bilance

$$\boxed{P_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 + \rho \cdot g \cdot h_1 = P_2 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_2^2 + \rho \cdot g \cdot h_2}$$



Enačba velja če privzamemo da:

- Je tekočina nestisljiva in neviskozna
- Ni energetskih izgub zaradi trenja med tekočino in steno cevi.
- Ni prenosa toplotne energije na meji med tekočino in steno cevi (toplotne izgube, gretje ali hlajenje).
- V sistemu ni cevi, ni mehanskih črpalk.
- Tok tekočine je laminaren in stacionaren



BERNOULLI-jeva enačba za idealni tok tekočin

$$\boxed{P_1 + \frac{1}{2}\cdot\rho\cdot v_1^2 + \rho\cdot g\cdot h_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho\cdot v_2^2 + \rho\cdot g\cdot h_2}$$

Členi enačbe imajo enoto tlaka:

Različne oblike energije lahko izrazimo z vrednostjo tlaka:

Potencialni, kinetični in statični tlak.

Če enačbo delimo z gravitacijskim pospeškom in gostoto $\boxed{\rho\cdot g = \gamma}$ dobimo :

$$\frac{P_1}{\rho\cdot g} + \frac{v_1^2}{2\cdot g} + h_1 = \frac{P_2}{\rho\cdot g} + \frac{v_2^2}{2\cdot g} + h_2$$

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2\cdot\rho}{2} + h_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{v_2^2\cdot\rho}{2} + h_2$$

Če ni gibanja tekočine v = 0 : kinetični člen odpade

ob uporabi Bernoullijeve enačbe dobimo enačbo za statični tlak:

$$P_1 = P_2 + \rho\cdot g\cdot(h_2 - h_1) = \gamma\cdot(h_2 - h_1)$$

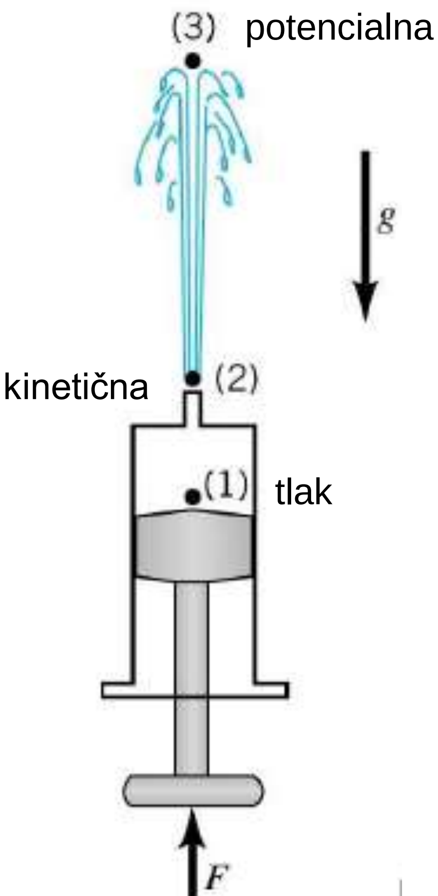
Člene energijske bilance smo izrazili z višinami:

potencialna, hitrostna in tlačna višina

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 + \gamma z_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2 + \gamma z_2$$

Razumevanje Bernoullijeve enačbe:

Injekcijska brizga iz katere iztiskamo tekočino. Sila na čep povzroči višji tlak tekočine v injekciji (1). Tekočina teče z visoko hitrostjo skozi vrat brizge (2). Višina curka (3) je odvisna od tlaka v brizgi. Razloži energijske spremembe v tekočini za točke 1, 2, 3 z uporabo Bernoullijeve enačbe.



Bernoulijeva enačba za stacionarni, neviskozni in sestisljivi tok

Vsota vseh treh oblik energij tekočine: tlačne, kinetične mora biti konstantna

Gibanje tekočine je posledica spremembe v energiji, ki jo poseduje tekočina

Tlačna razlika med točko 1 in 2 povzroči pospeševanje toka v šobi brizge, hitrost toka je velika.

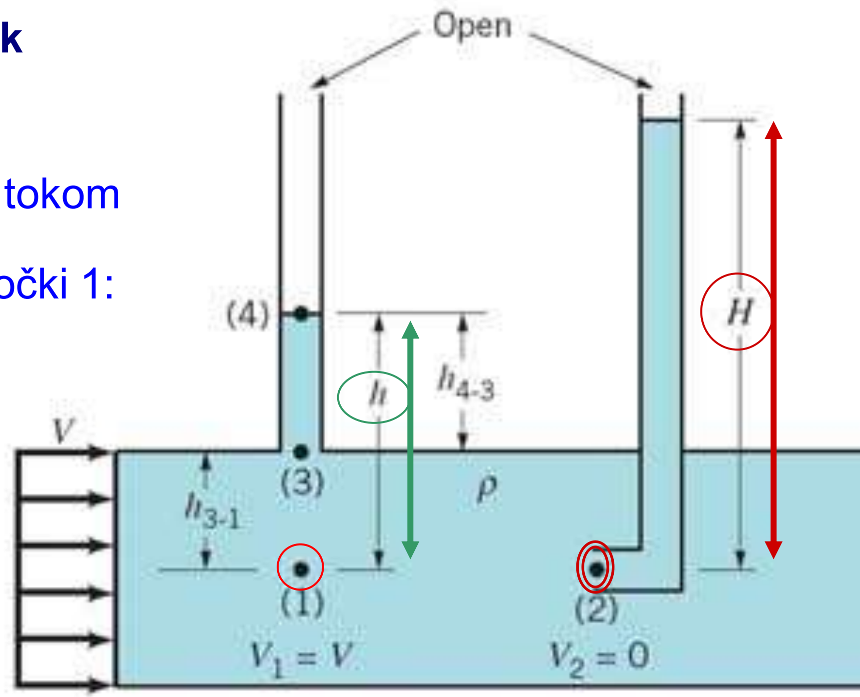
Razlika v hidrostatski višini med točkama 2 in 3 povzroči pojemek hitrosti tekočine

	Energy Type		
	Kinetic	**Potential**	**Pressure**
Point	$\rho V^2/2$	γz	p
1	Small	Zero	Large
2	Large	Small	Zero
3	Zero	Large	Zero

$$\frac{P_1}{\gamma}+\frac{v_1^2\cdot\rho}{2}+h_1=\frac{P_2}{\gamma}+\frac{v_2^2\cdot\rho}{2}+h_2$$

Uporaba Bernoullijeve enačbe

Celokupni, statični, stagnantni in dinamični tlak



- Statični tlak predstavlja del celokupne energije tekočine med tokom in je tlak na stene cevi med tokom

  Ob upoštevanju Bernoulijeve enačbe dobimo v točki 1:

  $$p_1=\gamma\cdot h_{3-1}+p_3=\gamma\cdot h_{3-1}+\gamma\cdot h_{4-3}=\gamma\cdot h$$

  $\gamma \cdot h$ .. imenujemo tudi hidrostatični tlak pove za koliko se tlak v tekočini spremeni, če se spremeni globina tekočine (**h**)

- $\rho V^2/2$ je dinamični tlak, ki si ga lahko predstavljamo kot tlak na koncu cevke, ki je vstavljena v tok tekočine proti vodnemu toku. Cevka, ki je napolnjena s tekočino kaže višino H.
- Tekočina v vratu cevke na mestu (2) bo mirujoča, v_2= 0. Točka (2) je stagnantna točka.

Stagnantni tlak $\longrightarrow$ $p_2=p_1+\frac{1}{2}\rho V_1^2$

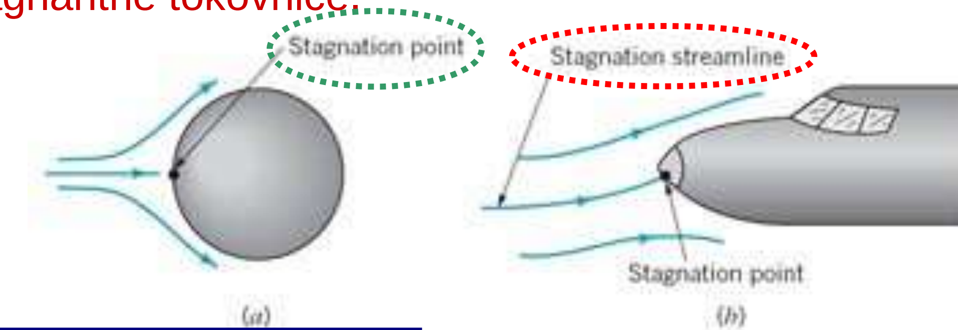
Statični tlak

Dinamični tlak

Uporaba Bernoullijeve enačbe

Celokupni, statični, stagnantni in dinamični tlak

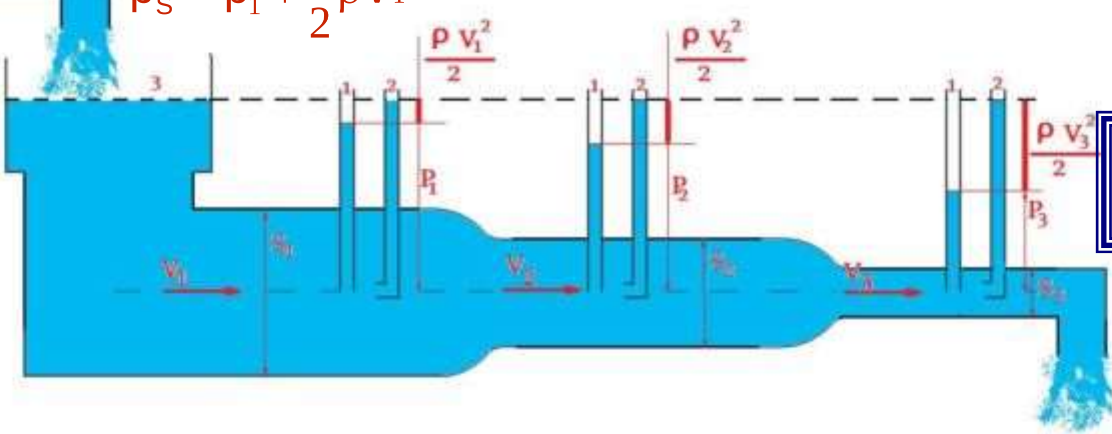
- Stagnante točke se pojavijo kjerkoli je neko telo postavljeno v tok tekočine. Tekočina mora obiti telo nad ali pod njim.
- Tokovnice ki trčijo ob trdno telo imenujemo stagnantne tokovnice.



- Če ni spremembe višine je stagnantni tlak največji tlak, ki ga dobimo vzdolž tokovnice v toku tekočine: $p_2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2$

$$\boxed{P_1 + \frac{1}{2}\cdot\rho\cdot v_1^2 + \rho\cdot g\cdot h_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho\cdot v_2^2 + \rho\cdot g\cdot h_2 = P3 + \frac{1}{2}\rho\cdot v_3^2 + \rho\cdot g\cdot h_3}$$

$$p_S = p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2$$



Energijske spremembe med tokom tekočine lahko izrazimo z višino:

$$\boxed{\frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2\cdot\rho}{2} + h_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{v_2^2\cdot\rho}{2} + h_2 = \frac{P_3}{\gamma} + \frac{v_3^2\cdot\rho}{2} + h_3}$$

Uporaba Bernoullijeve enačbe

Primer: Kolesar se premika s **konstantno hitrostjo v_0**. Smatrajmo, da ima tok zraka okoli kolesarja konstantno hitrost v_o (glej spodnjo sliko). Določi tlačno razliko med točko 1 in točko 2.

Rešitev: Napišemo Bernoulijevo enačbo za tokovnico zraka, kot je prikazano na skici

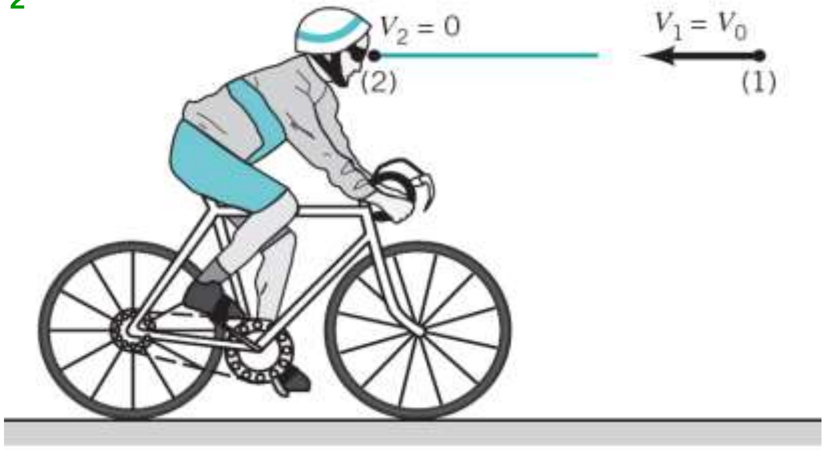
$$P_1 + \rho \cdot \frac{v_1^2}{2} + \cancel{\gamma \cdot z_1} = P_2 + \rho \cdot \cancel{\frac{v_2^2}{2}} + \cancel{\gamma \cdot z_2}$$

ni razlike v višini: $z_1 = z_2$

(1) Zrak se prosto giblje: $v_1 = v_0$

(2) V točki kolesarjevega nosu(stagnantna točka) $v_2 = 0$

$$\boxed{P_2 - P_1 = \rho \cdot \frac{v_1^2}{2} = \rho \cdot \frac{v_0^2}{2}}$$



Pretvorbe različnih enot: konverzijski faktorji

Tlak	Tlak vrednost v (N/m^2 = Pa)
1 bar	1.00×10^5
1 atmosphere (atm)	1.0135×10^5
1 mm Hg	1.33×10^2
1 torr	1.33×10^2
1 lb/in.^{2} (psi)	6.89×10^3

Dolžina

From/To	m	mm	km	in.	ft	yd	mi
meter (m)	1	1,000	0.001	39.37	3.281	1.094	0.0006215
inch (in.)	0.0254	25.4	2.54E-05	1	0.08333	0.02778	1.578E-05
foot (ft)	0.3048	304.8	3.048E-04	12	1	0.3333	1.894E-04
yard (yd)	0.9144	914.4	9.144E-04	36	3	1	5.683E-04
mile (mi)	1,609	1,609,000	1.609	63,350	5,280	1,760	1

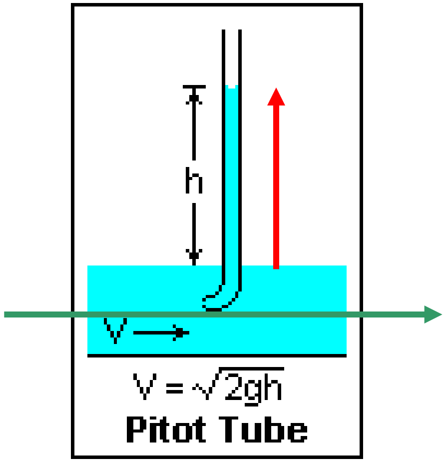
Volumen

From/To	m^3	l	ft^3	gal	Imp gal	ac-ft
cubic meter (m^3)	1	1,000	35.31	264.2	220.0	8.107E-04
cubic foot (ft^3)	0.02832	28.32	1	7.481	6.229	2.296E-05
gallon US	0.003785	3.785	0.1337	1	0.8327	3.069E-06
gallon Imp. (Imp gal)	0.004546	4.546	0.1605	1.201	1	3.686E-06

Uporaba Bernoullijeve enačbe

- Ob poznavanju statičnega in stagnantnega tlaka, lahko izračunamo hitrost tekočine v cevi.
- Ta princip uporablja Pitot-ova cev, ki se rabi za merjenje hitrosti toka v cevi.

Pitot-ova cev: statična cev, meri hitrost tekočine na osnovi izmerjenega tlaka



$$\boxed{P_1 + \frac{1}{2}\cdot\rho\cdot v_1^2 + \rho\cdot g\cdot h_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho\cdot v_2^2 + \rho\cdot g\cdot H}$$

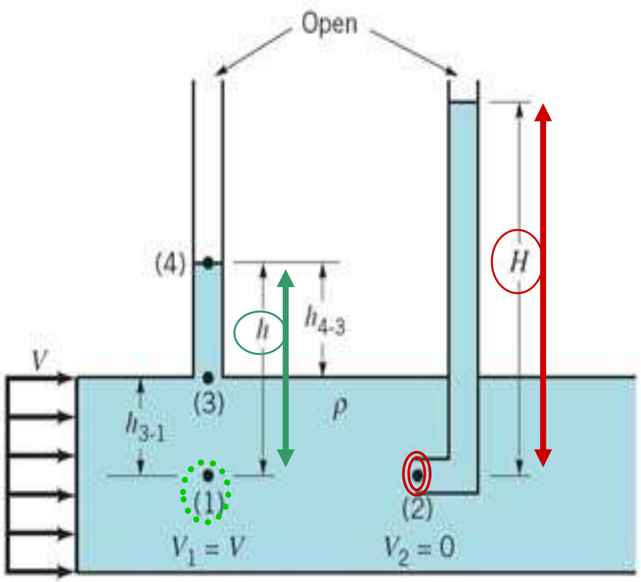
$P_1 = \rho.g.h$

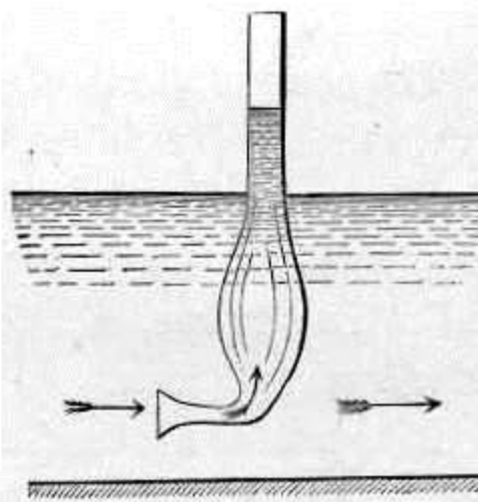
$$\left.\begin{array}{l} P_2 = P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 \\ P_2 = \rho.g.H \\ v_2 = 0 \end{array}\right\}$$

$$P_2 - P_1 = \tfrac{1}{2}\cdot\rho\cdot v_1^2 \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2}{\rho}\cdot(P_2 - P_1)}$$

$$P_2 - P_1 = \rho\ .\ g.\ (H - h)$$

$$v = \sqrt{2\cdot g\cdot\Delta h}$$





PITOT'S TUBE.

Uporaba Bernoullijeve enačbe

Pitot-ova cev: statična cev, meri hitrost tekočine na osnovi izmerjenega tlaka

Primer: Hitrost zraka v šobi.

Zrak pri 0°C teče skozi šobo v hladilni sistem. Pitot-ova cev je vstavljena v tok zraka. Manometer pokaže tlačno razliko z razliko višini vodnega stolpca 8 mm. Izračunaj hitrost zraka v šobi, če je gostota zraka pri 0°C 1.3 kg/m^3.

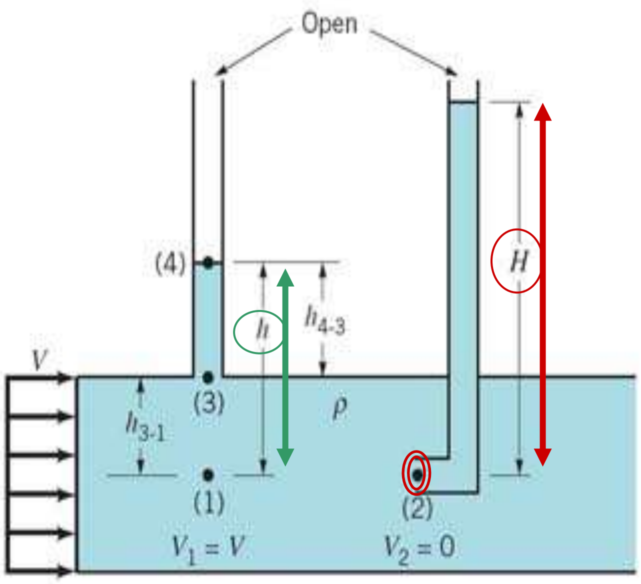
Rešitev: v Pitot-ovo cev teče zrak, manometer pa kaže razliko v višini vodnega stolpca.

Zato je treba razliko v višini vodnega stolpca pretvoriti v razliko v višini zračnega stlpca: $(\rho.g\ .h)_{voda} = (\rho.g\ .h)_{zrak}$

0.8 mm $_{(voda)}$:

$0.8 * 10^{-3}\mathrm{m} * 1000/1.3 = 0.62\ \mathrm{m}_{(zrak)}$

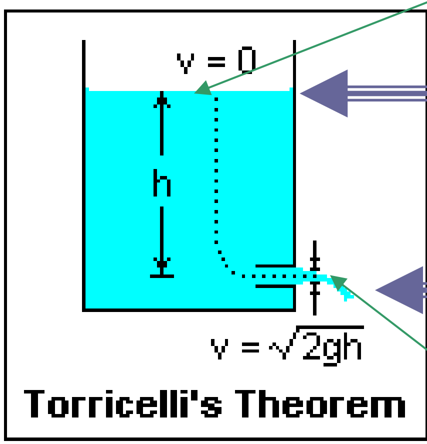
$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot \Delta h} = \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 0.62} = 3.5\ \mathrm{m/s}$$



DN: preveri enote v gornjih enačbah

Uporaba Bernoullijeve enačbe

Iztok tekočine iz rezervoarja: pretok skozi šobo



$$P_1 + \frac{\rho \cdot v_1^2}{2} + \rho \cdot g \cdot h_1 = 0 + 0 + \rho \cdot g \cdot h_1$$

$$P_2 + \frac{\rho \cdot v_2^2}{2} + \rho \cdot g \cdot h_2 = 0 + \frac{\rho \cdot v_2^2}{2} + 0$$

$$\rho \cdot g \cdot h_1 = \frac{\rho \cdot v_2^2}{2} \Longrightarrow v_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h_1}$$

Premer rezervoarja je veliko večji od premera šobe:

$\Rightarrow$ P_1 = P_2 nad gladino je enak tlak kot pri iztoku iz šobe zunaj rezervoarja = atmosferski tlak

$\Rightarrow$ Gladina se zelo počasi znižuje, ker je volumen tekočine velik: v =0

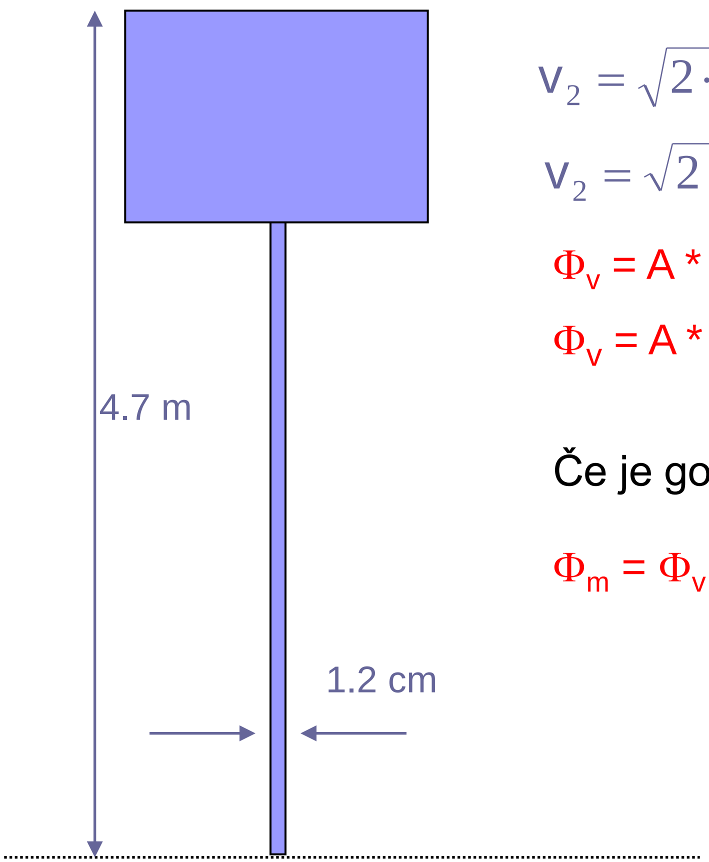
$\Rightarrow$ Na iztoku tkočina vso potencialno energijo pretvori v kinetično

$$P_1 + \frac{\rho \cdot v_1^2}{2} + \gamma \cdot z_1 = P_2 + \frac{\rho \cdot v_2^2}{2} + \gamma \cdot z_2$$

Uporaba Bernoullijeve enačbe

Primer: pretok pri iztoku iz rezervoarja

Rezrvoar za shranjevanje mleka je 4.7 m nad iztočno cevjo. Rezervoar je pri atmosferskem tlaku, prav tako kot iztočna cev. Kakšen bo volumski pretok mleka, če je premer iztočne cevi1.2 cm. Energetske izgube v okolico zanemarimo



$$v_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot z_1}$$

$$v_2 = \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 4.7} = 9.6 m/s$$

$\Phi_v = A * v = (\pi * 0.012^2 /4) m^2 * 9.6$ m/s

$\Phi_v = A * v = 1.08\ 10^{-3}\ m^3/s$

Če je gostota mleka 1036 kg/m^3, bo masni pretok:

$\Phi_m = \Phi_v * \rho = 1.08\ 10^{-3}\ m^3/s * 1036$ kg/m3 = 1.119 kg/s

Uporaba Bernoullijeve enačbe

Primer: Zbiralnik vode
80 m visok zbiralnik vode napaja mestni vodovod. Kako hitro naj bi voda izstopala iz zbiralnika?
Če odpremo hladno vodo v stanovanju na višini 2 m.

$$v_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot z_1}$$

$$v_2 = \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 78} = 39.1\,\text{m/s} \approx 140\,\text{km/h}$$

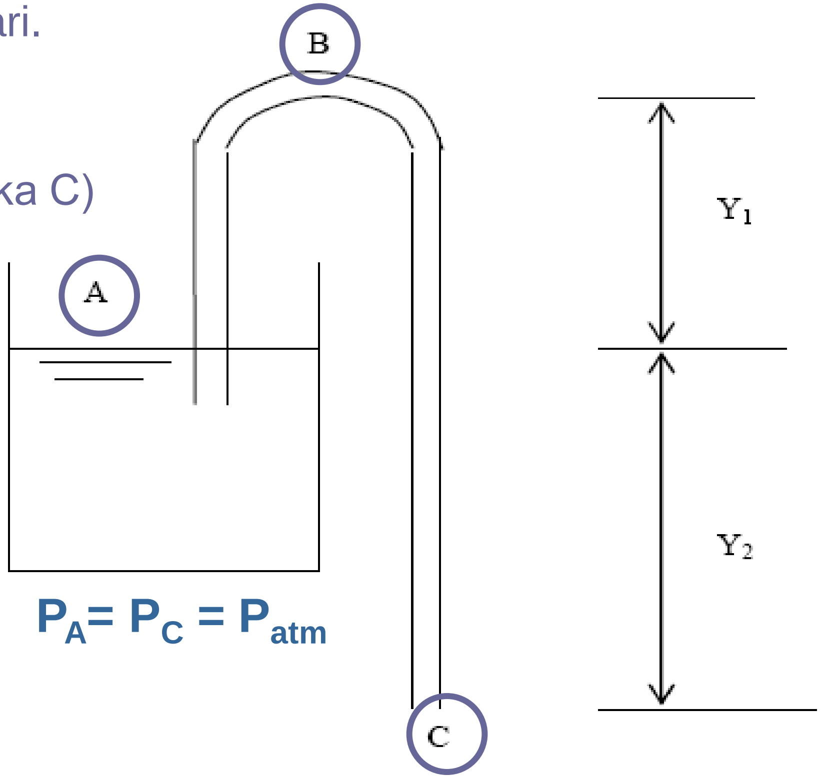
Toda voda ne izteka iz pipe tako hitro.
Poleg reducirnih ventilov gre za velike izgube zaradi trenja,
Bernoullijeva enačbe torej ne drži, ker nismo upoštevali energetskih izgub.
Viskozno trenje upočasni tok vode.
Trenje je povezano s turbulentnim tokom v ceveh

Uporaba Bernoullijeve enačbe

Primer: Voda izteka iz rezervoarja po cevi premera 500 mm (sifon)

(1) Določi maksimalno možno višino v točki B, da pretok vode v cevi ne pade pod 2.15 m^3/s in absolutni tlak ni manjši od 20 kN/m^2.

(2) Določi višino cevi v točki C kjer voda izteka iz cevi. Rezervoar je pri atmosferskem tlaku 1 bar, energetske izgube v okolico zanemari.



Rešitev:

hitrost vode v točki B je enaka hitrosti na iztoku (točka C)

$\Phi = A * v = (\pi*0.5^2/4)*v = 2.15\ m^3/s$

$v = v_B = v_C = 10.95$ m/s

$P_A = P_C = P_{atm}$

Bernoullijeva enačba v točkah A in C

$$\overset{A}{Y_A + \frac{P_A}{\rho \cdot g} + \frac{v_A^2}{2 \cdot g}} = \overset{C}{Y_2 + \frac{P_C}{\rho \cdot g} + \frac{v_C^2}{2 \cdot g}}$$

$$-\rho \cdot g \cdot Y_2 = \frac{\rho \cdot v_C^2}{2} = \frac{\rho \cdot v_B^2}{2}$$

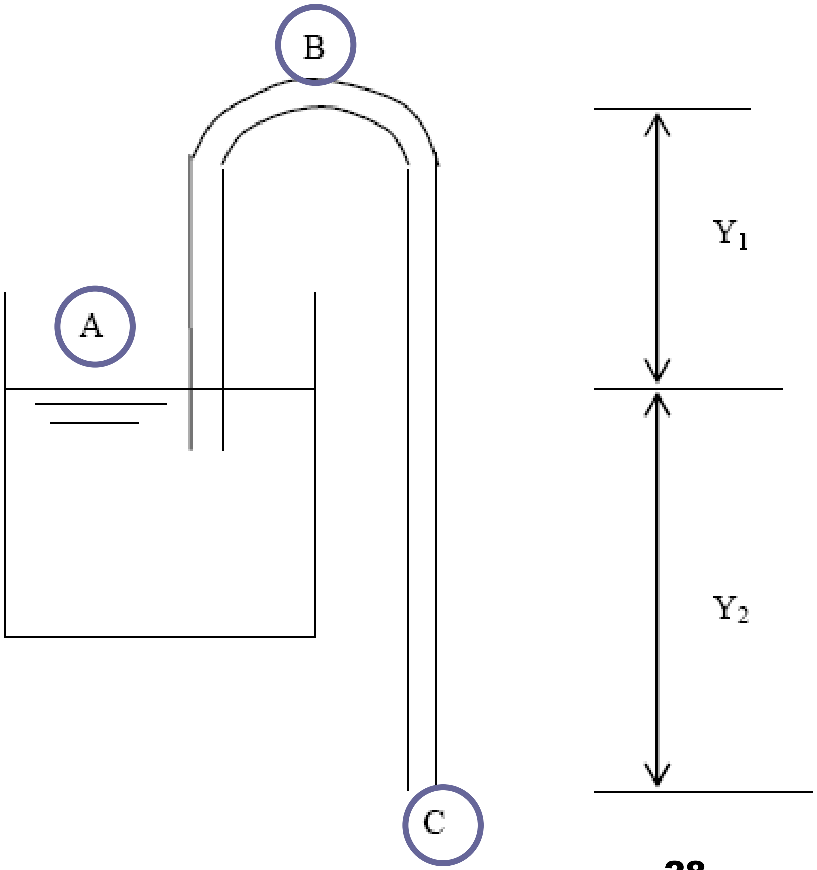
$$\Rightarrow Y_2 = -\frac{v_C^2}{2g} = -6.11\ \mathrm{m}$$

$$P_1 + \frac{\rho \cdot v_1^2}{2} + \gamma \cdot z_1 = P_2 + \frac{\rho \cdot v_2^2}{2} + \gamma \cdot z_2$$

Uporaba Bernoullijeve enačbe

Primer: Voda izteka iz rezervoarja po cevi premera 500 mm (sifon)

atmosferski tlak je na točki A in C: 1 bar $=10^5$ N/m^2 minimalni tlak v cevi - točka B = $2*10^3$ N/m^2



Bernoullijeva enačba v točkah A in B

$$z_A + \frac{P_{atm}}{\rho \cdot g} + \frac{v_A^2}{2 \cdot g} = z_B + \frac{P_B}{\rho \cdot g} + \frac{v_B^2}{2 \cdot g}$$

$$\frac{v_B^2}{2g} = \frac{v_C^2}{2g} = 6.11 \text{ m}$$

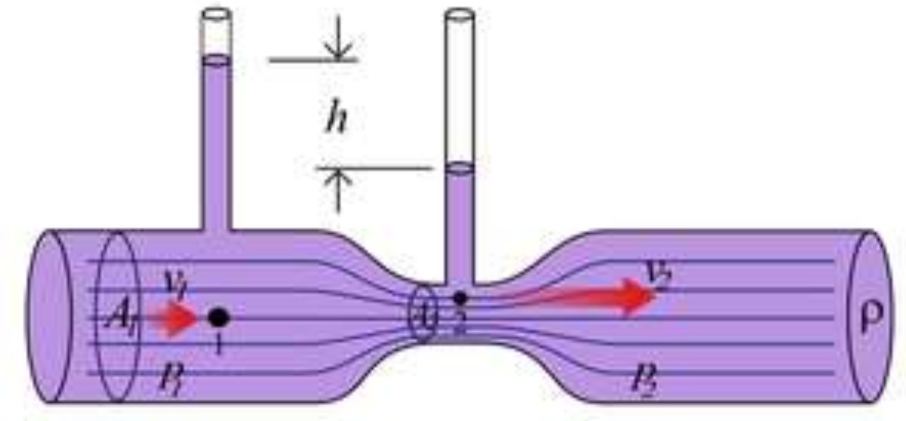
$0 + 10^5/(\rho.g) + 0 = y_1 + 2*10^4/(\rho.g) + 6.11$

$\Rightarrow y_1 = 2.04$ m

$$P_1 + \frac{\rho \cdot v_1^2}{2} + \gamma \cdot z_1 = P_2 + \frac{\rho \cdot v_2^2}{2} + \gamma \cdot z_2$$

Uporaba Bernoullijeve enačbe

Merjenje pretoka z Venturijevo cevjo



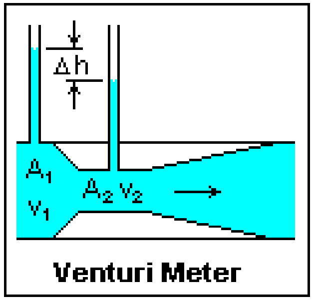
Predpostavke:

nestisljiva tekočina : $\rho_1 = \rho_2 = \rho = \text{konst}$

laminaren tok

ni spremembe višine :$z_1 = z_2$

$$P_1 + \frac{\rho \cdot v_1^2}{2} = P_2 + \frac{\rho \cdot v_2^2}{2}$$



Hitrost v točki 2 dobimo iz kontinuitetne enačbe: $v_1 * A_1 = v_2 * A_2$

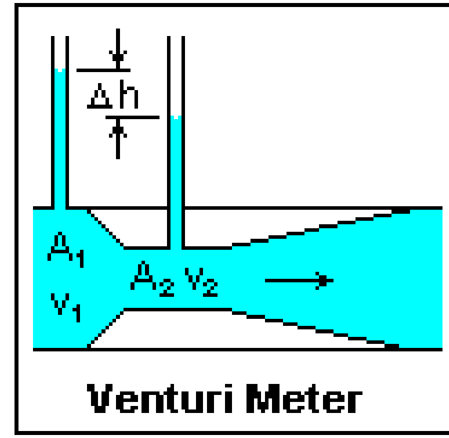
$$v_2 = v_1 \cdot \frac{A_1}{A_2} = v_1 \cdot \frac{\pi \cdot D_1^2}{\pi \cdot D_2^2}$$

$$P_1 - P_2 = \frac{\rho \cdot v_2^2}{2} - \frac{\rho \cdot v_1^2}{2} = \frac{\rho \cdot v_1^2}{2} \cdot \left[\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right]$$

Hitrosti v cevi ob zožitvi lahko izračunamo, če poznamo tlačno razliko v cevi zaradi zožitve, oba premera cevi in gostoto tekočine.

$$P_1 + \frac{\rho \cdot v_1^2}{2} + \gamma \cdot z_1 = P_2 + \frac{\rho \cdot v_2^2}{2} + \gamma \cdot z_2$$

Uporaba Bernoullijeve enačbe



Primer: Tlak v cevi ob zožitvi

Voda teče po cevi s pretokom 0.4 m^3/min pri tlaku 70 kPa. Cev ima premer 7.5 cm. Izrčunajte tlak v cevi, če se premer cevi zoži na 5 cm. Gostota vode je 1000 kg/m^3

Rešitev:

Pretok vode Φ_v: 0.4 m^3/min = 0.0067 m^3/s

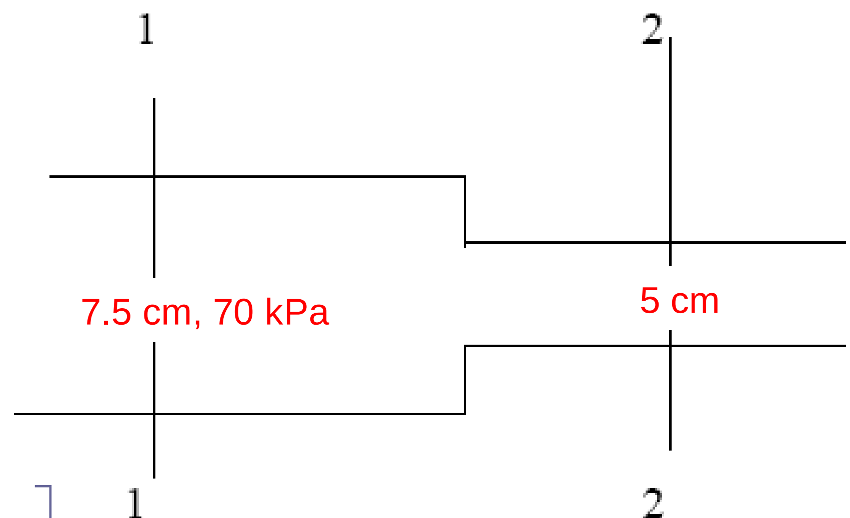
Površina cevi A_1: $\pi * D_1^2/4 = 4.42\ 10^{-3}\ m^2$

Površina cevi A_2: $\pi * D_2^2/4 = 1.96\ 10^{-3}\ m^2$

Hitrost na mestu 1: $v_1 = \Phi / A_1 = 1.51$ m/s

Hitrost na mestu 1: $v_2 = \Phi / A_2 = 3.4$ m/s

Tlačna razlika:



$$P_1 - P_2 = \frac{\rho \cdot v_1^2}{2} \cdot \left[\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right] = \frac{1000 \cdot 1.51^2}{2} \cdot \left[\left(\frac{4.42}{1.96} \right)^2 - 1 \right] = 4657.6 \text{ Pa}$$

$P_2 = (P_1 - P_2) - P_1 = 65.3$ kPa

$$P_1+\frac{\rho\cdot v_1^2}{2}+\gamma\cdot z_1=P_2+\frac{\rho\cdot v_2^2}{2}+\gamma\cdot z_2$$

Uporaba Bernoullijeve enačbe

Primer: Pretok olivnega olja

Olivno olje z gostoto 920 kg/m^{3}teče po cevi premera 2 cm. Izračunajte hitrost toka, če je v cevovodu vstavljena zožitev tako da je cev zožena na 1.2 cm. Tlačno razliko med cevjo pred in po zoženim delom 8 cm smo izmerili z višino vodnega stolpca in znaša 8 cm.

Rešitev:

Razmerje presekov cevi: $A_1/A_2 = (D_1/D_2)^2 = (2/1.2)^2$

Tlačna razlika: ρ*g*h =0.08*1000*9.81 =785 Pa

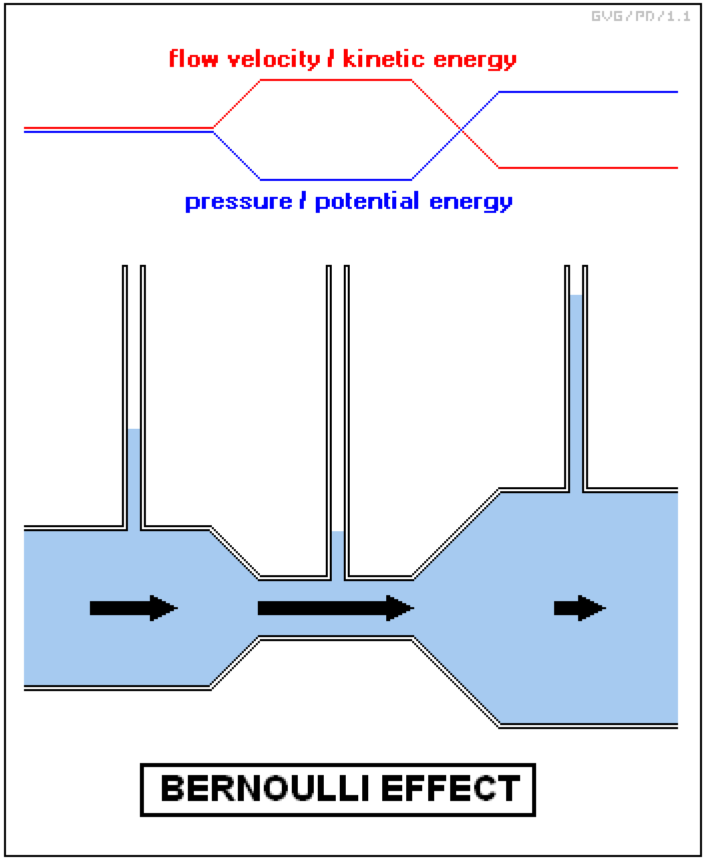
Uporabimo Bernoul.ijevo enačbo:

$$P_1-P_2=\frac{\rho\cdot v_1^2}{2}\cdot\left[\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2-1\right]$$

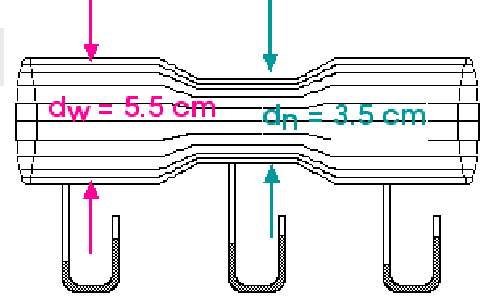
$$P_1-P_2=785=\frac{920\cdot v_1^2}{2}\cdot\left[\left(\frac{2}{1.2}\right)^4-1\right]$$

Izračunamo hitrost: v_2 =785/3091 m^2/s^2

v = 0.5 m/s



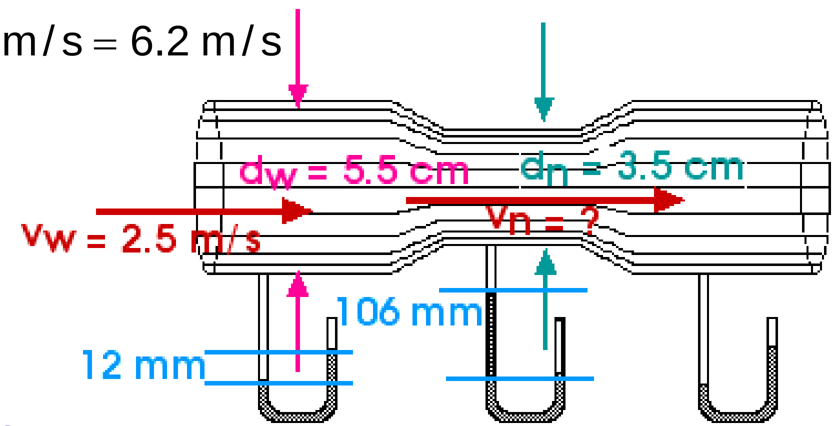
Uporaba Bernoullijeve enačbe



Primer: Venturijeva cev za merjenje hitrosti tekočin
Tekočina teče po cevi s konstantnim pretokom s hitrostjo 2,5 m/s. Izračunaj hitrost tekočine, če se premer cevi zoži iz 5.5cm na 3.5 cm. Kakšen tkak kaže manometr v zožitvi, če manometer v širokem delu cevi kaže 15 mmHg?

Pri obravnabanu kontinuitetne enačbe smo izračinali hitrost v zoženi cevi:

$$v_n = \frac{\pi \cdot D_w^2 \cdot 4}{4 \cdot \pi \cdot D_n^2} \cdot v_w = \frac{D_w^2}{D_n^2} \cdot v_w \qquad v_n = \frac{5.5^2 cm^2}{3.5^2 cm^2} \cdot 2.5\ m/s = 6.2\ m/s$$



$$P_n - P_w = \frac{\rho \cdot v_w^2}{2} - \frac{\rho \cdot v_n^2}{2} = \frac{\rho}{2} \cdot [v_w^2 - v_n^2]$$

$P_n = P_W + (^1/_2)$ *1000*[2.5^2 -6.2^2]

P_n = 15 mmHg + $(^1/_2)$ [1000 kg/m^3]*[- 32.19 m^2/s^2]

P_n = 15 mmHg - $(^1/_2)$ (32190 (kg m/s^2) / m^2

P_n = 15 mmHg - 16095 Pa → 16095 kPa = 16095 Pa [$^{1\ mmHg}$ / $_{133\ Pa}$] = 121 mmHg

P_n = 15 mmHg - 121 mmHg → **P_n = - 106 mmHg**

Merjenje pretoka z venturijevo cevjo

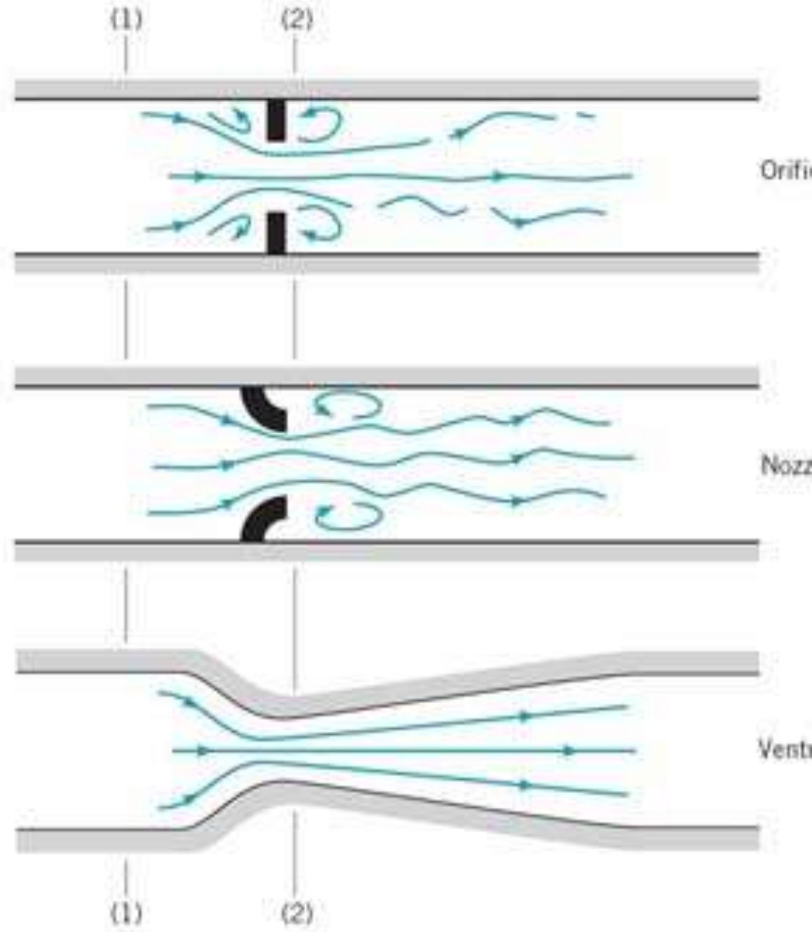
- Na osnovi Bernoullijevega principa in kontinuitetne enačbe imamo različne merilce pretoka.

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2$$

$$Q = A_1 V_1 = A_2 V_2$$

Teoretično izračunamo pretok:

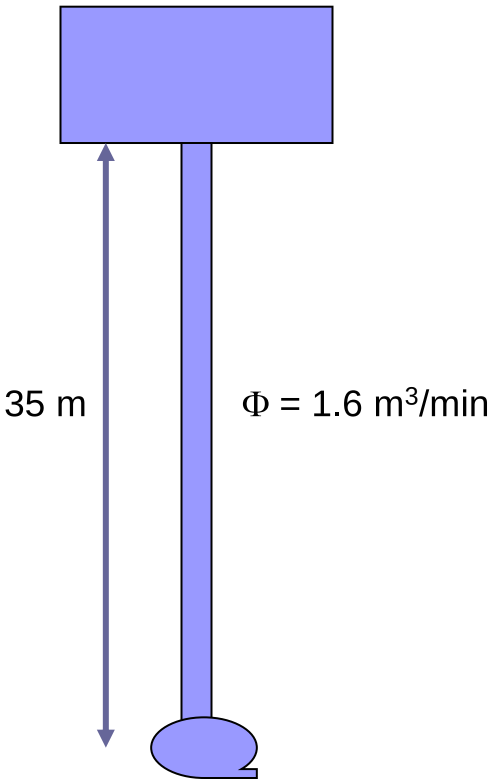
$$Q = A_2 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho\left[1-(A_2/A_1)^2\right]}}$$



Typical devices for measuring flowrate in pipe

Primer: Moč črpalke

Vodo črpamo v rezervoar na višini 35 m po cevi premera 7.5 cm. Zagotoviti je treba pretok 1.6 m^3/min. Izračunaj moč črpalke, če predpostaviš, da deluje s 100% močjo in da ni izgub zaradi trenja v ceveh.



Rešitev:

Volumski pretok: Φ_v =1.6 m^3/min = 2.7 x 10^{-2} m^3/s

Presek cevi: $A = \pi*(0.075)^2/4 = 4.42 \times 10^{-3}\ m^2$

Hitrost v cevi: $v = 2.7 \times 10^{-2} / 4.42 \times 10^{-3} = 6$ m/s

Potreben vnos mehanske energije: $E_M = m*z*g + m*v^2/2$

E_M / enoto mase = $z*g + v^2/2$

E_M / enoto mase = 35m*9.81 m/s^2 + ($^1/_2$) 6^2 m^2/s^2

E_M / enoto mase = 343.4 + 1.8 = 361.4 m^2/s^2

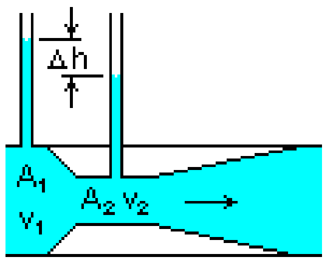
Enota: J = kg m^2/s^2

E_M = 361.4 J/kg

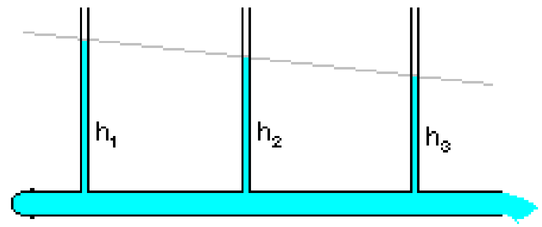
Zahtevana moč črpalke je: P = E_M /enoto mase x Φ_m

$\Phi_m = \Phi_v \times \rho$ = 2.7 x 10^{-2} m^3/s x 1000 kg/m^3

P= 361.4 J/kg x 2.7 x 10^{-2} m^3/s x 1000 kg/m^3 = 9758 J/s (J/s=W)



Venturi Meter



v = h = const.

Loss of Head due to Friction

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho}\nabla p \quad \text{Euler's equation}$$

$$\mathbf{v} = -\nabla\phi \quad \text{so } \nabla\times\mathbf{v} = 0 \quad \text{irrotational}$$

$$\mathbf{F} = -\nabla\Omega \quad \text{conservative}$$

$$\rho = \text{const. or } f(p) \quad \text{incompressible}$$

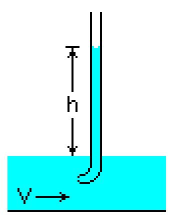
$$\frac{\partial}{\partial t}(-\nabla\phi) + \nabla\phi\cdot\nabla\nabla\phi = -\nabla\Omega - \frac{1}{\rho}\nabla p$$

$$\nabla\left[-\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \Omega + \frac{p}{\rho}\right] = 0$$

$$-\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \Omega + \frac{p}{\rho} = C$$

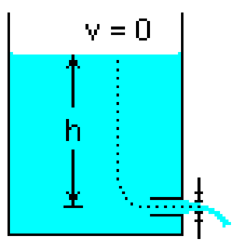
$$\frac{v^2}{2} + \Omega + \frac{p}{\rho} = C \quad \text{Bernoulli's equation}$$

Bernoulli's Equation



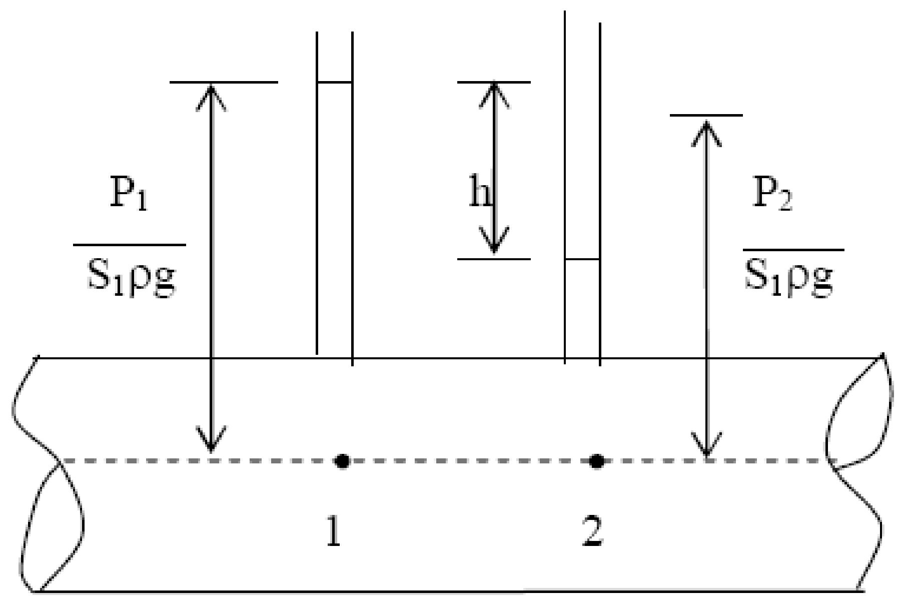
$V = \sqrt{2gh}$

Pitot Tube



$v = \sqrt{2gh}$

Torricelli's Theorem



$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho}\nabla p \quad \text{Euler's equation}$$

$$\mathbf{v} = -\nabla\phi \quad \text{so } \nabla\times\mathbf{v} = 0 \quad \text{irrotational}$$

$$\mathbf{F} = -\nabla\Omega \quad \text{conservative}$$

$$\rho = \text{const. or } f(p) \quad \text{incompressible}$$

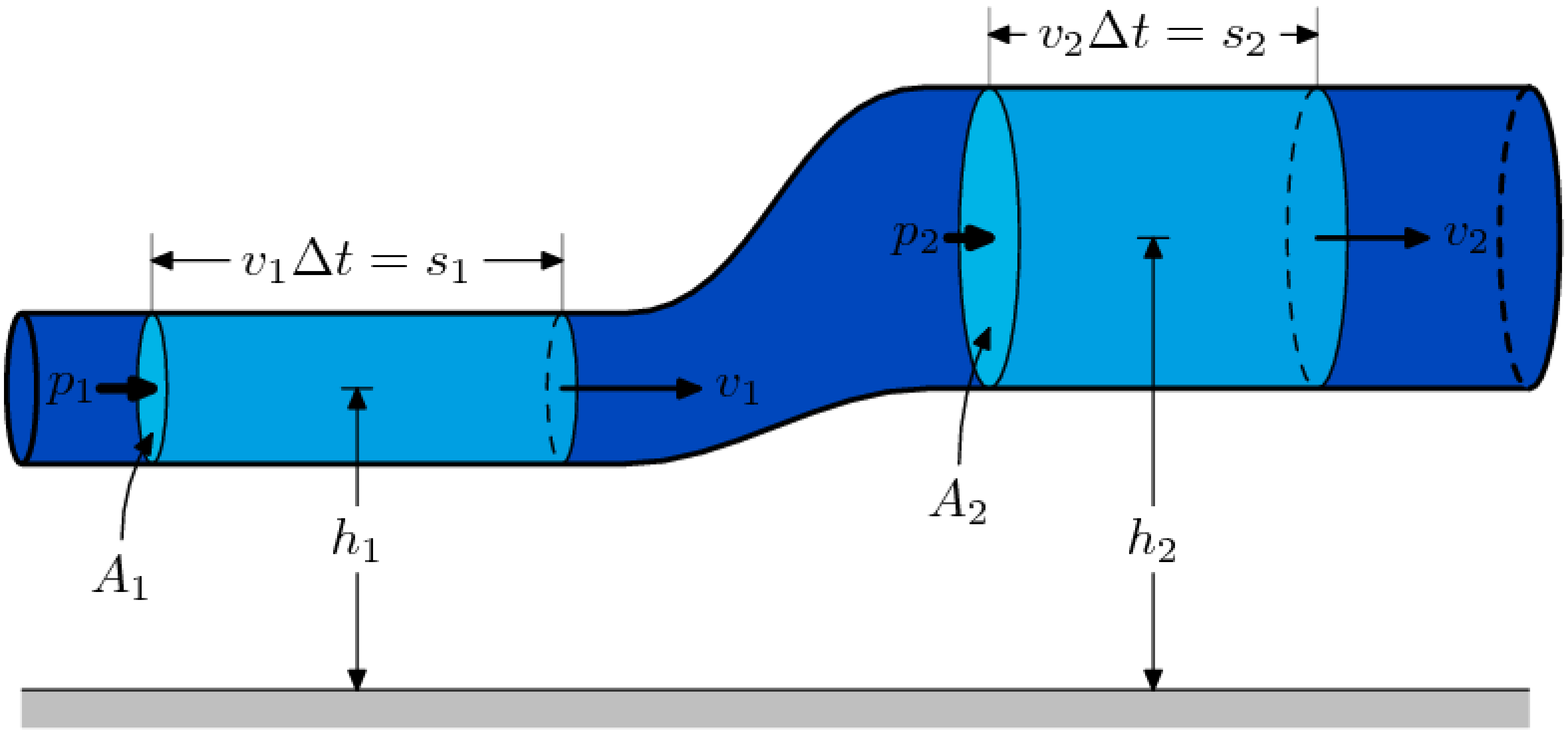
$$\frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla\phi\right) + \nabla\phi\cdot\nabla\nabla\phi = -\nabla\Omega - \frac{1}{\rho}\nabla p$$

$$\nabla\left[-\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \Omega + \frac{p}{\rho}\right] = 0$$

$$-\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \Omega + \frac{p}{\rho} = C$$

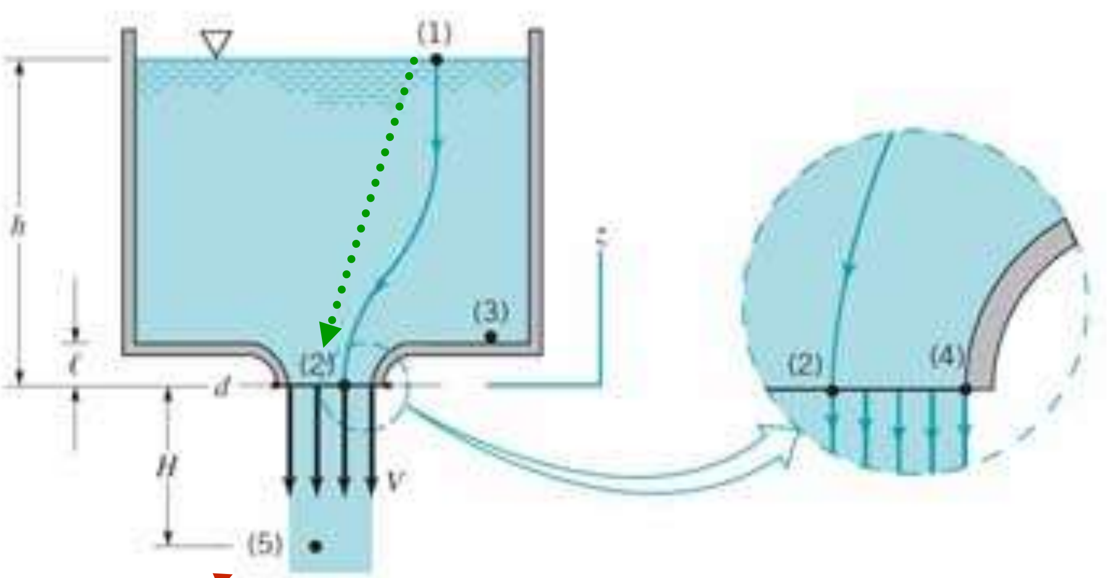
$$\frac{v^2}{2} + \Omega + \frac{p}{\rho} = C \quad \text{Bernoulli's equation}$$

Bernoulli's Equation


$v_2 \Delta t = s_2$
$v_1 \Delta t = s_1$
p_2
v_2
p_1
v_1
A_2
A_1
h_1
h_2

$$\gamma h = \frac{\rho V^2}{2}$$

$$V = \sqrt{\frac{2\gamma h}{\rho}} = \sqrt{2gh}$$



V točki (5) $v = \sqrt{2 \cdot g \cdot (h + H)}$