



Dinamika fluidov

Laminarni in turbulentni tok
Viskoznost tekočin
Faktor trenja h_f

Energijska bilanca:

Celokupna energijska bilanca procesa: $W_1 + U_1 + K_1 = W_2 + U_2 + K_2 - F + M + T$

Bernoulijeva enačba

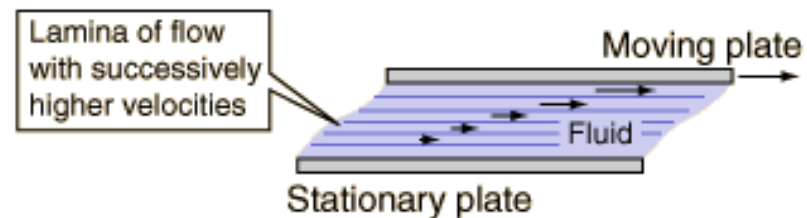
Enačba velja če privzamemo da:

$$P_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 + \rho \cdot g \cdot h_1 = P_2 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_2^2 + \rho \cdot g \cdot h_2$$

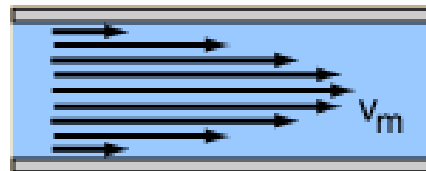
- Je tekočina nestisljiva in **nevizkozna**
- **Ni energetskih izgub zaradi trenja med tekočino in steno cevi.**
- Ni prenosa toplotne energije na meji med tekočino in steno cevi (toplotne izgube, gretje ali hlajenje).
- V sistemu ni cevi ni mehanskih črpalk.
- **Tok tekočine je laminaren in stacionaren**

Laminarni tok:

Plastovito gibanje tekočine

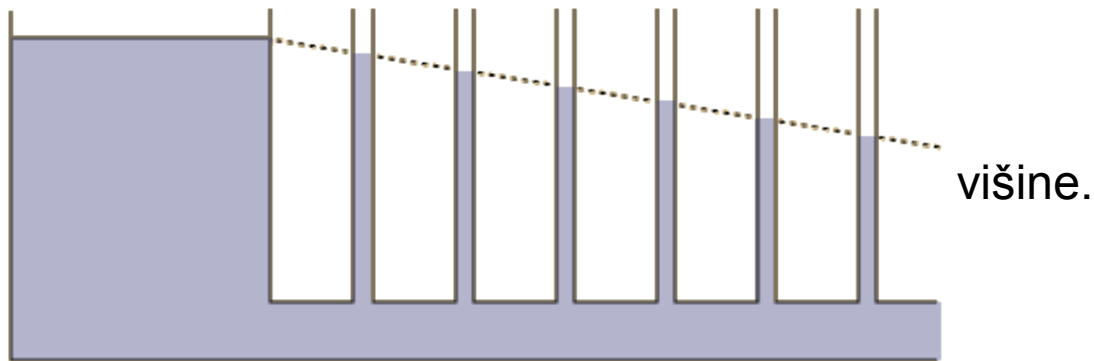


Hitrostna porazdelitev drsenja plasti tekočine v cevi:

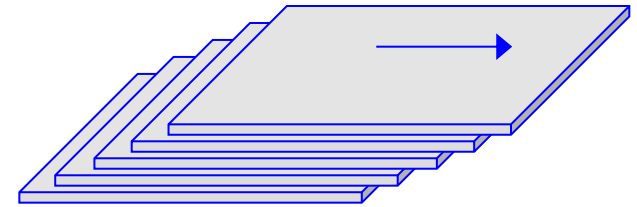


Bernoulli Pressure Lowering

The linear drop in fluid pressure is according to [Poiseuille's law](#),
but the constriction produces an extra drop in pressure according to the [Bernoulli Principle](#).



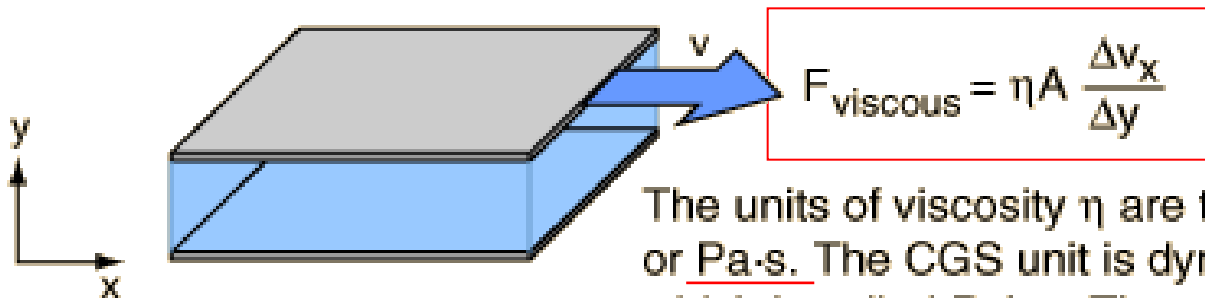
Viskoznost tekočine:



Leta 1678, je Isaac Newton podal **Newtonov zakon**, ki pravi,:

The resistance which arises from the lack of slipperiness of the parts of a liquid, other things being equal, is proportional to the velocity with which the parts of the liquid are separated from one another.

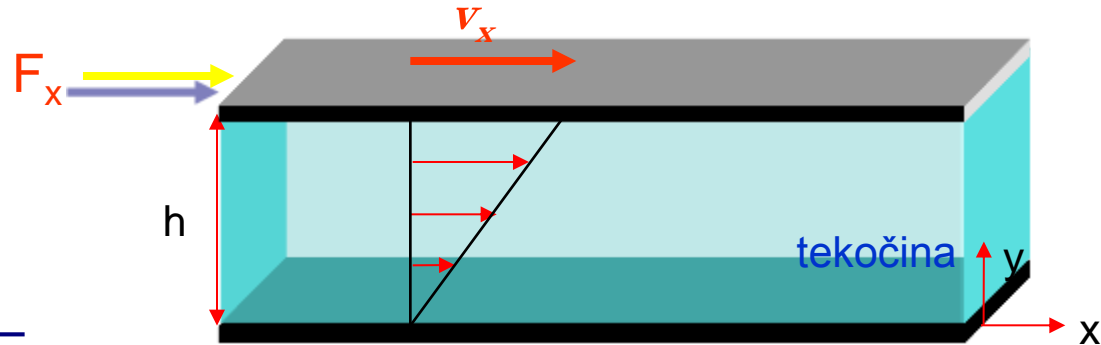
Odpor tekočine proti toku je pri enostavnem strigu linearno sorazmeren hitrosti strižnega toka oziroma hitrosti strižne deformacije. Faktor proporcionalnosti je v tem primeru »newtonska« viskoznost (η).



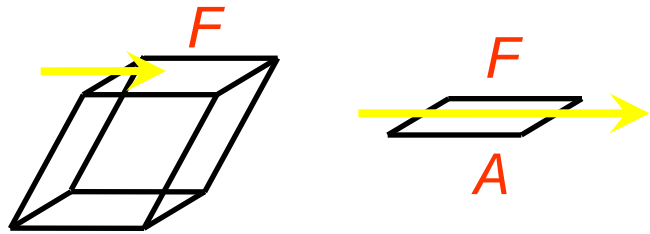
The units of viscosity η are then N s/m^2 or $\text{Pa}\cdot\text{s}$. The CGS unit is dyne sec/cm^2 which is called Poise. The viscosity of water at 20°C is 0.01 Poise. The viscosity of blood at body temperature is about 0.03 Poise. The $\text{Pa}\cdot\text{s}$ is called a Poisuille and is equal to 10 Poise.

Enostavni strig –viskoznost tekočine - osnovne definicije

enostavni strig:



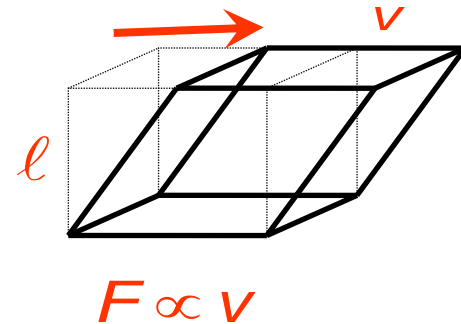
strižna napetost: $\tau_{yx} = \frac{F_{\text{viskoz.}}}{A}$



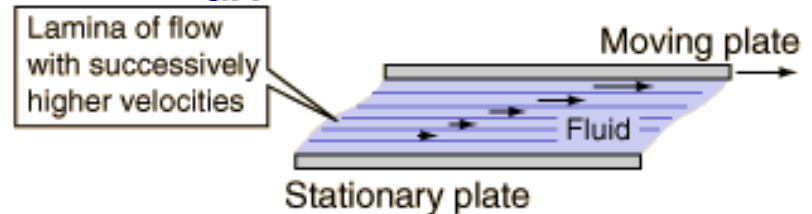
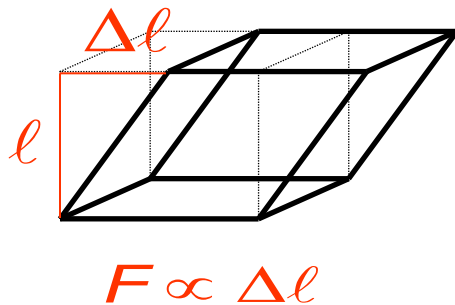
strižna hitrost:

$$\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt} = \frac{v}{l}$$

$$\dot{\gamma} = \frac{dv_y}{dx}$$



strižna deformacija: $\gamma = \frac{\Delta l}{l}$

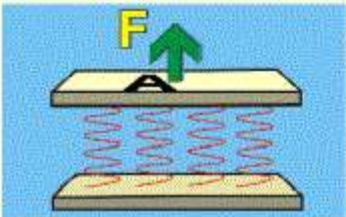


$$\tau = \eta \cdot \frac{d\gamma}{dt} = \eta \cdot \dot{\gamma}$$

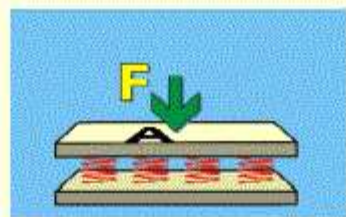
Enostavni strig –viskoznost tekočine - osnovne definicije

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Stress is defined as Force normalized to Area: F/A (N/m^2 or Pa)

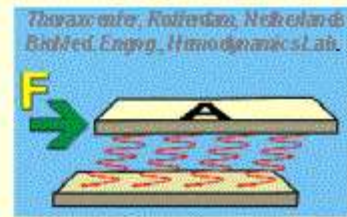


Tensile stress is a pulling stress acting perpendicularly to area A

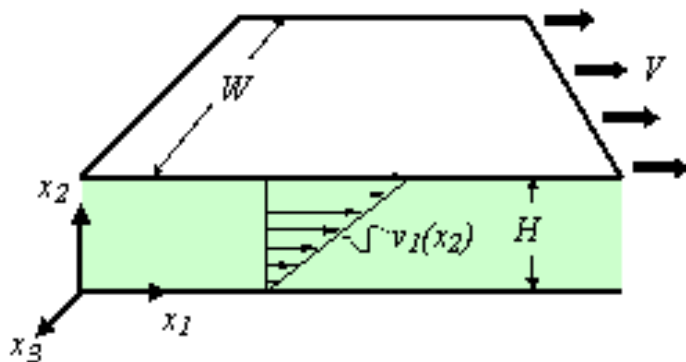


Compressive stress is a pushing stress acting perpendicularly to A

Thyagarathra, Kotturam, Nellore and
RohMed.Engng., Hydromechanics Lab.



Shear stress is a shearing stress acting tangentially to area A

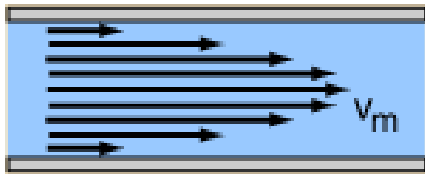


$$\tau_{yx} = \tau_{xy} = \eta \cdot \frac{dy}{dt} = \eta \cdot \dot{\gamma}$$

Ni energetskih izgub zaradi viskoznega trenja med tokom

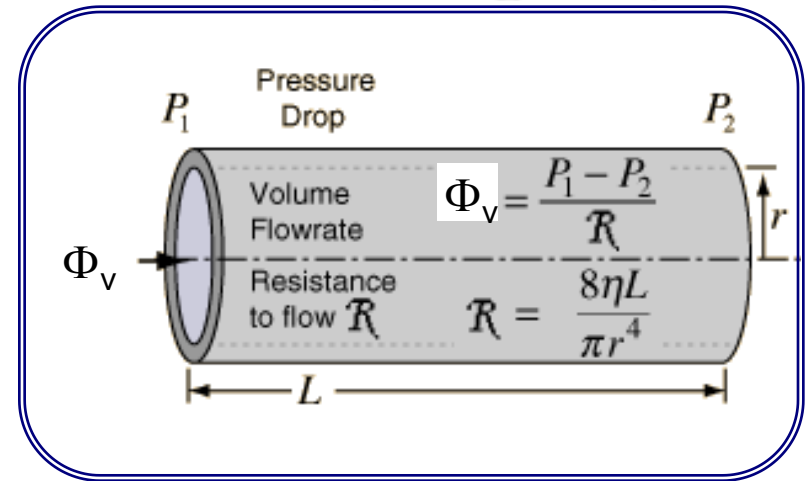
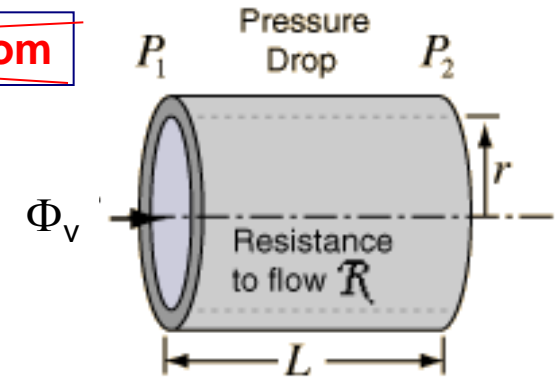
Padec tlaka v cevi pri toku zaradi viskoznega trenja

$$\Phi_v = Av_{effective} = A \frac{v_m}{2} = \frac{A (P_1 - P_2) r^2}{8\eta L}$$



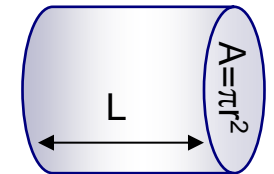
Volume Flowrate = $\Phi_v = \frac{P_1 - P_2}{\mathcal{R}} = \frac{\pi(\text{Pressure difference})(\text{radius})^4}{8(\text{viscosity})(\text{length})}$

Resistance to Flow $\mathcal{R} = \frac{8\eta L}{A r^2} = \frac{8\eta L}{\pi r^4}$



Poiseuille

$$\Phi_v = A \cdot v_{ef} = \pi \cdot R^2 \cdot \frac{\Delta P \cdot R^2}{8 \cdot \eta \cdot L} = \frac{\pi R^4 \Delta P}{8 \eta L}$$



Poiseuille jeva zveza se zelo dobro ujema z eksperimentalnimi podatki za tekočine z newtonskim bnašanjem (Newtonske tekočine), ko tekočina teče plastovito – laminarno, torej ni turbulence.

Energijska bilanca:

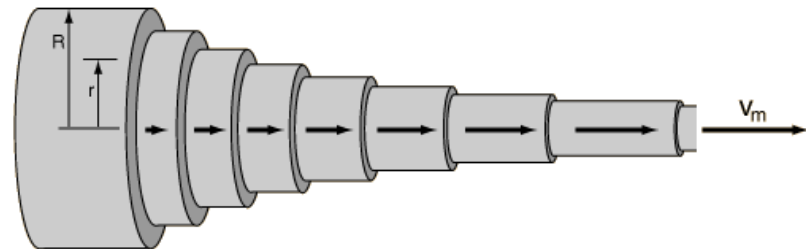
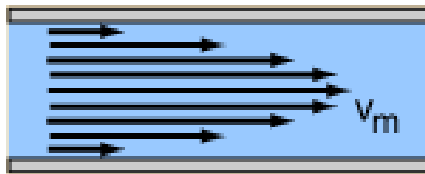
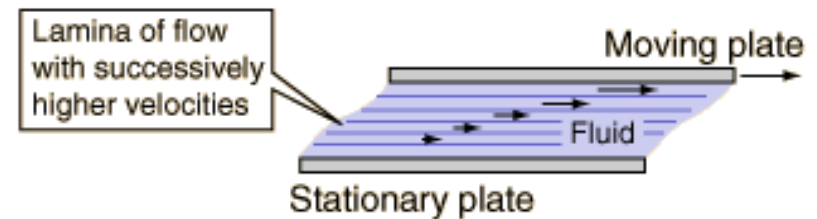
Celokupna energijska bilanca procesa: $W_1 + U_1 + K_1 = W_2 + U_2 + K_2 - F + M + T$

Bernoulijeva enačba: $P_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 + \rho \cdot g \cdot h_1 = P_2 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_2^2 + \rho \cdot g \cdot h_2$

Hagen-Poiseuille: $\Phi_v = A \cdot v_{ef} = \pi \cdot R^2 \cdot \frac{\Delta P \cdot R^2}{8 \cdot \eta \cdot L} = \frac{\pi R^4 \Delta P}{8 \eta L}$

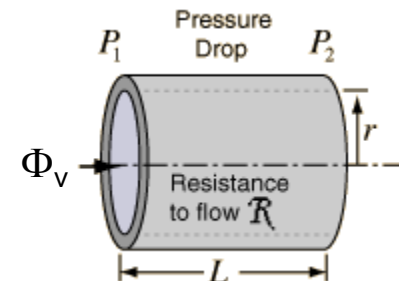
Newtonov zakon: $\tau = \eta \cdot \dot{\gamma}$

Strižna napetost: $\tau = \frac{F_{viskoz.}}{A}$



Pomen Poiseuille zveze:

$$\Phi_v = A \cdot v_{ef} = \pi \cdot R^2 \cdot \frac{\Delta P \cdot R^2}{8 \cdot \eta \cdot L} = \frac{\pi R^4 \Delta P}{8 \eta L}$$



Pretok tekočine je 100 cm³/s. S spremembo parametrov enačbe dobimo:

Če **2 x povečamo...**, bo pretok:

dolžino L → 50 cm³/s

viskoznost η → 50 cm³/s

tlak P → 200 cm³/s

polmer cevi R → 1600 cm³/s

Pretok krvi skozi žile: že majhna zožitev žile zaradi npr. poapnenja ima presenetljiv vpliv na pretočnost žil:

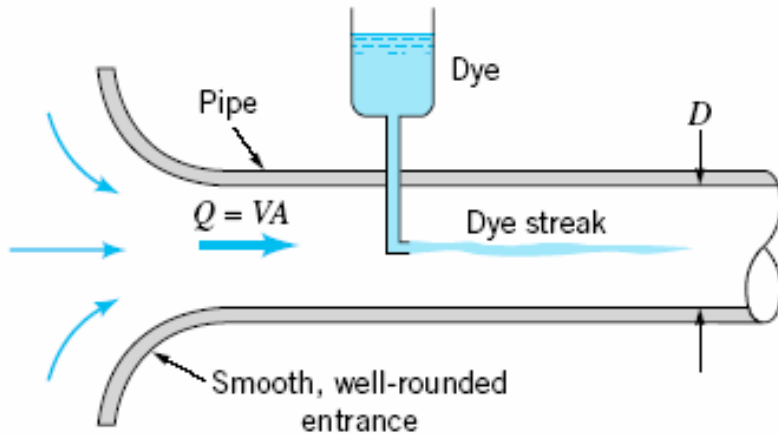
	large effect!		If pressure is 120 mmHg, Flowrate =	Pressure to restore normal Flowrate:
Occlusion*	healthy artery		100 cm ³ /min	120 mmHg
0%				
R ₁ = 0.8R	20%		41 cm ³ /min	293 mmHg
R ₁ = 0.5R	50%		6.3 cm ³ /min	1920 mmHg
R ₁ = 0.2R	80%		0.16 cm ³ /min	75,000 mmHg

*20% occlusion here is taken to mean a reduction of the inside radius by 20%, to 80% of its original radius.

A 19% decrease in radius will halve the volume flowrate!

Laminarni in turbulentni tok

Za razumevanje razlike proučimo Reynoldsov eksperiment iz leta 1883

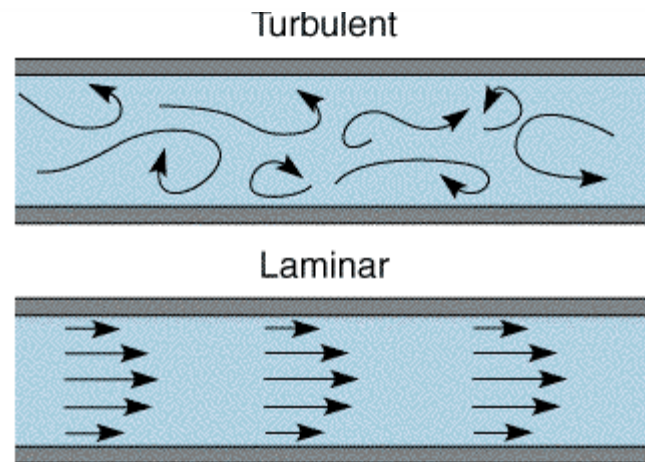


Pretok narašča – hitrost narašča

Laminarni tok: tekočina “teče” - struja v plasteh

Prehodno področje : plastoviti tok postane valovit

Turbulentni tok: tekočina ne teče v plasteh ampak se zaradi vrtincev giblje tudi v radialni smeri.





Osborne Reynolds, 1883

V **laminarnem toku** je hitrostna komponenta strujanja le v smeri vzdolž plasti – vzdolž cevi.

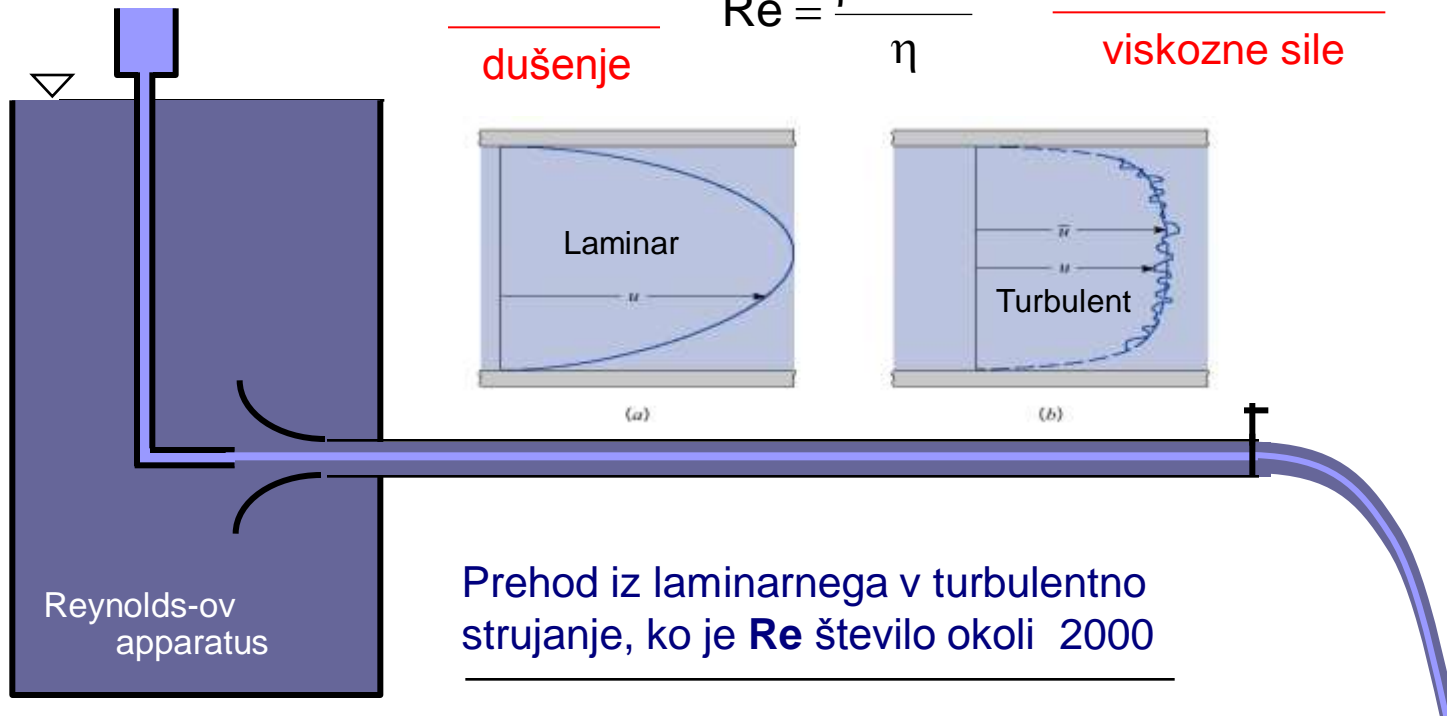
V **turbulentnem toku** je prevladujoča hitrostna komponenta strujana vzdolž cevi, vendar se pojavi tudi radialna komponenta hitrosti.

Reynolds je ugotovil, da lahko nestabilnost toka napovemo z razmerjem med hitrostjo toka in viskozni silami, nestabilnosti toka so odvisne od razmerja med **kinetično energijo in viskoznim trenjem** tekočine:

Reynoldsovo število – brez-dimenzijsko število:

Definirano na osnovi dimenzijske analize

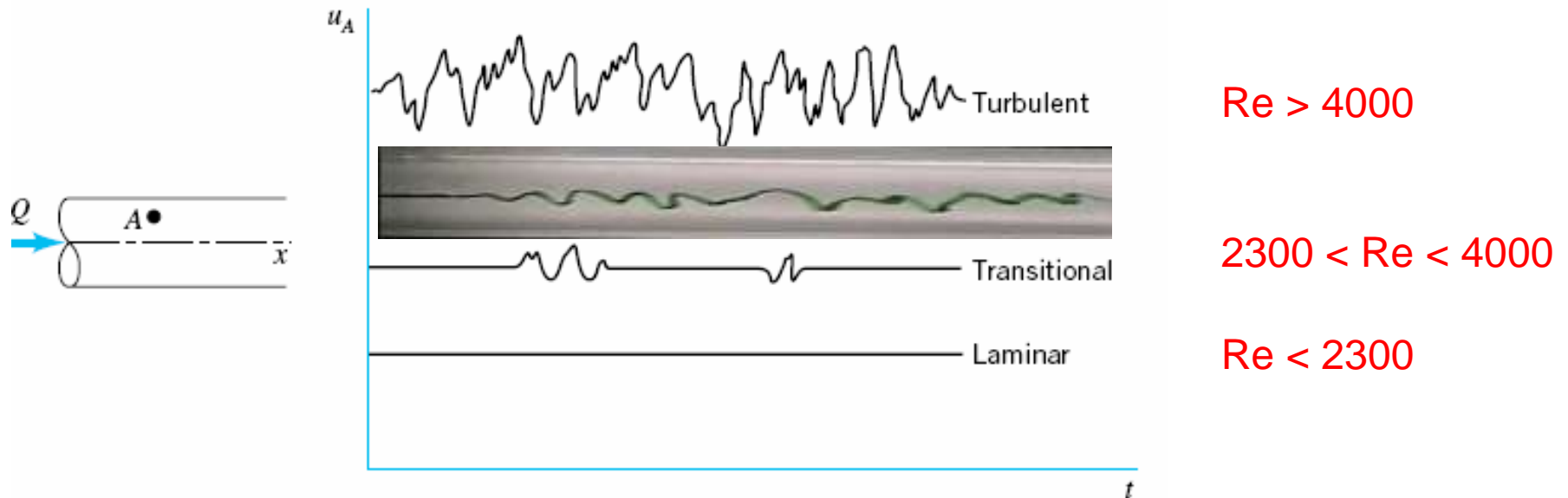
$$\frac{\text{pospešek}}{\text{dušenje}} \quad \text{Re} = \frac{\rho \cdot v \cdot D}{\eta} \quad \frac{\text{vztrajnostne sile}}{\text{viskozne sile}} \quad \frac{\rho \cdot v^2}{\eta \cdot v \cdot D}$$



Prehod iz laminarnega v turbulentno strujanje, ko je **Re** število okoli 2000

Laminarni in turbulentni tokovi

Nastanek turbulence: Kinetične sile oz. vztrajnost sili tekočino v smer toka. Ko le te postanejo prevelike. Viskozne sile delujejo v smeri zaustavitve toka. Plastoviti tok tekočine daje zaradi viskoznega trenja prevelik upor. Zato nastane vrtničast tok, posledica vrtničenja je turbulenca.



V ceveh je za prehod iz laminarnega strujanja v prehodno območje kritično Reynoldsovo število okoli $Re_{crit} = 2300$. Če eksperiment izvajamo zelo pazljivo v popolnoma gladkih ceveh lahko tekočina teče pri pogojih laminarnega toka, tudi do 60000

Primer:

Pretok mleka v cevi: Mleko teče po cevi premera 2.5 cm pri 21°C. Ali je strujanje laminarno ali turbulentno, če je pretok mleka 0.12 cm³/min.

Iz priročnika dobimo podatke:

$$\rho = 1029 \text{ kg/m}^3$$

$$\eta = 2.1 \text{ cP}$$

$$\eta = 2.1 \text{ cP} = 2.1 \cdot 10^{-3} \text{ Ns/m}^2 \text{ (Pa.s)}$$

$$\Phi_V = 0.12 \text{ cm}^3/\text{min} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

$$A = \pi D^2/4 = 4.9 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$\text{Kontinuitetna enačba: } v = \Phi_V/A = 4.1 \text{ m/s}$$

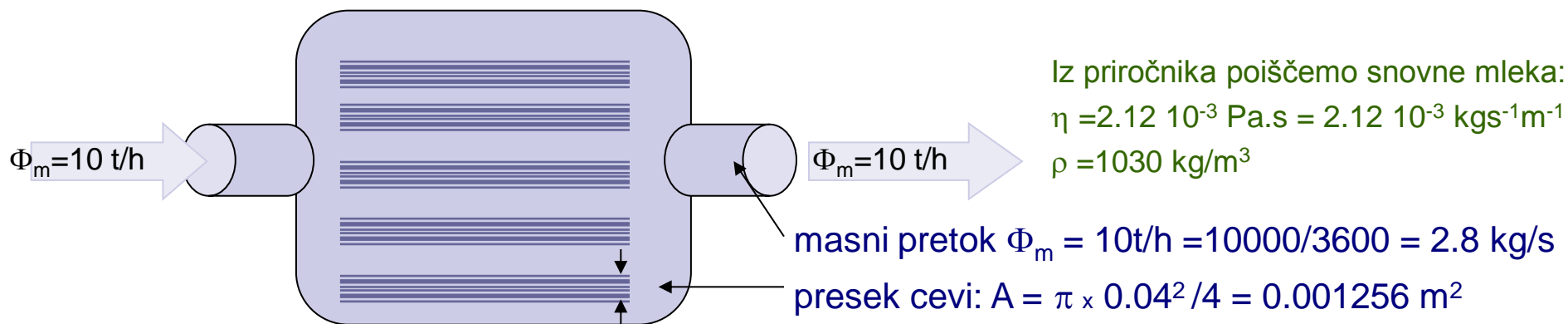
$$Re = \frac{\rho \cdot v \cdot D}{\eta} = \frac{0.025 \text{ m} \cdot 4.1 \text{ m/s} \cdot 1029 \text{ kg/m}^3}{2.1 \cdot 10^{-3} \text{ Ns/m}^2} = 50230$$

Re število je brez dimenzijsko!

Pri računanju moramo paziti, da uporabimo enotni sistem enot.

Primer: Dimenzioniranje toplotnega menjalnika za hlajenje mleka

Mleko se v toplotnem menjalniku ohladi iz 20°C na 3°. Pretok mleka skozi menjalnik je 10 t/h. Toplotni menjalnik se sestoji iz cevi premera 4 cm. Izračunaj koliko cevi je treba vgraditi v menjalnik, da bo pretok zagotavljal Re število 4000.



volumski pretok $\Phi_v = \Phi_m / \rho = (2.8 \text{ kg}/\text{s}) / (1030 \text{ kg}/\text{m}^3) = 0.0027 \text{ m}^3/\text{s}$

povprečna hitrost toka skozi eno cev: $v = \frac{Re \cdot \eta}{\rho \cdot D} = \frac{\text{kg}}{\text{s} \cdot \text{m}} \cdot \frac{\text{m}^3}{\text{kg}} \cdot \frac{\text{m}}{\text{m}^2} = \frac{\text{m}}{\text{s}}$

$Re = \rho \times v \times D / \eta = (1030 \times v \times 0.04) / 2.12 \times 10^{-3} = 4000 \Rightarrow v = 0.21 \text{ m}/\text{s}$

volumski pretok skozi eno cev: $\Phi_v = A \times v = 0.001256 \text{ m}^2 \times 0.21 \text{ m}/\text{s} = 0.26 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$

Število cevi = zahtevani pretok mleka/pretok mleka skozi eno cev: $2.7 \times 10^{-3} / 0.26 \times 10^{-3} = 11$

V tehnoloških procesih se tekočine med rezervoarji in reaktorji transportirajo (pretakajo) po ceveh

Tlačne izgube v zaprtih cevovodih:

Na osnovi **Bernoullijeve** zveze ugotovimo, da je tlačna razlika pri stacionarnih tokovnih pogojih v zaprtih ceveh odvisna od **spremembe višine** in **spremembe hitrosti toka** zaradi razlike v preseku cevi.

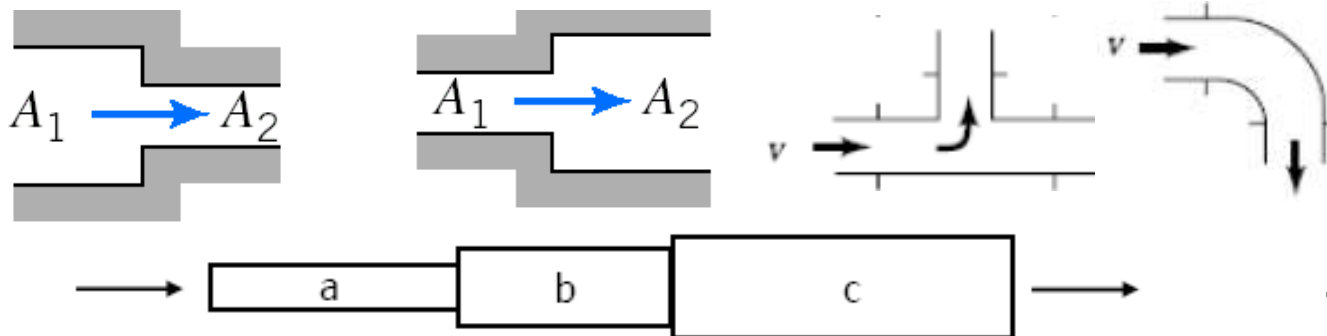
Poiseulle – tekočine so viskozne, notranje tekočinsko trenje in trenje tekočine ob površino cevi povzročata dodaten odpor proti toku in padeč tlaka v ceveh: **viskozni vplivi**

$$\text{Celokupna energijska bilanca procesa: } W_1 + U_1 + K_1 = W_2 + U_2 + K_2 + \textcircled{F} + M + T$$

Viskozni vplivi:

Važnejši vplivi: padeč tlaka v smeri toka pri enakem preseku cevi

Manjši vplivi: padeč tlaka pri toku skozi ventile, razcepe, kolena in drugih sprememb preseka cevi.



Viskozni vplivi:

Važnejši vplivi: padec tlaka v smeri toka pri enakem preseku cevi

Energijska bilanca stacionarnega toka ne-stisljive tekočine po ravni gladki cevi

Energetske izgube zaradi viskoznega trenja

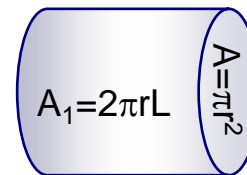
$$P_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 + \rho \cdot g \cdot h_1 - P_2 - \frac{1}{2} \rho \cdot v_2^2 - \rho \cdot g \cdot h_2 = \Delta P = \Delta P_f$$

Trenje tekočine ob steni je sorazmerno z dinamičnim tlakom. $\Delta P_f \propto \frac{F_{tr}}{A_1} = f' \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2$

F_{tr} ... sila trenja tekočine ob steno cevi

A_1 površina cevi

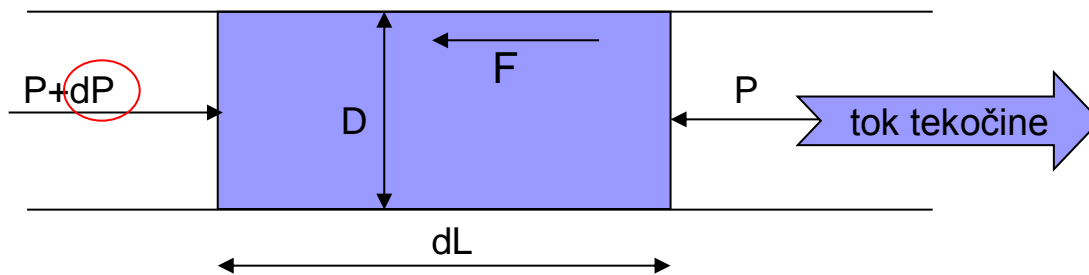
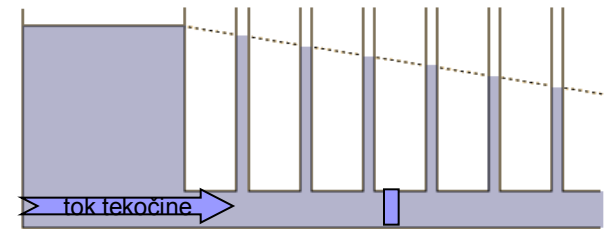
f' ... c_f , faktor trenja – friction factor



Teoretično in eksperimentalno je dokazano, da so energetske izgube zaradi trenja tekočine ob steno cevi odvisne od Re števila

Viskozni vplivi:**Važnejši vplivi:** padec tlaka v smeri roka pri enakem preseku cevi

Energijska bilanca:

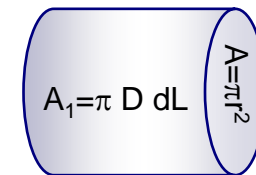
Ravnotežje elementa tekočine na dolžini cevi dL 

Sila zaradi padca tlaka:

$$\textcircled{dP} \times A = F = dP \times \pi D^2/4$$

Sila zaradi trenja ob površino cevi:

$$F_{\text{tr.}} = \left(f' \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 \right) \cdot \pi \cdot D \cdot dL$$



$$\pi \cdot \frac{D^2}{4} dP = \left(f' \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 \right) \cdot \pi \cdot D \cdot dL$$

$$dP = 4 \cdot \left(f' \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 \right) \cdot \frac{dL}{D}$$

$$\Delta P = 4 \cdot f' \cdot \left(\frac{\rho \cdot v^2}{2} \right) \cdot \frac{L}{D}$$

Viskozni vplivi:**Važnejši vplivi:** padec tlaka v smeri roka pri enakem preseku cevi

$$\Delta P = 4 \cdot f' \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} \cdot \frac{L}{D}$$

Padec tlaka zaradi trenja na dolžini cevi L f' .. faktor trenja (Fanning), označeno tudi C_f

V literaturi so različni podatki za vrednosti faktorja trenja pogosto najdemo naslednjo zvezo:

$$4f' = f$$

$$\Delta P = f \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} \cdot \frac{L}{D}$$

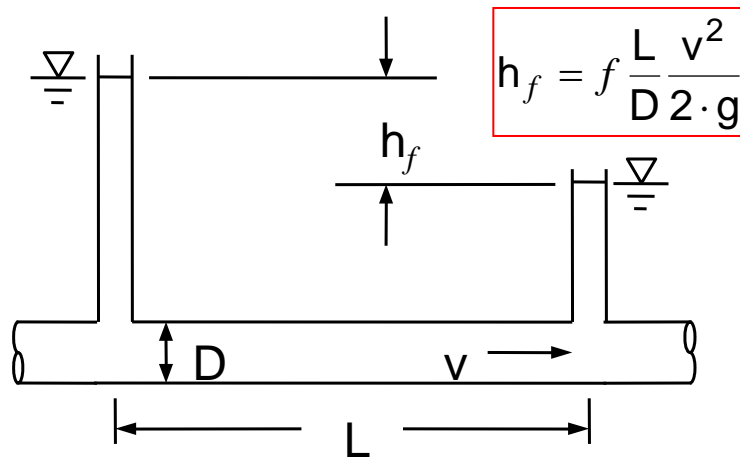
Padec tlaka zaradi trenja na dolžini cevi L f .. faktor trenja (Moody - Darcy)**Energetske izgube zaradi trenja tekočine ob steno cevi so odvisne od Re števila**Za majhna Re števila – laminarni tok $0 < Re < 2300$, (in prehodno območje) velja linearna zveza med Re številom in faktorjem trenja f

Laminarni tok $f = \frac{64}{Re} = \frac{64 \cdot \eta}{\rho \cdot v \cdot D}$

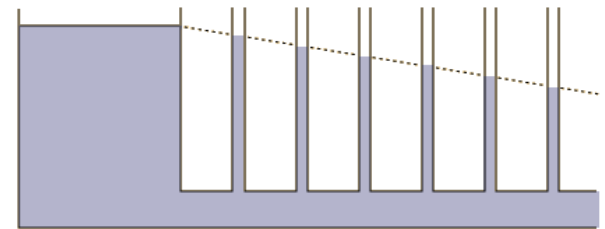
Mejna plast tekočine ob steni cevi je stacionarna, zato hrapavost cevi ne vpliva na faktor trenja

Padec tlaka zaradi trenja lahko izrazimo tudi z dinamično višino tekočine h_f :

$$h_f = \Delta P / \rho \cdot g, \text{ pri čemer je } \Delta P = f \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} \cdot \frac{L}{D}$$



Darcy-Weisbach-ova enačba



V laminarnem toku hrapavost cevi (ε) ne vpliva na padec tlaka, oz. na vrednost faktorja trenja f , ker je mejna plast tekočine ob steni cevi je stacionarna. $f = f(\text{Re})$.

Turbulentni tok: ni analitičnih rešitev za izračun padca tlaka zaradi zapletene hidrodinamske situacije. Rešitev so empirične enačbe, določene na osnovi eksperimentalnih podatkov.

$$f = f(\text{Re}, D, L, \varepsilon, v, \eta)$$

Za popolnoma gladke cevi velja **Blasius-ova enačba (1911):**

$$f = 0.316 \cdot \text{Re}^{-0.25}$$

$$3000 < \text{Re} < 100\,000$$

Vpliv hrapavosti cevi na faktor trenja v turbulentnem toku.

Hrapavosti cevi povzročajo vrtninasti tok, ki poveča trenje tekočine med steno cevi in tekočino. Pri **turbulentnem** pretakanju tekočin po zaprti cevi na nastanek turbulence vpliva tudi **hrapavost** cevi. $f = (Re, \varepsilon)$

Hrapavost ε je definirana v mm neravnih delov cevi in je navadno zelo majhna. Za različne materiale je hrapavost različna.

Za določitev faktorja trenja f je treba definirati relativno hrapavost cevi:

$$\text{relativna hrapavost} = \frac{\text{hrapavost } \varepsilon}{\text{premer cevi } D}$$

Enačbe za izračun faktorja trenja v turbulentnem toku so najpogosteje določene **empirično na osnovi eksperimentov**. Upoštevajo tudi hrapavost cevi.

$$f = f(Re, D, L, \varepsilon, v, \eta)$$

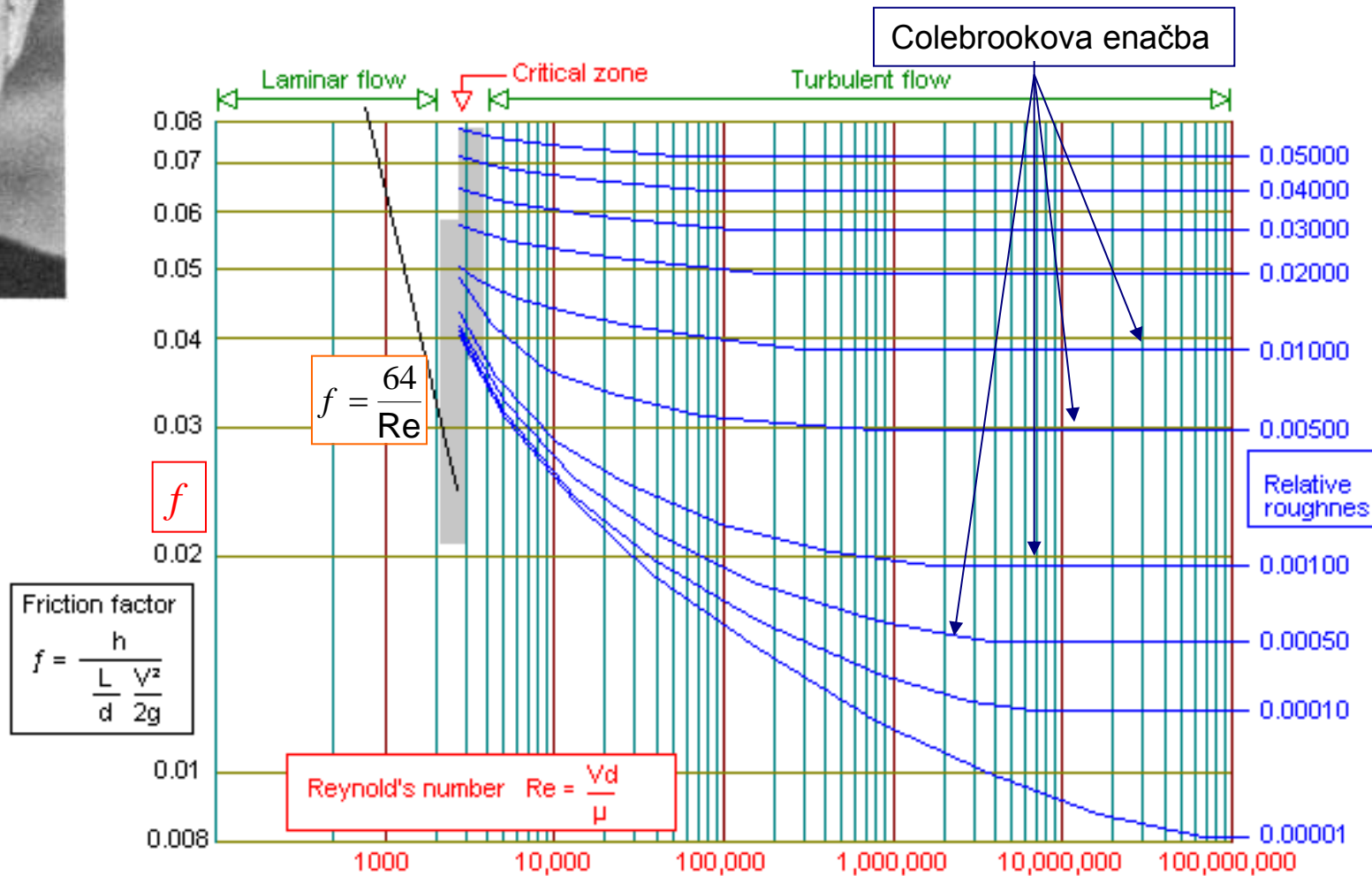
Povprečne hrapavosti ε komercialnih cevi

Steel tube	0.0460 mm
Wrought iron tube	0.0450 mm
Copper tubing	0.0015 mm
Glass tubing	0.0001 mm
Polythene	0.0010 mm
Flexible P.V.C.	0.2000 mm
Rigid P.V.C.	0.0050 mm
Cast iron tube	0.2600 mm
Concrete tube	2.0000 mm (0.3-3)
Galvanised iron	0.1500 mm
Wood stave	0.18-0.9 mm



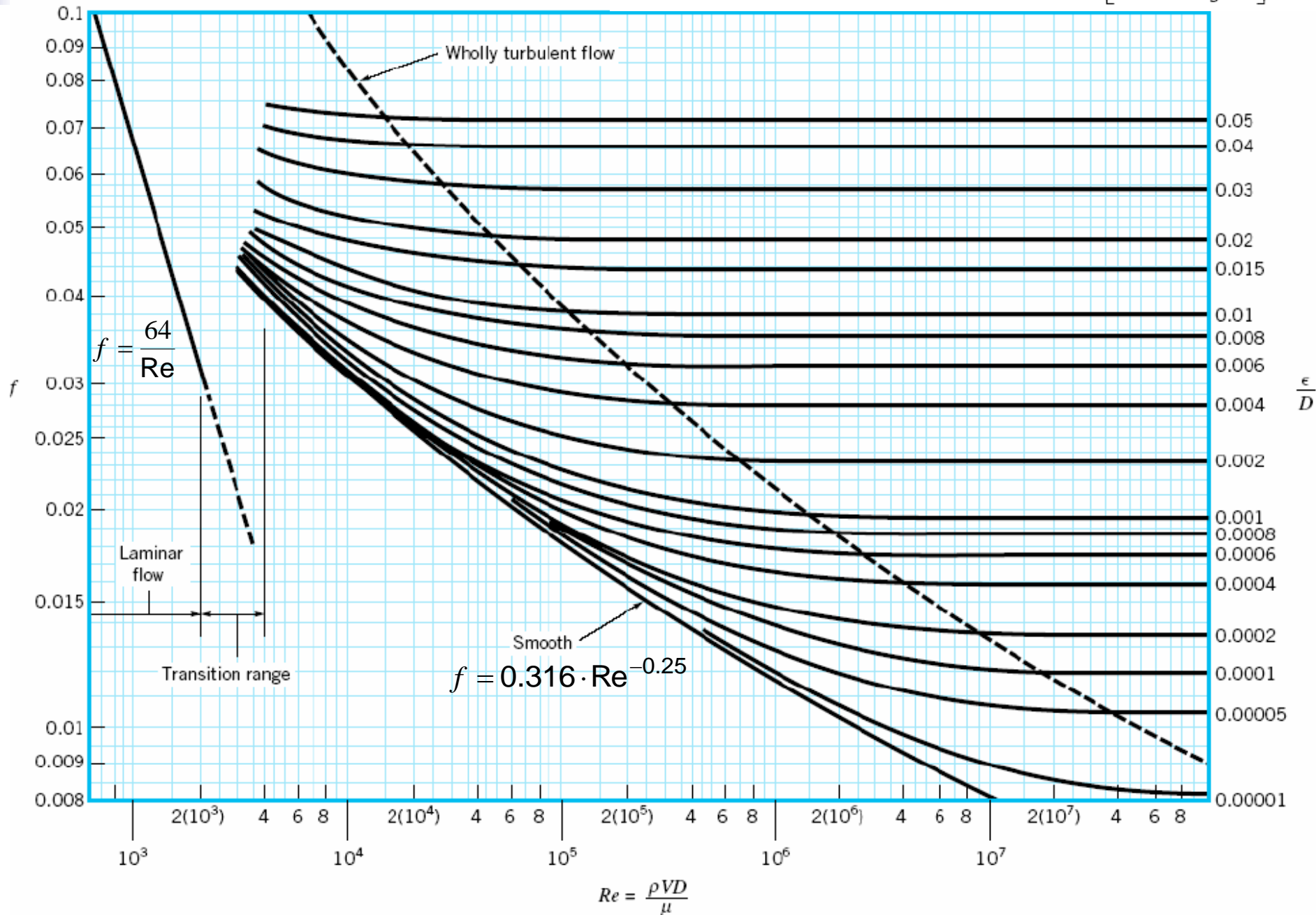
Vpliv hrapavosti cevi na faktor trenja v turbulentnem toku.

V turbulentnem področju so bile določene različne krivulje (na osnovi dimenzijske analize in z uporabo brezdimenzijskih števil), ki prikazujejo odvisnost faktorja trenja f od Re števila in relativne hrapavosti (ϵ/D).



Moody, diagram

• Colebrook Equation (1939): $\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left[\frac{\epsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{Re_D \sqrt{f}} \right]$



Enačbe za izračun faktorja trenja v turbulentnem toku, ki so določene empirično na osnovi eksperimentov:

- Blasius Equation (1911): $f = 0.3164 Re_D^{-0.25}$ It does not consider ε .

- Colebrook Equation (1939): $\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left[\frac{\varepsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{Re_D \sqrt{f}} \right]$ This is an implicit eqn.

- Haaland Equation: $\frac{1}{\sqrt{f}} = -1.8 \log \left[\left(\frac{\varepsilon/D}{3.7} \right)^{1.1} + \frac{6.9}{Re_D} \right]$

- Miller Equation: $f = 0.25 \log \left[\frac{\varepsilon/D}{3.7} + \frac{5.74}{Re_D^{0.2}} \right]^{-2}$

- Faktor trenja se najpogosteje določa iz diagramov, (Moody-jev diagram).
- V turbulentnem področju krivulje predstavljajo Colebrookovo enačbo.
- Za odčitek vrednosti faktorja trenja je treba izračunati Re število in poznati relativno hrapavost
- V laminarnem področju je $f = 64/Re$
- Za popolnoma gladke cevi v turbulentnem področju velja Blasiusova zveza: $f = 0.316 \cdot Re^{-0.25}$
- Moodyjev diagram sta v logaritemskih koordinatah, treba je znati odčitati vrednosti

Primer:

Izračun faktorja trenja:

Po jekleni cevi premera 0.4 m in je dolga 10 m se pretaka voda s pretokom 349.1 L/s. Temperatura vode je 10°C. Določi faktor trenja in padec tlaka zaradi trenja tekočine ob stene cevi!

Snovne lastnosti vode določimo iz priročnika:

$$\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$$

$$\eta = 1.3 \times 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$$

Relativna hrapavost odčitamo iz tabele:

$$\varepsilon/D = 0.000046/0.4 = 0.000115$$

Povprečne hrapavosti ε komercialnih cevi

Steel tube	0.0460 mm
Wrought iron tube	0.0450 mm
Copper tubing	0.0015 mm
Glass tubing	0.0001 mm
Polythene	0.0010 mm
Flexible P.V.C.	0.2000 mm
Rigid P.V.C.	0.0050 mm
Cast iron tube	0.2600 mm
Concrete tube	2.0000 mm (0.3-3)
Galvanised iron	0.1500 mm
Wood stave	0.18-0.9 mm

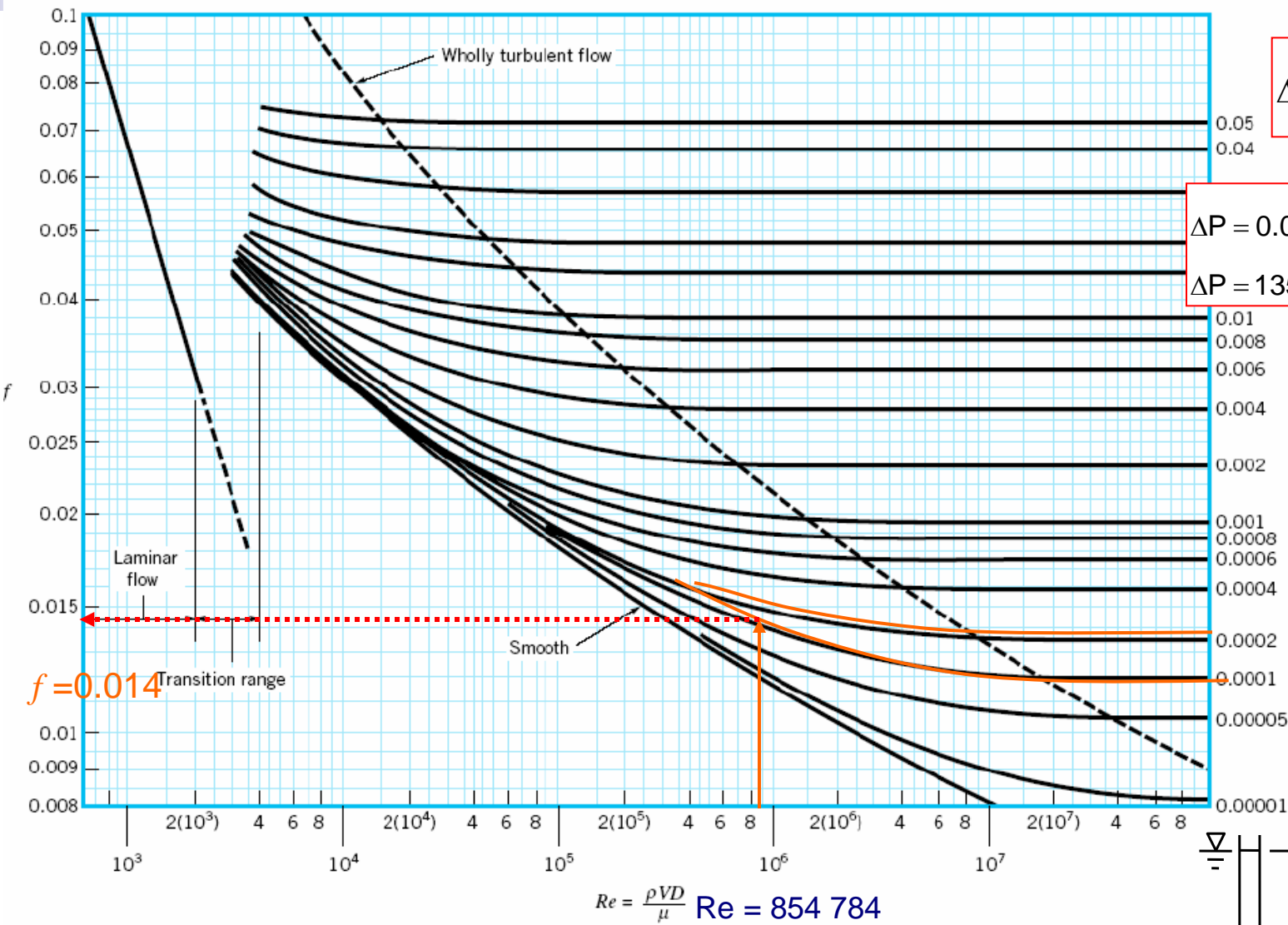
Temp. (°C)	Viscosity (N s m ⁻²)	Specific heat (kJ kg ⁻¹ °C ⁻¹)	Density (kg m ⁻³)
0	1.87 x 10 ⁻³	4.23	1000
4	1.53 x 10 ⁻³	4.23	1000
16	1.16 x 10 ⁻³	4.19	1000
27	0.87 x 10 ⁻³	4.19	998
38	0.68 x 10 ⁻³	4.19	992
66	0.43 x 10 ⁻³	4.19	977
93	0.30 x 10 ⁻³	4.19	965
100	0.28 x 10 ⁻³	4.18	958

$$A = \pi \times 0.4^2 / 4 = 0.1256 \text{ m}^2$$

Povprečna hitrost toka: $v = \Phi_v / A = 349.1 \times 10^{-3} \times 4 / \pi \times 0.4^2 = 2.778 \text{ m/s}$

$$Re = \rho \times v \times D / \eta = (1000 \times 2.778 \times 0.4) / 1.3 \times 10^{-3} = 854\,784$$

Grafična določitev faktorja trenja:



$$\Delta P = f \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} \cdot \frac{L}{D}$$

$$\Delta P = 0.014 \cdot \frac{1000 \cdot 2.778^2}{2} \cdot \frac{10}{0.4}$$

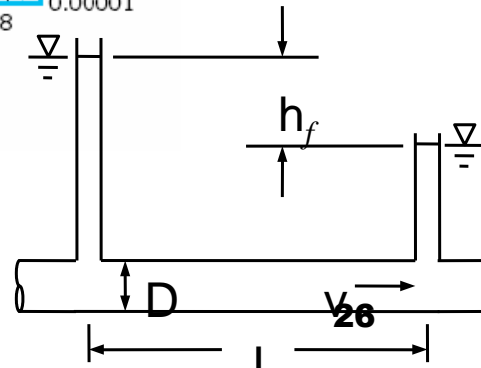
$$\Delta P = 1350 \text{ Pa}$$

$$\epsilon/D = 0.000115$$

$f = 0.014$

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu} \quad Re = 854\,784$$

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{v^2}{2 \cdot g} = 0.014 \cdot \frac{10}{0.4} \cdot \frac{2.778^2}{2 \cdot 9.81} = 0.1377 \text{ m}$$



Primer: Izračunaj padec tlaka v cevi

Po cevovodu s premerom 5 cm teče olivno olje s pretokom $0.1 \text{ m}^3/\text{min}$. Izračunaj padec tlaka zaradi tekočinskega trenja, če je dolžina cevovoda 170 m in temperatura olivnega olja 20°C .

170 m

$$A = \pi \times 0.05^2 / 4 = 0.196 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

Iz priročnika odčitamo snovne lastnosti olivnega olja pri 20°C

$$\rho = 910 \text{ kg/m}^3$$

$$\eta = 84 \cdot 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s (N}\cdot\text{s/m}^2)$$

$$\text{Povprečna hitrost toka: } v = \Phi_v / A = [0.1/60 \text{ (m}^3/\text{s)}] / 1.96 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 = 0.85 \text{ m/s}$$

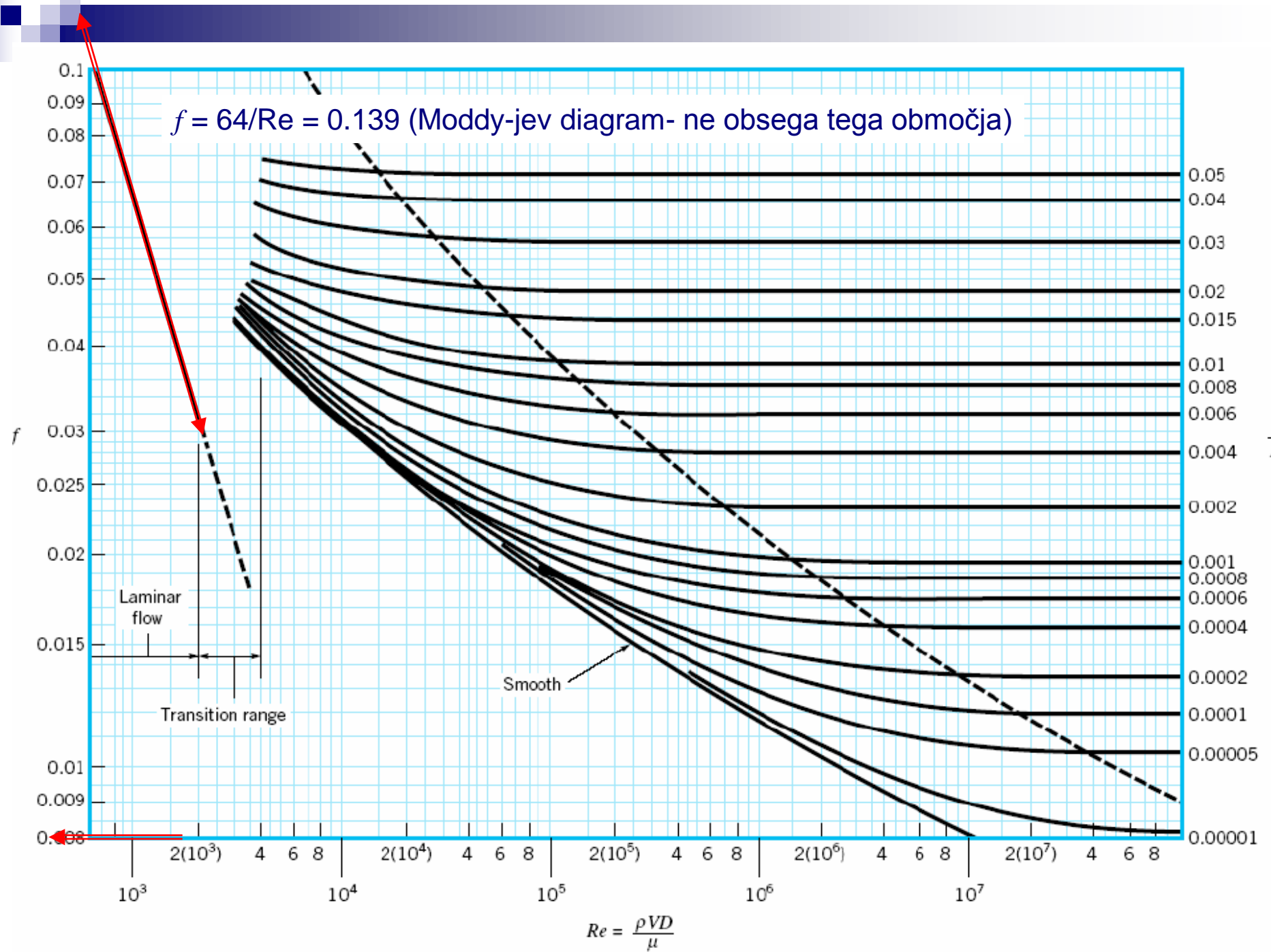
$$\text{Re} = \rho \times v \times D / \eta = (910 \times 0.85 \times 0.05) / 84 \cdot 10^{-3} = 460$$

Laminaren tok:

$$f = 64/\text{Re} = 0.139 \text{ (Moody-jev diagram- ne obsega tega območja)}$$

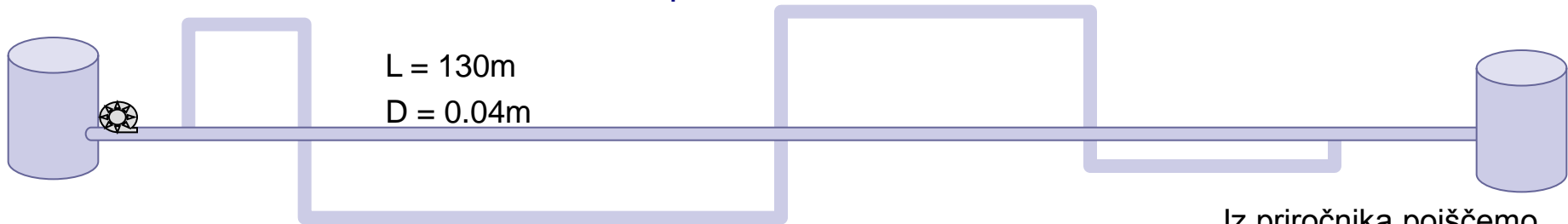
$$\Delta P = f \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} \cdot \frac{L}{D}$$

$$\Delta P = 0.139 \cdot \frac{910 \cdot 0.85^2}{2} \cdot \frac{170}{0.05} = 155361 \text{ Pa}$$



Primer: črpanje mleka

Ocenite potrebno moč črpalke za črpanje mleka pri 20°C po 130 m dolgi horizontalni jekleni cevi premera 4 cm, če je povprečna hitrost toka v cevi 2.7 m/s. Pri tem upoštevajte energetske izgube zaradi viskoznega trenja mleka ob steno cevi, energetske izgube na zaradi kolen in ventilov na cevovodu pa zanemari!



preseki cevi: $A = \pi \times 0.04^2 / 4 = 1.26 \times 10^{-3} \text{ m}^2$

Povprečna hitrost: $v = 2.7 \text{ m/s}$

volumski pretok $\Phi_v = v \times A = 1.26 \times 10^{-3} \times 2.7 = 3.4 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$

$Re = \rho \times v \times D / \eta = (1030 \times 2.7 \times 0.04) / 2.12 \times 10^{-3} = 5.2471 \times 10^4$

Turbulentni tok

Kinetična energija $\Delta P_k: \frac{\rho \cdot v^2}{2} = \frac{1030 \cdot 2.7^2}{2} = 3.754 \cdot 10^3 \text{ Pa}$

Izgube zaradi viskoznega trenja: odčitamo hrapavost

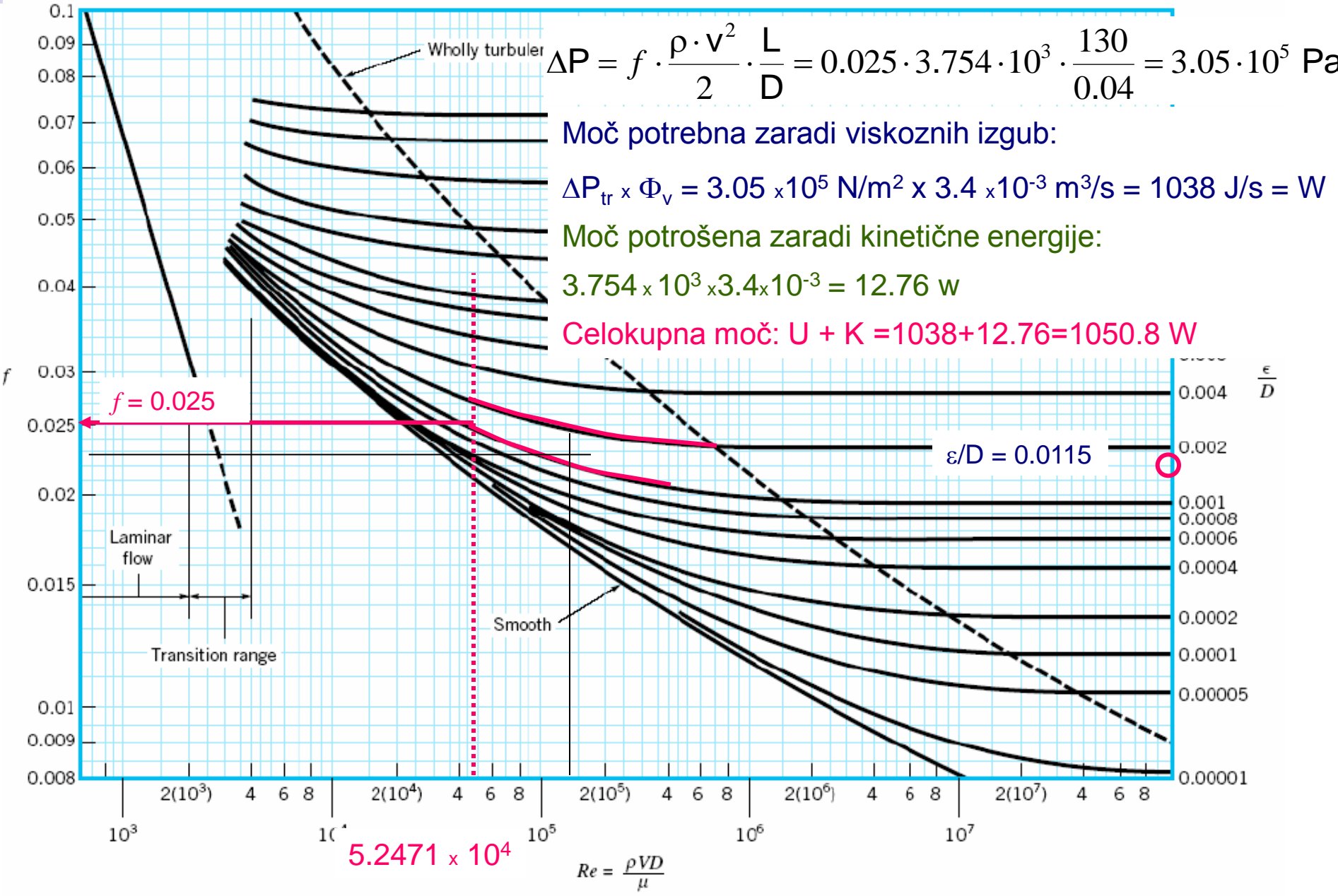
$\varepsilon = 0.000046 \text{ m} \Rightarrow \varepsilon / D = 0.000046 / 0.04 = 0.0115$

Frikcijski faktor, faktor trenja, f

določimo iz Moodyjevega diagrama

Iz priročnika poiščemo
snovne lastnosti mleka:
 $\eta = 2.12 \times 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$
 $\rho = 1030 \text{ kg/m}^3$

Steel tube	0.0460 mm
Wrought iron tube	0.0450 mm
Copper tubing	0.0015 mm
Glass tubing	0.0001 mm
Polythene	0.0010 mm
Flexible P.V.C.	0.2000 mm
Rigid P.V.C.	0.0050 mm
Cast iron tube	0.2600 mm
Concrete tube	2.0000 mm (0.3-3)
Galvanised iron	0.1500 mm 29
Wood stave	0.18-0.9 mm



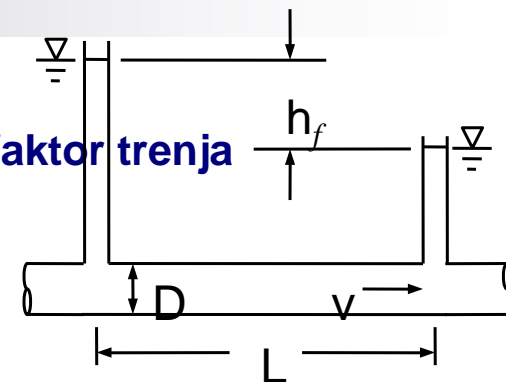
Viskozni vplivi:

Važnejši vplivi: padec tlaka v smeri roka pri enakem preseku cevi – **faktor trenja**

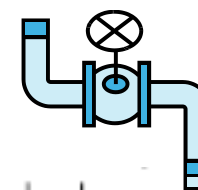
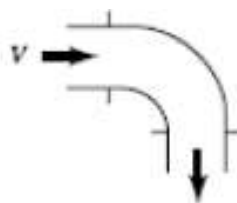
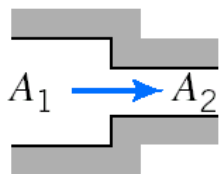
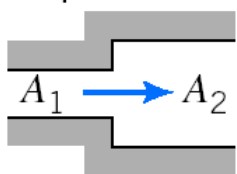
$$\Delta P = f \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} \cdot \frac{L}{D}$$

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{v^2}{2 \cdot g}$$

Darcy-Weisbach-ova enačba

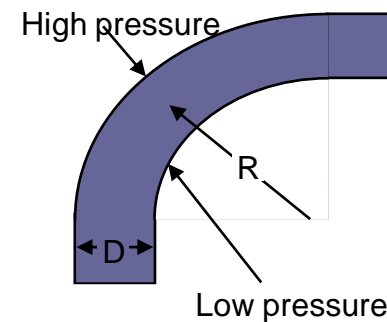


Manjši vplivi: padec tlaka pri toku skozi ventile, razcepe, kolena in drugih sprememb preseka cevi.



Če tok tekočine spremeni smer (kolena) ali je oviran zaradi vstavljenih ventilov v cevovode, se razcepi ali pa pride do zožitve cevi, pride do dodatnih energetskih izgub. Ta energija se porablja zaradi dodatnega vrtnčenja ali turbulence, oz. se sprošča v obliki toplote. Če želimo obdržati želeni pretok, moramo to energijo nadomestiti. Tudi ti, t.i. manjši viskozni vplivi na energetske izgube so sorazmerni dinamičnemu tlaku.

$$\Delta P_m \propto \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2$$



Manjši vplivi: padec tlaka pri toku skozi ventile, razcepe, kolena in drugih sprememb preseka cevi.

Energetske izgube – splošno: $\Delta P / V$: enota tlak Pa = N/m² volumen: m³ $\Rightarrow \Delta P / V = Nm = J$

Energetske izgube zaradi prej naštetih elementov lahko izrazimo z **tlačno razliko**, ali **hodrostatsko višino**.

Pri tem smo uporabili prej izpeljane zveze za faktor trenja, in dodali faktor k .

$$\Delta P = f \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} \cdot \frac{L}{D}$$

$$\Delta P_m = k \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} \quad \Rightarrow \quad h_m = \Delta P_m / \rho \cdot g \quad \Rightarrow \quad \Delta h_m = k \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g}$$

$$h_f = f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g}$$

Faktor k je odvisen od tipa ventila, razcepa kolena ... in je za navedeno opremo določen eksperimentalno.

Ker imamo v tehnološkem procesu več elementov, na primer več ventilov, kolen, razcepov, je za treba energetske izgube na posameznih elementih sešteti:

$$\Delta h_m = \sum k \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g}$$

Celotne energetske izgube zaradi viskoznega trenja lahko izrazimo:

$$\Delta h_f = \left(f \cdot \frac{L}{D} + \sum k \right) \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g}$$

Faktor k za različne elemente v procesu:

$$\Delta h_m = k \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g}$$

k

Valves, fully open:

gate

0.13

globe

6.0

angle

3.0

Elbows:

90° standard

0.74

medium sweep

0.5

long radius

0.25

square

1.5

Tee, used as elbow

1.5

Tee, straight through

0.5

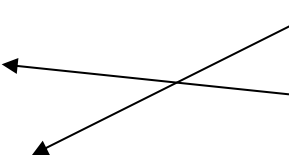
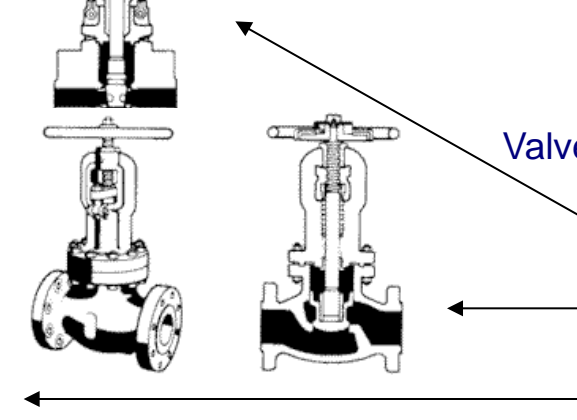
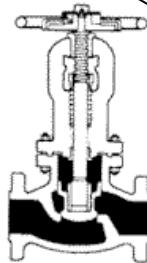
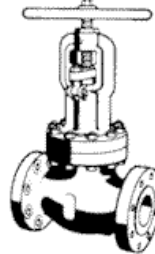
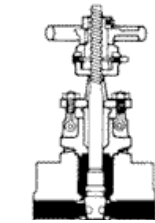
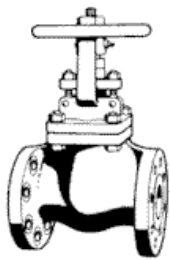
Entrance, large tank to pipe**:

sharp

0.5

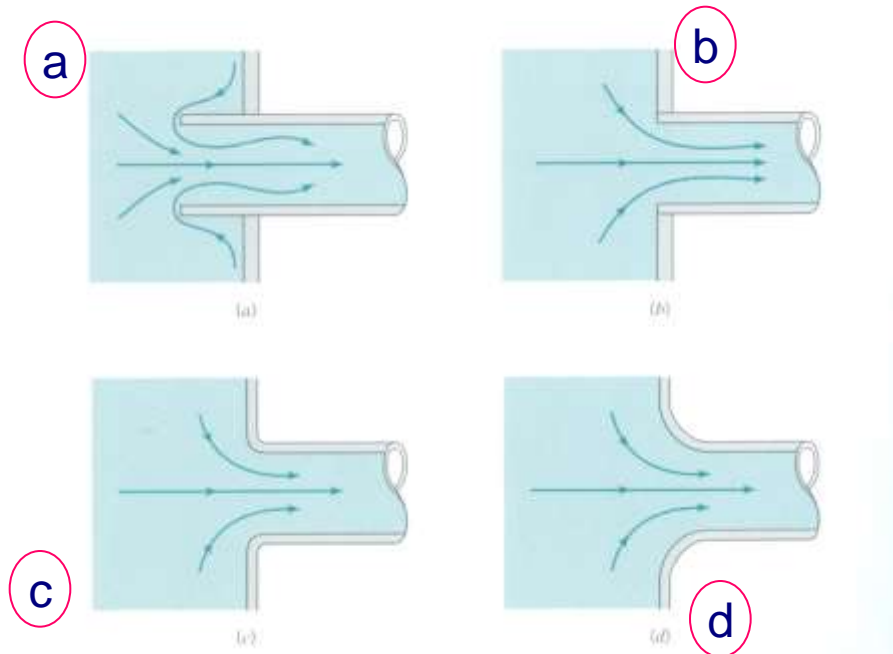
rounded

0.05



Entrance, large tank to pipe**:	
sharp	0.5
rounded	0.05

$$\Delta h_m = k \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g}$$



Entrance flow conditions and loss coefficient.

- (a) Re-entrant, $k = 0.8$,
- (b) sharp-edged, $k = 0.5$,
- (c) slightly rounded, $k = 0.2$,
- (d) well-rounded, $k = 0.04$.

Source: Munson *et al* (1998) p. 498

$$\Delta h_m = k \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g}$$

Energetske izgube nastopijo tudi zaradi zožitve ali razširitve cevi.

Pri povečanju premera cevi so energetske izgube:

$$\Delta P = \rho \cdot (v_1 - v_2)^2 / 2$$

Pri čemer je v_1 je hitrost toka v nasprotni smeri spremembe premera cevi (D_1) in v_2 hitrost toka v smeri spremembe premera cevi (D_2)

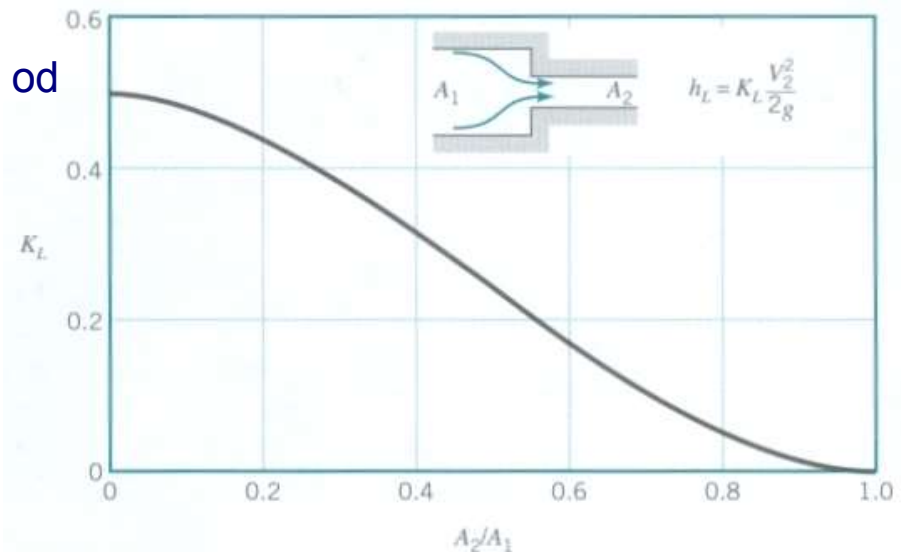
Pri trenutni zožitvi cevi pa:

$$\Delta P = k \cdot \rho v_2^2 / 2$$

Faktor trenja k je odvisen od razmerja premerov (D_2/D_1):

Koefficient k v primeru zožitve cevi v odvisnosti od razmerja premerov

D_2/D_1	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
k	0.36	0.31	0.22	0.11	0.02



Loss coefficient for a sudden contraction.
Source: Munson et al (1998) p. 500