

Primer: Venturijeva cev za merjenje hitrosti tekočin

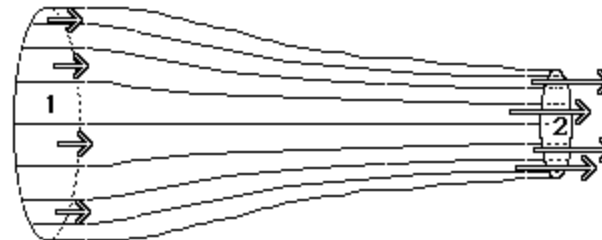
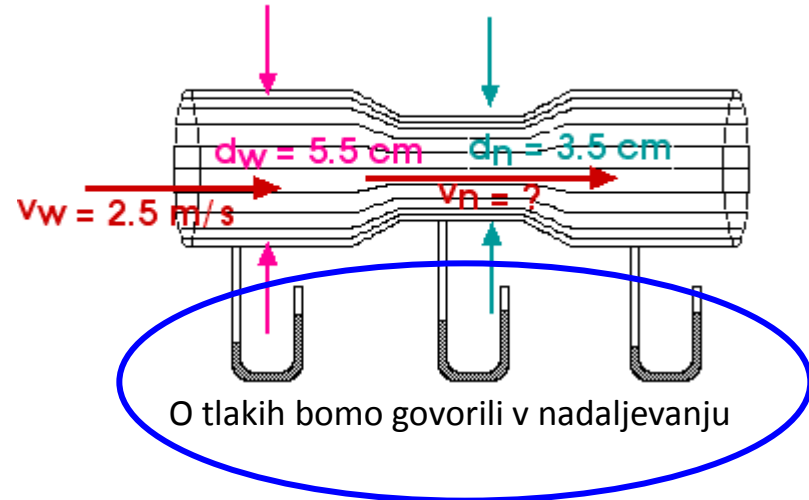
Tekočina teče po cevi s konstantnim pretokom. Izračunaj hitrost tekočine, če se premer cevi zoži iz 5.5cm na 3.5 cm.

$$A_w \cdot v_w = A_n \cdot v_n$$

$$v_n = (A_w/A_n) \cdot v_w$$

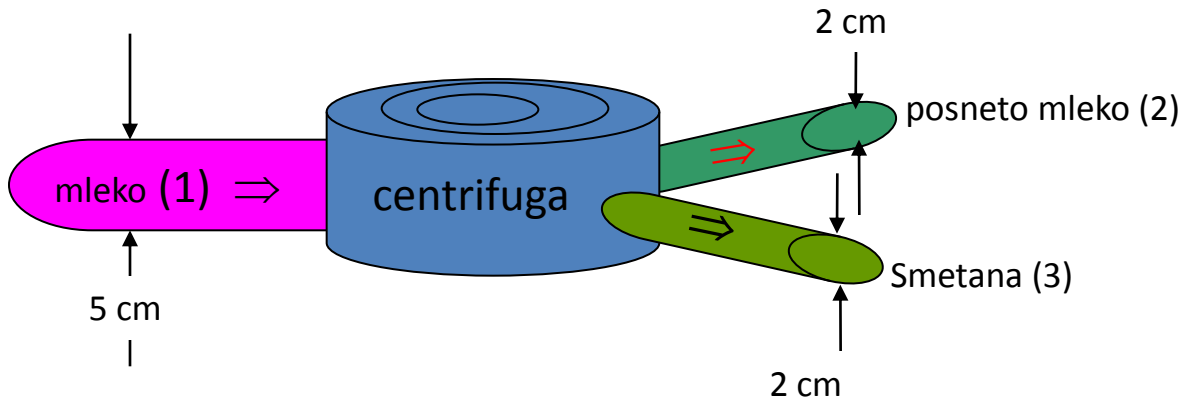
$$v_n = \frac{\pi \cdot D_w^2 \cdot 4}{4 \cdot \pi \cdot D_n^2} \cdot v_w = \frac{D_w^2}{D_n^2} \cdot v_w$$

$$v_n = \frac{5.5^2 \text{ cm}^2}{3.5^2 \text{ cm}^2} \cdot 2.5 \text{ m/s} = 6.2 \text{ m/s}$$



Primer: Centrifugiranje mleka

Mleko uvajamo v proces centrifugiranja po cevi prmera 5 cm s hitrostjo 0.22 m/s. Gostota mleka je 1.035 kg/m^3 . Proces centrifugiranja, zaradi različnih gostot, loči mleko na posneto mleko z gostoto 1.04 kg/m^3 in smetano z gostoto 1.01 kg/m^3 . Izračunaj hitrosti tokov posnetega mleka in smetane, ki izstopajo iz centrifuge po ceveh premera 2 cm.



Kontinuitetna enačba: $A_1 \cdot v_1 \cdot \rho_1 = A_2 \cdot v_2 \cdot \rho_2 + A_3 \cdot v_3 \cdot \rho_3$

Ne- stisljiva tekočina

$$\Phi_{v1} = \Phi_{v2} + \Phi_{v3}$$

$$\Phi_{v2} = \Phi_{v1} - \Phi_{v3}$$

$$\Phi_v = A \cdot v \text{ (m}^2 \cdot \text{m/s)}$$

Ker je tekočina ne-stisljiva, bo celotni volumen mleka, ki vstopa izstopil kot volumna ki ga zavzema smetana in posneto mleko. Zato enačbo poenostavimo, da lahko v_2 izrazimo z v_3 in v_1 .

$$A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2 + A_3 \cdot v_3$$

$$v_2 = (A_1 \cdot v_1 - A_3 \cdot v_3) / A_2$$

Izraz za v_2 vstavimo v masno bilanco: $A_1 \cdot v_1 \cdot \rho_1 = [A_2 \cdot (A_1 \cdot v_1 - A_3 \cdot v_3) / A_2] \cdot \rho_2 + A_3 \cdot v_3 \cdot \rho_3$

$$A_1 \cdot v_1 \cdot \rho_1 = \rho_2 A_1 \cdot v_1 - \rho_2 A_3 \cdot v_3 + A_3 \cdot v_3 \cdot \rho_3$$

$$A_1 \cdot v_1 \cdot (\rho_1 - \rho_2) = A_3 \cdot v_3 \cdot (\rho_3 - \rho_2)$$

Primer: Centrifugiranje mleka

Znane količine: gostote:

Mleko: $\rho_1 = 1.035 \text{ kg/m}^3$

Pos. ml. $\rho_2 = 1.04 \text{ kg/m}^3$

Smetana: $\rho_3 = 1.01 \text{ kg/m}^3$.

Vstopna hitrost mleka: 0.22 m/s

Izračunamo površine presekov cevi:

$$A_1 = \frac{\pi \cdot 0.05^2 \text{ m}^2}{4}$$

$$A_1 = 1.96 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$A_2 = \frac{\pi \cdot 0.02^2 \text{ m}^2}{4}$$

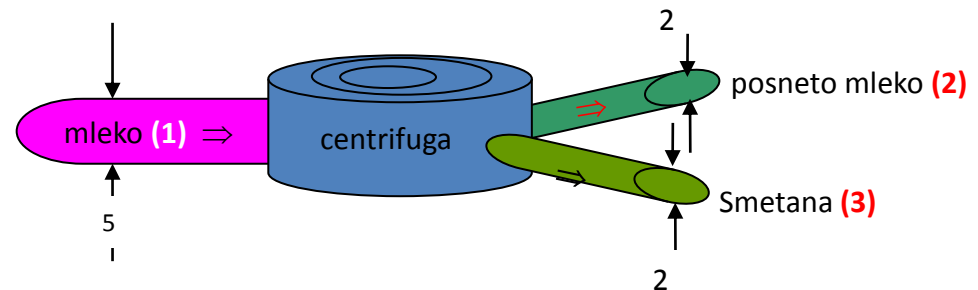
$$A_2 = A_3 = 3.14 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$A_1 \cdot v_1 \cdot (\rho_1 - \rho_2) = A_3 \cdot v_3 \cdot (\rho_3 - \rho_2)$$

$$v_3 = \frac{1.96 \cdot 10^{-3} \cdot 0.22 \cdot (1.035 - 1.04)}{3.14 \cdot 10^{-4} \cdot (1.01 - 1.04)} = 0.23 \text{ m/s}$$

$$v_2 = (A_1 \cdot v_1 - A_3 \cdot v_3) / A_2$$

$$v_2 = [(1.96 \cdot 10^{-3} \cdot 0.22) - (3.14 \cdot 10^{-4} \cdot 0.23)] / 3.14 \cdot 10^{-4} = 1.1 \text{ m/s}$$



Uporaba Bernoullijeve enačbe

Primer: Kolesar se premika s **konstantno hitrostjo** v_0 . Smatramo, da ima tok zraka okoli kolesarja konstantno hitrost v_0 (glej spodnjo sliko). Določi tlačno razliko med točko 1 in točko 2.

Rešitev: Napišemo Bernoullijevo enačbo za tokovnico zraka, kot je prikazano na skici

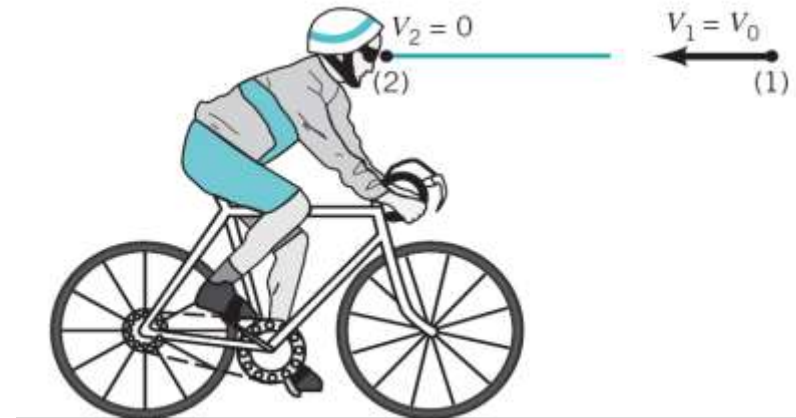
$$P_1 + \rho \cdot \frac{v_1^2}{2} + \cancel{\gamma \cdot z_1} = P_2 + \rho \cdot \frac{v_2^2}{2} + \cancel{\gamma \cdot z_2}$$

ni razlike v višini: $z_1 = z_2$

(1) Zrak se prosto giblje: $v_1 = v_0$

(2) V točki kolesarjevega nosu (stagnantna točka) $v_2 = 0$

$$P_2 - P_1 = \rho \cdot \frac{v_1^2}{2} = \rho \cdot \frac{v_0^2}{2}$$



Pretvorbe različnih enot: konverzijski faktorji

Tlak	Tlak vrednost v (N/m² = Pa)
1 bar	1.00 x 10 ⁵
1 atmosphere (atm)	1.0135 x 10 ⁵
1 mm Hg	1.33 x 10 ²
1 torr	1.33 x 10 ²
1 lb/in. ² (psi)	6.89 x 10 ³

Dolžina							
From/To	m	mm	km	in.	ft	yd	mi
meter (m)	1	1,000	0.001	39.37	3.281	1.094	0.0006215
inch (in.)	0.0254	25.4	2.54E-05	1	0.08333	0.02778	1.578E-05
foot (ft)	0.3048	304.8	3.048E-04	12	1	0.3333	1.894E-04
yard (yd)	0.9144	914.4	9.144E-04	36	3	1	5.683E-04
mile (mi)	1,609	1,609,000	1.609	63,350	5,280	1,760	1

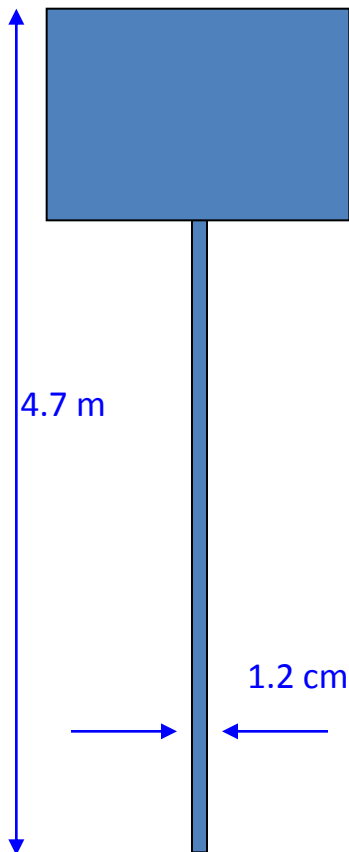
Volumen							
From/To	m³	l	ft³	gal	Imp gal	ac-ft	
cubic meter (m ³)	1	1,000	35.31	264.2	220.0	8.107E-04	
cubic foot (ft ³)	0.02832	28.32	1	7.481	6.229	2.296E-05	
gallon US	0.003785	3.785	0.1337	1	0.8327	3.069E-06	
gallon Imp. (Imp gal)	0.004546	4.546	0.1605	1.201	1	3.686E-06	

$$P_1 + \frac{\rho \cdot v_1^2}{2} + \gamma \cdot z_1 = P_2 + \frac{\rho \cdot v_2^2}{2} + \gamma \cdot z_2$$

Uporaba Bernoullijeve enačbe

Primer: pretok pri iztoku iz rezervoarja

Rezervoar za shranjevanje mleka je 4.7 m nad iztočno cevjo. Rezervoar je pri atmosferskem tlaku, prav tako kot iztočna cev. Kakšen bo volumski pretok mleka, če je premer iztočne cevi 1.2 cm. Energetske izgube v okolico zanemarimo



$$v_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot z_1}$$

$$v_2 = \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 4.7} = 9.6 \text{ m/s}$$

$$\Phi_v = A \cdot v = (\pi \cdot 0.012^2 / 4) \text{ m}^2 \cdot 9.6 \text{ m/s}$$

$$\Phi_v = A \cdot v = 1.08 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

Če je gostota mleka 1036 kg/m^3 , bo masni pretok:

$$\Phi_m = \Phi_v \cdot \rho = 1.08 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s} \cdot 1036 \text{ kg/m}^3 = 1.119 \text{ kg/s}$$

Uporaba Bernoullijeve enačbe

$$P_1 + \frac{\rho \cdot v_1^2}{2} + \gamma \cdot z_1 = P_2 + \frac{\rho \cdot v_2^2}{2} + \gamma \cdot z_2$$

Primer: Zbiralnik vode

80 m visok zbiralnik vode napaja mestni vodovod. Kako hitro naj bi voda izstopala iz zbiralnika?

Če odpremo hladno vodo v stanovanju na višini 2 m.

$$v_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot z_1}$$

$$v_2 = \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 78} = 39.1 \text{ m/s} \approx 140 \text{ km/h}$$



Toda voda ne izteka iz pipe tako hitro.

Poleg reducirnih ventilov gre za velike izgube zaradi trenja,

Bernoullijeva enačbe torej ne drži, ker nismo upoštevali energetskih izgub.

Viskozno trenje upočasni tok vode.

Trenje je povezano s turbulentnim tokom v ceveh

$$P_1 + \frac{\rho \cdot v_1^2}{2} + \gamma \cdot z_1 = P_2 + \frac{\rho \cdot v_2^2}{2} + \gamma \cdot z_2$$

Uporaba Bernoullijeve enačbe

Primer: Voda izteka iz rezervoarja po cevi premera 500 mm (sifon)

- (1) Določi maksimalno možno višino v točki B, da pretok vode v cevi ne pade pod 2.15 m³/s in absolutni tlak ni manjši od 20 kN/m².
- (2) Določi višino cevi v točki C kjer voda izteka iz cevi. Rezervoar je pri atmosferskem tlaku 1 bar, energetske izgube v okolico zanemari.

Rešitev:

hitrost vode v točki B je enaka hitrosti na iztoku (točka C)

$$\Phi = A \cdot v = (\pi \cdot 0.5^2 / 4) \cdot v = 2.15 \text{ m}^3/\text{s}$$

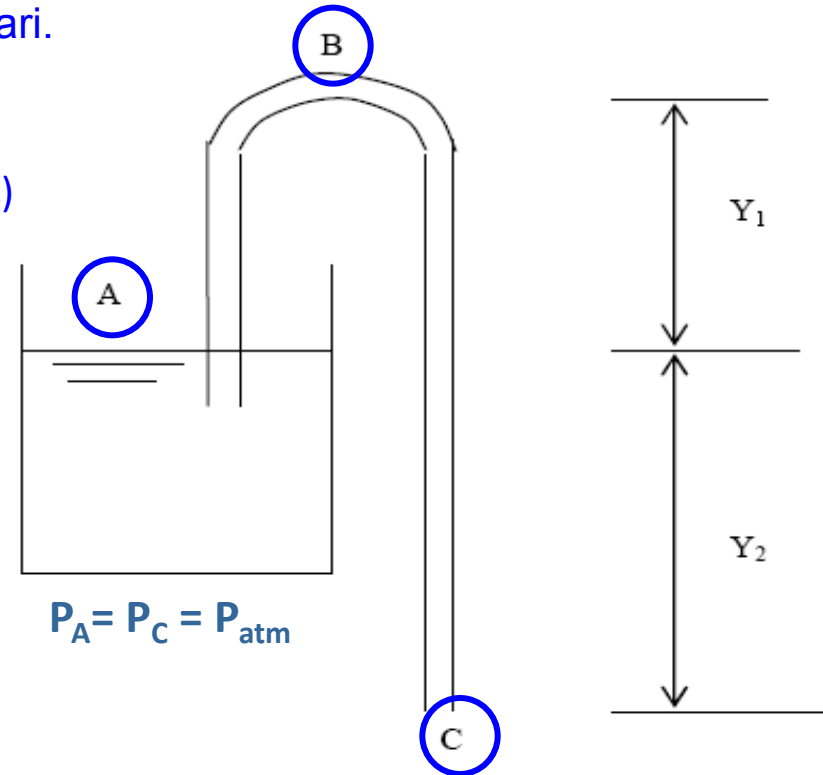
$$v = v_B = v_C = 10.95 \text{ m/s}$$

Bernoullijeva enačba v točkah A in C

$$Y_A + \frac{P_A}{\rho \cdot g} + \frac{v_A^2}{2 \cdot g} = Y_2 + \frac{P_C}{\rho \cdot g} + \frac{v_C^2}{2 \cdot g}$$

$$-\rho \cdot g \cdot Y_2 = \frac{\rho \cdot v_C^2}{2} = \frac{\rho \cdot v_B^2}{2}$$

$$\Rightarrow Y_2 = -\frac{v_C^2}{2g} = -6.11 \text{ m}$$



Uporaba Bernoullijeve enačbe

$$P_1 + \frac{\rho \cdot v_1^2}{2} + \gamma \cdot z_1 = P_2 + \frac{\rho \cdot v_2^2}{2} + \gamma \cdot z_2$$

Primer: Voda izteka iz rezervoarja po cevi premera 500 mm (sifon)

atmosferski tlak je na točki A in C: $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ N/m}^2$ minimalni tlak v cevi - točka B = $2 \cdot 10^3 \text{ N/m}^2$

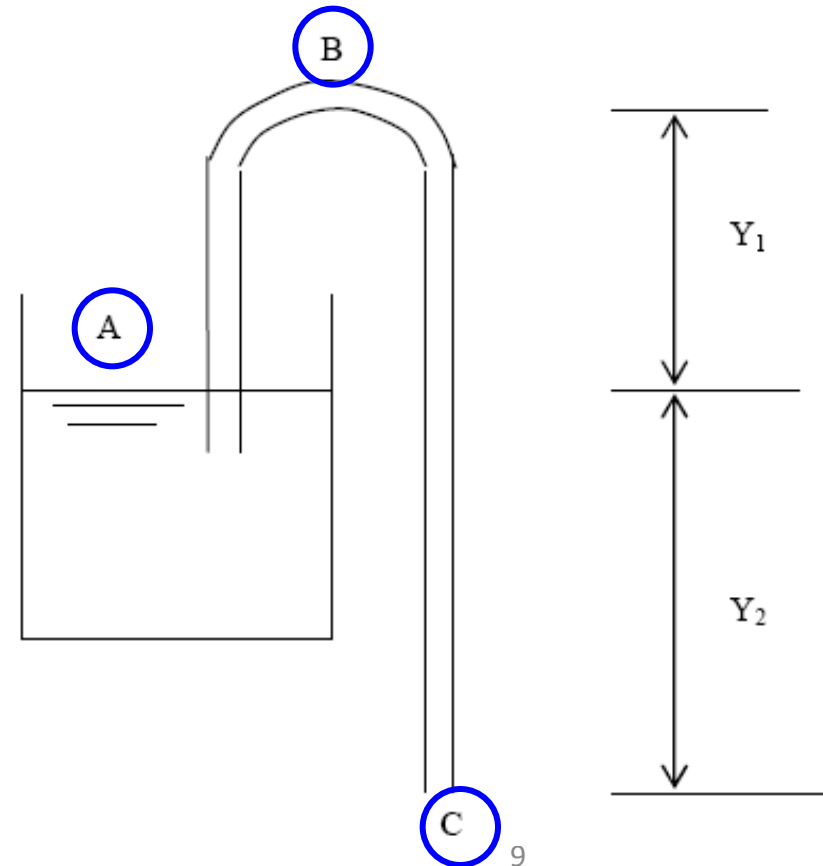
Bernoullijeva enačba v točkah A in B

$$z_A + \frac{P_{\text{atm}}}{\rho \cdot g} + \frac{v_A^2}{2 \cdot g} = z_B + \frac{P_B}{\rho \cdot g} + \frac{v_B^2}{2 \cdot g}$$

$$\frac{v_B^2}{2g} = \frac{v_C^2}{2g} = 6.11 \text{ m}$$

$$0 + 10^5 / (\rho \cdot g) + 0 = y_1 + 2 \cdot 10^4 / (\rho \cdot g) + 6.11$$

$$\Rightarrow y_1 = 2.04 \text{ m}$$



$$P_1 + \frac{\rho \cdot v_1^2}{2} + \gamma \cdot z_1 = P_2 + \frac{\rho \cdot v_2^2}{2} + \gamma \cdot z_2$$

Uporaba Bernoullijeve enačbe

Primer: Tlak v cevi ob zožitvi

Voda teče po cevi s pretokom $0.4 \text{ m}^3/\text{min}$ pri tlaku 70 kPa . Cev ima premer 7.5 cm . Izračunajte tlak v cevi, če se premer cevi zoži na 5 cm . Gostota vode je 1000 kg/m^3

Rešitev:

Pretok vode Φ_v : $0.4 \text{ m}^3/\text{min} = 0.0067 \text{ m}^3/\text{s}$

Površina cevi A_1 : $\pi \cdot D_1^2/4 = 4.42 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$

Površina cevi A_2 : $\pi \cdot D_2^2/4 = 1.96 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$

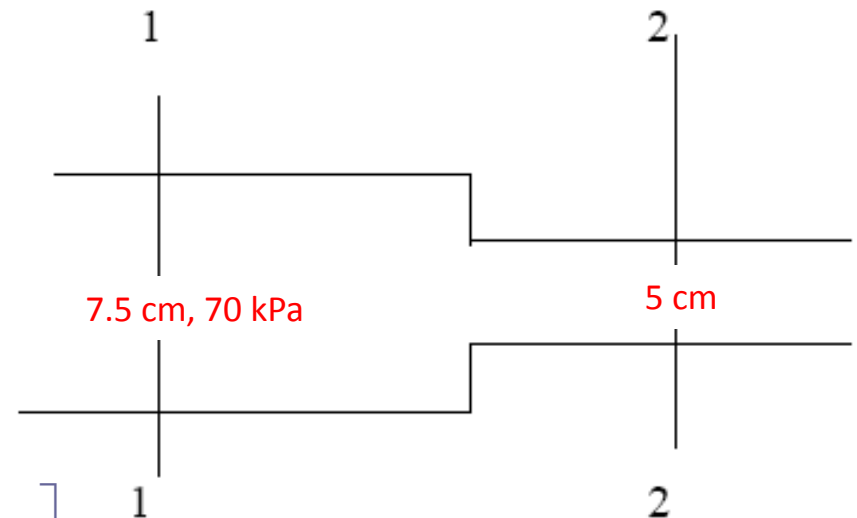
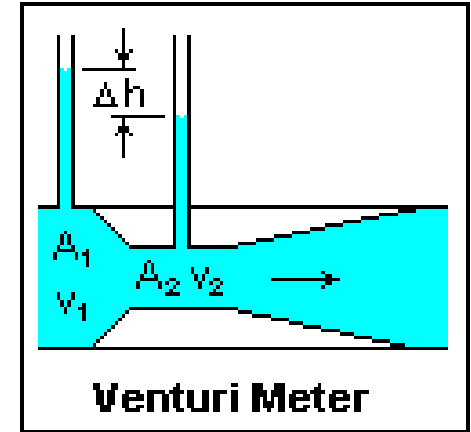
Hitrost na mestu 1: $v_1 = \Phi/A_1 = 1.51 \text{ m/s}$

Hitrost na mestu 2: $v_2 = \Phi/A_2 = 3.4 \text{ m/s}$

Tlačna razlika:

$$P_1 - P_2 = \frac{\rho \cdot v_1^2}{2} \cdot \left[\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right] = \frac{1000 \cdot 1.51^2}{2} \cdot \left[\left(\frac{4.42}{1.96} \right)^2 - 1 \right] = 4657.6 \text{ Pa}$$

$$P_2 = (P_1 - P_2) - P_1 = 65.3 \text{ kPa}$$



$$P_1 + \frac{\rho \cdot v_1^2}{2} + \gamma \cdot z_1 = P_2 + \frac{\rho \cdot v_2^2}{2} + \gamma \cdot z_2$$

Uporaba Bernoullijeve enačbe

Primer: Pretok olivnega olja

Olivno olje z gostoto 920 kg/m^3 teče po cevi premera 2 cm . Izračunajte hitrost toka, če je v cevovodu vstavljena zožitev tako da je cev zožena na 1.2 cm . Tlačno razliko med cevjo pred in po zoženim delom 8 cm smo izmerili z višino vodnega stolpca in znaša 8 cm .

Rešitev:

Razmerje presekov cevi: $A_1/A_2 = (D_1/D_2)^2 = (2/1.2)^2$

Tlačna razlika: $\rho \cdot g \cdot h = 0.08 \cdot 1000 \cdot 9.81 = 785 \text{ Pa}$

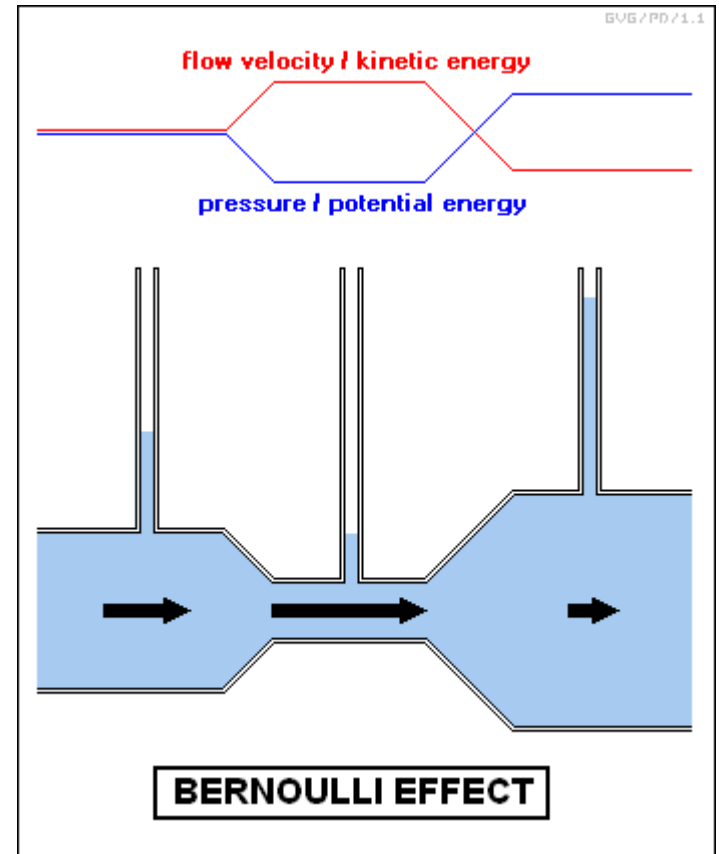
Uporabimo Bernoullijevo enačbo:

$$P_1 - P_2 = \frac{\rho \cdot v_1^2}{2} \cdot \left[\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right]$$

$$P_1 - P_2 = 785 = \frac{920 \cdot v_1^2}{2} \cdot \left[\left(\frac{2}{1.2} \right)^2 - 1 \right]$$

Izračunamo hitrost: $v_2 = 785/3091 \text{ m}^2/\text{s}^2$

$v = 0.5 \text{ m/s}$



Uporaba Bernoullijeve enačbe

Primer: Venturijeva cev za merjenje hitrosti tekočin

Tekočina teče po cevi s konstantnim pretokom s hitrostjo 2,5 m/s. Izračunaj hitrost tekočine, če se premer cevi zoži iz 5.5cm na 3.5 cm. Kakšen tlak kaže manometr v zožitvi, če manometr v širokem delu cevi kaže 15 mmHg?

Pri obravnavanju kontinuitetne enačbe smo izračinali hitrost v zoženi cevi:

$$v_n = \frac{\pi \cdot D_w^2 \cdot 4}{4 \cdot \pi \cdot D_n^2} \cdot v_w = \frac{D_w^2}{D_n^2} \cdot v_w \quad v_n = \frac{5.5^2 \text{ cm}^2}{3.5^2 \text{ cm}^2} \cdot 2.5 \text{ m/s} = 6.2 \text{ m/s}$$

$$P_n - P_w = \frac{\rho \cdot v_w^2}{2} - \frac{\rho \cdot v_n^2}{2} = \frac{\rho}{2} \cdot [v_w^2 - v_n^2]$$

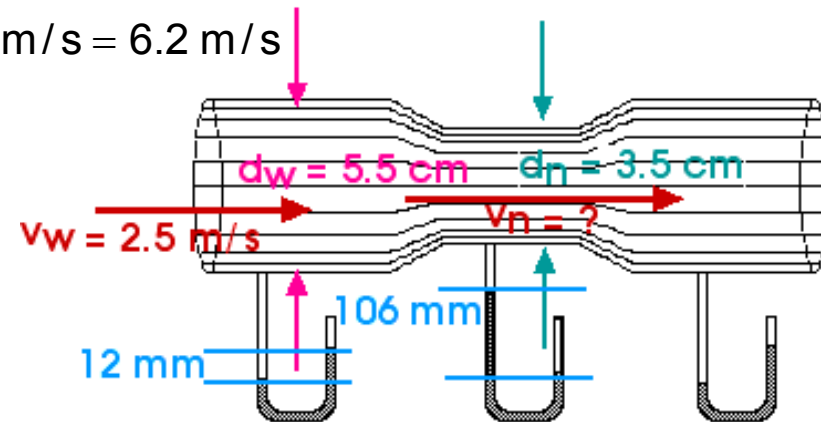
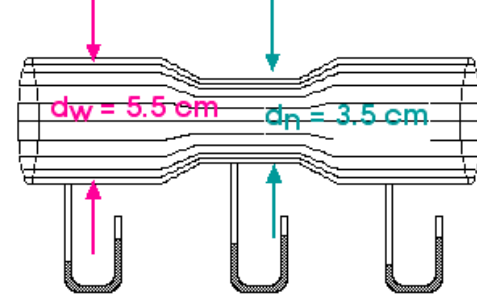
$$P_n = P_w + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot 1000 \cdot [2.5^2 - 6.2^2]$$

$$P_n = 15 \text{ mmHg} + \left(\frac{1}{2}\right) [1000 \text{ kg/m}^3] \cdot [-32.19 \text{ m}^2/\text{s}^2]$$

$$P_n = 15 \text{ mmHg} - \left(\frac{1}{2}\right) (32190 \text{ (kg m/s}^2) / \text{m}^2)$$

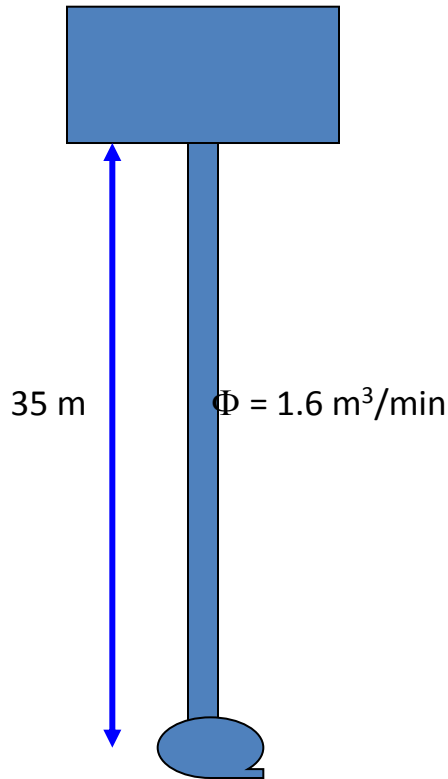
$$P_n = 15 \text{ mmHg} - 16095 \text{ Pa} \longrightarrow 16095 \text{ kPa} = 16095 \text{ Pa} \left[\frac{1 \text{ mmHg}}{133 \text{ Pa}} \right] = 121 \text{ mmHg}$$

$$P_n = 15 \text{ mmHg} - 121 \text{ mmHg} \longrightarrow P_n = -106 \text{ mmHg}$$



Primer: Moč črpalke

Vodo črpamo v rezervoar na višini 35 m po cevi premera 7.5 cm. Zagotoviti je treba pretok 1.6 m³/min. Izračunaj moč črpalke, če predpostaviš, da deluje s 100% močjo in da ni izgub zaradi trenja v ceveh.

**Rešitev:**

Volumski pretok: $\Phi_v = 1.6 \text{ m}^3/\text{min} = 2.7 \times 10^{-2} \text{ m}^3/\text{s}$

Presek cevi: $A = \pi \cdot (0.075)^2 / 4 = 4.42 \times 10^{-3} \text{ m}^2$

Hitrost v cevi: $v = 2.7 \times 10^{-2} / 4.42 \times 10^{-3} = 6 \text{ m/s}$

Potreben vnos mehanske energije: $E_M = m \cdot z \cdot g + m \cdot v^2 / 2$

$E_M / \text{enoto mase} = z \cdot g + v^2 / 2$

$E_M / \text{enoto mase} = 35 \text{ m} \cdot 9.81 \text{ m/s}^2 + (1/2) 6^2 \text{ m}^2/\text{s}^2$

$E_M / \text{enoto mase} = 343.4 + 1.8 = 361.4 \text{ m}^2/\text{s}^2$

Enota: $\text{J} = \text{kg m}^2/\text{s}^2$

$E_M = 361.4 \text{ J/kg}$

Zahtevana moč črpalke je: $P = E_M / \text{enoto mase} \times \Phi_m$

$\Phi_m = \Phi_v \times \rho = 2.7 \times 10^{-2} \text{ m}^3/\text{s} \times 1000 \text{ kg/m}^3$

$P = 361.4 \text{ J/kg} \times 2.7 \times 10^{-2} \text{ m}^3/\text{s} \times 1000 \text{ kg/m}^3 = 9758 \text{ J/s} (\text{J/s}=\text{W})$