Matematika 1 / UPEŠ

Domača naloga št. 2
– rešitve –

2005/06

⬇ PRIIMEK ⬇	⬇ IME ⬇	⬇ VPISNA ŠTEVILKA ⬇	⬇ SMER ⬇

Dana je matrična enačba $A^2X = B$.

a) Izrazi X.

Najprej si poglejmo potenciranje matrik: $A^n = \overbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}^{n-krat}$ (seveda je to možno le pri kvadratnih matrikah). Torej A^2 dobimo kot produkt matrike A s samo seboj: $A^2 = A \cdot A$.

Matrična enačba je torej ekvivalentna enačbi:

$$AAX = B.$$

Matrično enačbo z leve strani pomnožimo z inverzno matriko matrike A^2 in dobimo $X = (A^2)^{-1}B$, lahko pa bi jo tudi dvakrat zaporedoma z leve strani pomnožili z inverzno matriko matrike A in potem dobili $X = (A^{-1})^2 B$, kar je enako prejšnjemu rezultatu.

X lahko torej bolj na kratko izrazimo kot $X = A^{-2}B$.

---

b) Poišči X, če je $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ in $B = \begin{bmatrix} 16 \\ 0 \\ 32 \end{bmatrix}$.

Za matriko A^2 dobimo:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -4 \end{bmatrix},$$

nato pa s pomočjo matrike kofaktorjev dobimo še inverzno matriko te matrike:

$$(A^2)^{-1} = \frac{1}{|A^2|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} -4 & 24 & -8 \\ 0 & 16 & 0 \\ 2 & -8 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \left|\begin{matrix} 0 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -4 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 & 4 \\ 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{matrix} = 16$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -4 \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 24 \qquad A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -8.$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 0 & 8 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = 16 \qquad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 0 & 8 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -8 \qquad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(Po obratni poti dobimo najprej $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ in potem

$$(A^{-1})^2 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} -4 & 24 & -8 \\ 0 & 16 & 0 \\ 2 & -8 & 0 \end{bmatrix}).$$

Na koncu z vstavljanjem v izraz, ki smo ga zapisali pod a), dobimo:

$$X = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} -4 & 24 & -8 \\ 0 & 16 & 0 \\ 2 & -8 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 16 \\ 0 \\ 32 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & 24 & -8 \\ 0 & 16 & 0 \\ 2 & -8 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -20 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

□