

**A1.** Za funkcijo  $y(x) = x^3 + 2x^2 + x$ ,  $x > 0$ , izračunajte koeficient elastičnosti in ugotovite, na katerem intervalu je ta večji od 2,5! /25/

$$E_{y,x} = \frac{x}{y(x)} \frac{dy(x)}{dx} = \frac{x}{x^3 + 2x^2 + x} \frac{d}{dx} (x^3 + 2x^2 + x) = \frac{x(3x^2 + 4x + 1)}{x^3 + 2x^2 + x} = \frac{3x + 1}{x + 1}$$

$$\frac{3x + 1}{x + 1} > \frac{5}{2} \Rightarrow 2(3x + 1) > 5(x + 1) \Rightarrow x > 3 \Rightarrow x \in (3, \infty)$$

**A2.** V posodi imamo 4 modre kroglice in po dve beli, rdeči in črni kroglici. Na slepo sočasno izberemo 3 kroglice. Slučajna spremenljivka X naj pomeni število modrih kroglic v tako dobljenem vzorcu. Izračunajte verjetnostno shemo, matematično upanje, disperzijo in standardni odklon slučajne spremenljivke X ! /25/ **Nagradni dodatek:** Kolikšna je verjetnost, da se v tako dobljenem vzorcu nobena barva ne ponovi? /10/

$$X : \left( \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \binom{4}{0}\binom{6}{3} & \binom{4}{1}\binom{6}{2} & \binom{4}{2}\binom{6}{1} & \binom{4}{3}\binom{6}{0} \\ \binom{10}{3} & \binom{10}{3} & \binom{10}{3} & \binom{10}{3} \end{array} \right) \Rightarrow X : \left( \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{20}{120} & \frac{60}{120} & \frac{36}{120} & \frac{4}{120} \\ \frac{20}{120} & \frac{60}{120} & \frac{36}{120} & \frac{4}{120} \end{array} \right)$$

$$E(X) = \frac{20}{120} \cdot 0 + \frac{60}{120} \cdot 1 + \frac{36}{120} \cdot 2 + \frac{4}{120} \cdot 3 = \frac{6}{5} = 1.20;$$

$$D(X) = \frac{20}{120} \cdot 0^2 + \frac{60}{120} \cdot 1^2 + \frac{36}{120} \cdot 2^2 + \frac{4}{120} \cdot 3^2 - \left(\frac{6}{5}\right)^2 = \frac{14}{25}; \quad \sigma(X) = \sqrt{\frac{14}{25}} \doteq 0.75$$

$$\text{DODATEK: } P(A) = \frac{\binom{4}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{1} + \binom{4}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{1} + \binom{4}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{1} + \binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{10}{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{16 + 16 + 16 + 8}{120} = \frac{7}{15} = .466666 \doteq 46.7\%$$

**A3.** V neprestopnem letu 2001 smo si dne 26. avgusta izposodili 180.000,00 SIT in dolg v celoti poplačali dne 31. decembra 2001. Konformno obrestovanje, obrestna mera 12 % letno, štetje časa po načinu (K, 365). Za koliko odstotkov so bile plačane obresti manjše od tistih, ki bi jih plačali v primeru navadnega obrestnega računa pri nespremenjenih ostalih pogojih? /25/

$$d = 6 + 30 + 31 + 30 + 30 = 127 \text{ dni (šteli smo prvi dan, zadnjega pa ne)}$$

$$o_K = G \left( \left( 1 + \frac{p}{100} \right)^{d/365} - 1 \right) = 180000 \cdot \left( 1.12^{127/365} - 1 \right) = 7239.59$$

$$o_N = \frac{G p d}{36500} = \frac{180000 \cdot 12 \cdot 127}{36500} = 7515.62 \Rightarrow \frac{7515.62 - 7239.59}{7515.62} = 3.673\%$$

**A4.** Koliko moramo vlagati na začetku vsakega četrletja prvih 20 let, da bomo lahko naslednjih 10 let ob koncu vsakega leta prejeli po 10.000 d.e.? (p = 6 % p.a., četrletna kapitalizacija z relativno obrestno mero) /25/

$$r_q = \left( 1 + \frac{6}{100} \right) = 1.015; \quad (xr_q + xr_q^2 + \dots + xr_q^{80}) r_q^{40} = a + ar_q^4 + ar_q^8 + \dots ar_q^{36}$$

$$xr_q^{41} \frac{r_q^{80} - 1}{r_q - 1} = a \frac{(r_q^4)^{10} - 1}{(r_q^4) - 1} \Rightarrow x = \frac{a (r_q^{40} - 1) (r_q - 1)}{(r_q^4 - 1) (r_q^{80} - 1) r_q^{41}}$$

$$x = \frac{10000 (1.015^{40} - 1) (1.015 - 1)}{(1.015^4 - 1) (1.015^{80} - 1) 1.015^{41}} = 471.79$$

**B1.** Za funkcijo  $y(x) = x^3 + 2x^2 + x$ ,  $x > 0$ , izračunajte koeficient elastičnosti in ugotovite, na katerem intervalu je ta večji od 2,75! /25/

$$E_{y,x} = \frac{x}{y(x)} \frac{dy(x)}{dx} = \frac{x}{x^3 + 2x^2 + x} \frac{d}{dx} (x^3 + 2x^2 + x) = \frac{x(3x^2 + 4x + 1)}{x^3 + 2x^2 + x} = \frac{3x + 1}{x + 1}$$

$$\frac{3x + 1}{x + 1} > \frac{11}{4} \Rightarrow 4(3x + 1) > 11(x + 1) \Rightarrow x > 7 \Rightarrow x \in (7, \infty)$$

**B2.** V posodi imamo 4 rdeče kroglice in po dve beli, modri in črni kroglici. Na slepo sočasno izberemo 3 kroglice. Slučajna spremenljivka  $X$  naj pomeni število rdečih kroglic v tako dobljenem vzorcu. Izračunajte verjetnostno shemo, matematično upanje, disperzijo in standardni odklon slučajne spremenljivke  $X$  ! /25/ **Nagradni dodatek:** Kolikšna je verjetnost, da se v tako dobljenem vzorcu nobena barva ne ponovi? /10/

$$X : \left( \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \binom{4}{0}\binom{6}{3} & \binom{4}{1}\binom{6}{2} & \binom{4}{2}\binom{6}{1} & \binom{4}{3}\binom{6}{0} \\ \binom{10}{3} & \binom{10}{3} & \binom{10}{3} & \binom{10}{3} \end{array} \right) \Rightarrow X : \left( \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{20}{120} & \frac{60}{120} & \frac{36}{120} & \frac{4}{120} \end{array} \right)$$

$$E(X) = \frac{20}{120} \cdot 0 + \frac{60}{120} \cdot 1 + \frac{36}{120} \cdot 2 + \frac{4}{120} \cdot 3 = \frac{6}{5} = 1.20;$$

$$D(X) = \frac{20}{120} \cdot 0^2 + \frac{60}{120} \cdot 1^2 + \frac{36}{120} \cdot 2^2 + \frac{4}{120} \cdot 3^2 - \left(\frac{6}{5}\right)^2 = \frac{14}{25}; \quad \sigma(X) = \sqrt{\frac{14}{25}} \doteq 0.75$$

$$\text{DODATEK: } P(A) = \frac{\binom{4}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{1} + \binom{4}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{1} + \binom{4}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{1} + \binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{10}{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{16 + 16 + 16 + 8}{120} = \frac{7}{15} = .466666 \doteq 46.7 \%$$

**B3.** V neprestopnem letu 2001 smo si dne 26. avgusta izposodili 180.000,00 SIT in dolg v celoti poplačali dne 31. decembra 2001. Navadni obrestni račun, obrestna mera 12 % letno, štetje časa po načinu (K, 365). Za koliko odstotkov so bile plačane obresti večje od tistih, ki bi jih plačali v primeru konformnega obrestovanja pri nespremenjenih ostalih pogojih? /25/

$$d = 6 + 30 + 31 + 30 + 30 = 127 \text{ dni (šteli smo prvi dan, zadnjega pa ne)}$$

$$o_K = G \left( \left( 1 + \frac{p}{100} \right)^{d/365} - 1 \right) = 180000 \cdot (1.12^{127/365} - 1) = 7239.59$$

$$o_N = \frac{Gpd}{36500} = \frac{180000 \cdot 12 \cdot 127}{36500} = 7515.62; \quad \frac{7515.62 - 7239.59}{7239.59} = 3.813 \%$$

**B4.** Koliko moramo vlagati na začetku vsakega polletja prvih 20 let, da bomo lahko naslednjih 10 let ob koncu vsakega leta prejeli po 10.000 d.e.? ( $p = 6 \%$  p.a., polletna kapitalizacija z relativno obrestno mero) /25/

$$r_m = 1 + \frac{6/2}{100} = 1.03; \quad (xr_s + xr_s^2 + \dots + xr_s^{40}) r_s^{20} = a + ar_s^2 + ar_s^4 + \dots ar_s^{18}$$

$$xr_s^{21} \frac{r_s^{40} - 1}{r_s - 1} = a \frac{(r_s^2)^{10} - 1}{(r_s^2) - 1} \Rightarrow x = \frac{a(r_s^{20} - 1)(r_s - 1)}{(r_s^2 - 1)(r_s^{40} - 1)r_s^{21}}$$

$$x = \frac{10000(1.03^{20} - 1)(1.03 - 1)}{(1.03^2 - 1)(1.03^{40} - 1)1.03^{21}} = 943.66$$