Opisna geometrija

II. DVOČRTNI POSTOPEK

1

Dvočrtni postopek

- **Pridružni ortogonalni projekciji na:**
  - tlorisno ravnino π_1,
  - narisno ravnino π_2,
  - presečna os x_{12}.
- **Imena:**
  - Monge-ov postopek (Gaspard Monge, 1746-1818);
  - dvočrtni postopek;
  - postopek pridruženih normalnih projekcij;
- **Literatura:**
  - Strubecker, K., Nacrtna geometrija, Tehnička knjiga, Zagreb, 1969.
  - Prebil, I., Opisna geometrija, Tehniška založba Slovenije, Ljubljana, 1994.

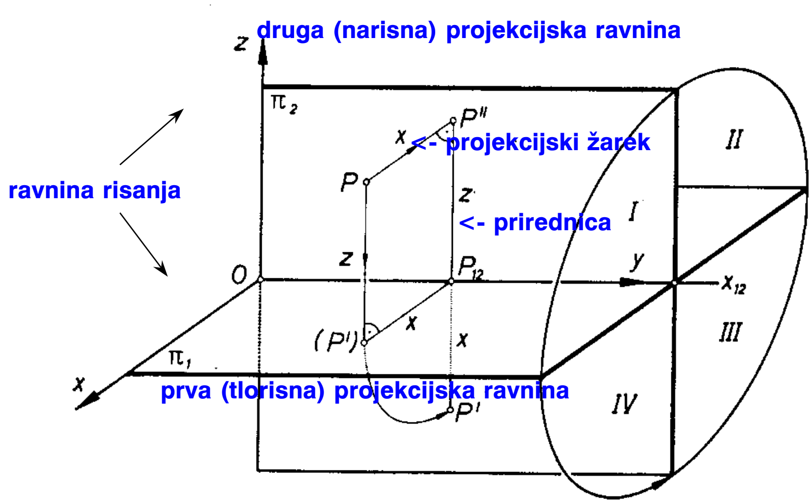
2

97/10

Oznake

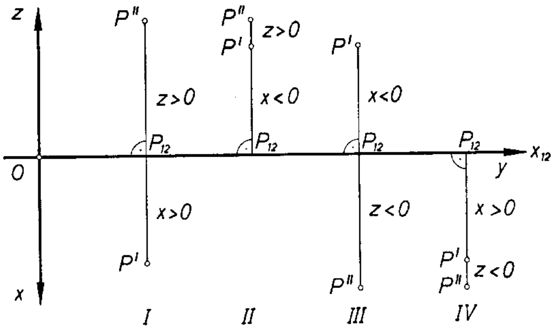
- A,B,C ... točke
- a,b,c ... premice
- A’,B’,C’ ... tlorisi
- A ,B ,C   ... narisi
- grške črke - ravnine

Kvadranti prostora



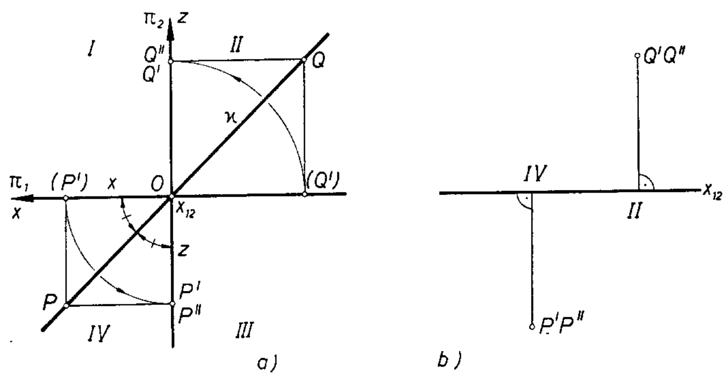
Projekcija točke P = P P

- Teorem: tloris P’ in naris P točke P ležita na isti pravokotnici na x_{12}, ki se imenuje *ordinala* ali *prirednica* točke P.
- Različne projekcije in položaj točke



5

Koincidenčna ravnina

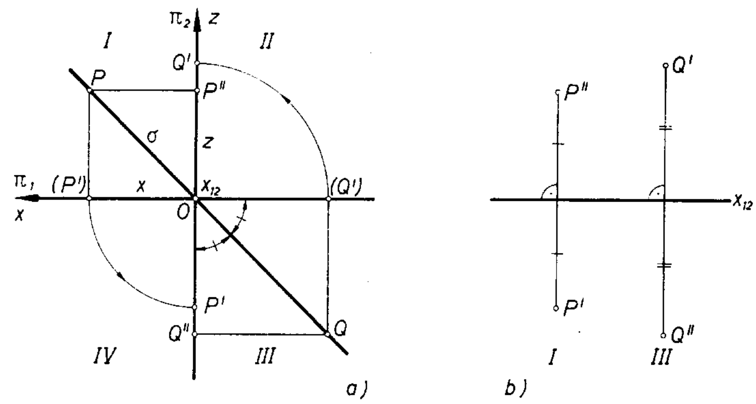


- Teorem: Točke P, katerih tloris in naris sovpadajo, ležijo v simetralni ravnini II. in IV. kvadranta. Ta ravnina se imenuje *ravnina koincidence* χ

6

97/10

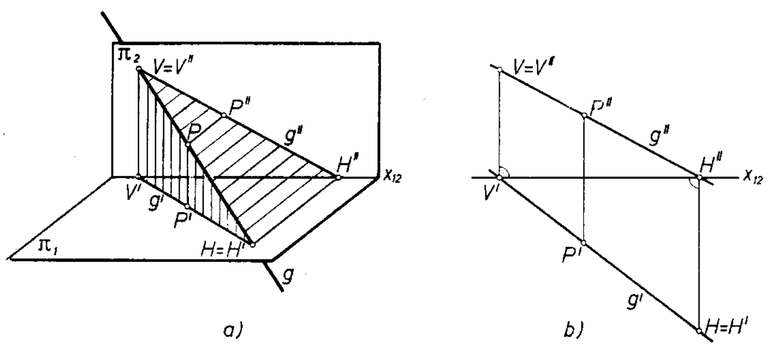
Ravnina simetrije



- Teorem: Točke P, katerih P’ in P   sta simetrični na x_{12} ležijo v simetralni ravnini I. in III. kvadranta. Ta ravnina se imenuje *ravnina simetrije* σ.

7

Projekcija premice g = g   g

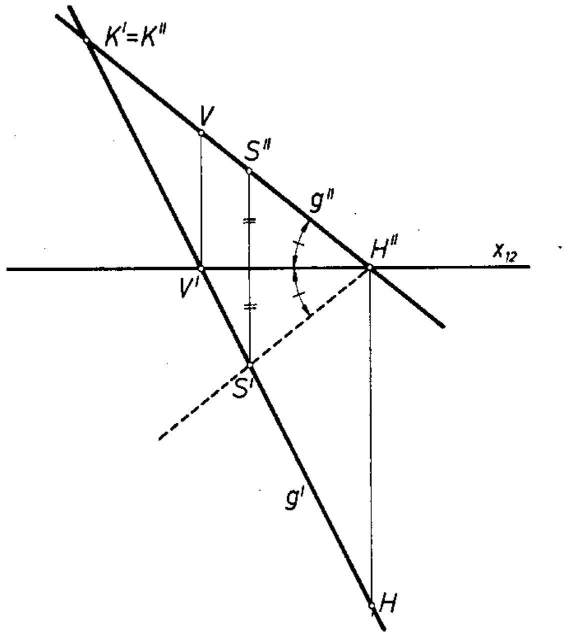


- Tloris g’ nastane v presečišču ravnine π_1 z ravnino, ki gre skozi g in je pravokotna na π_1
- Naris g’’ nastane v presečišču ravnine π_2 z ravnino, ki gre skozi g in je pravokotna na π_2
- g prebada π_1 v H, π_2 v V (prvo in drugo prebodišče)

8

97/10

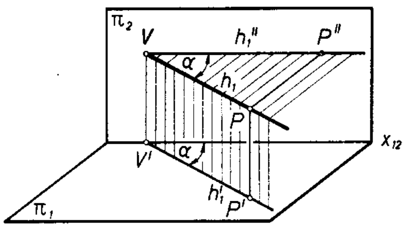
Konstrukcija prebodišč premice

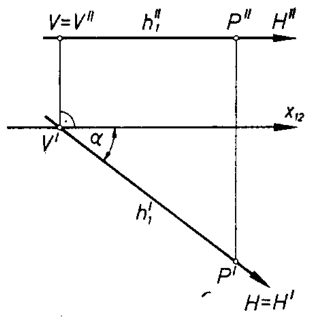


- $\pi_1, \pi_2, \chi, \sigma$:
- **H,V,K,S**

9

Poseben primer: prva soslednica



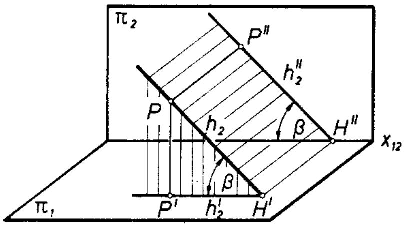


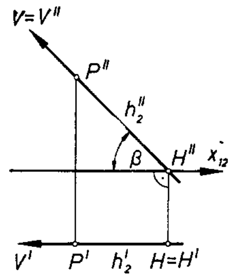
- **vzporedna s π_1**
- **prva *slednica* (glej nadaljevanje) je premica, ki leži v presečišču neke ravnine in π_1;**
- **prva *soslednica* je vzporednica tej premici (h_1).**
- **ohranjanje kota - invarianta.**
- **točka H je *neprava* (nebistvena) točka**

10

97/10

Poseben primer: druga soslednica

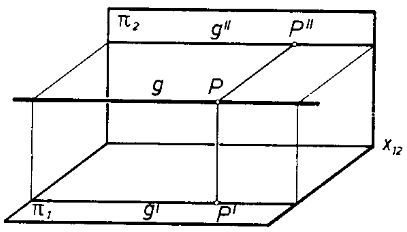


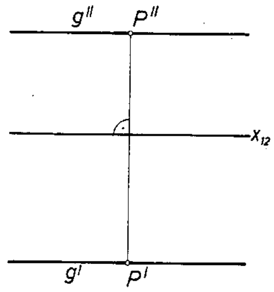


- **vzporedna s** π_2

11

Poseben primer: vzporednica z x_{12}



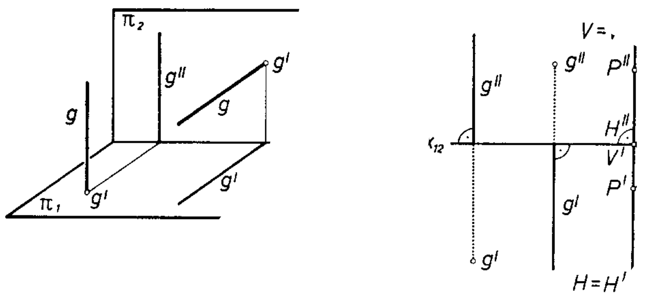


- **V in H sta nepravi točki**

12

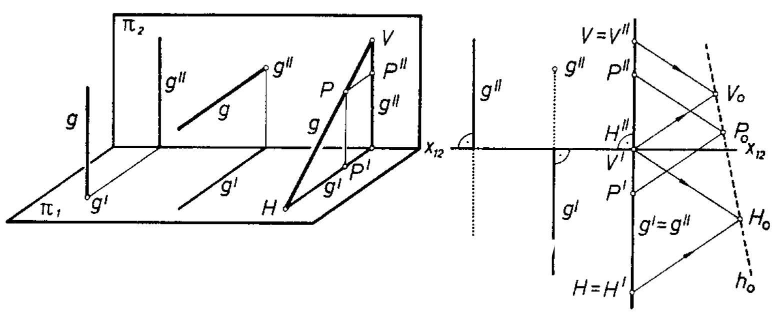
97/10

Posebena primera: prvo- in drugo-proicirna premica



13

Poseben primer: premica leži v ravnini, ki je pravokotna na p_1 in p_2

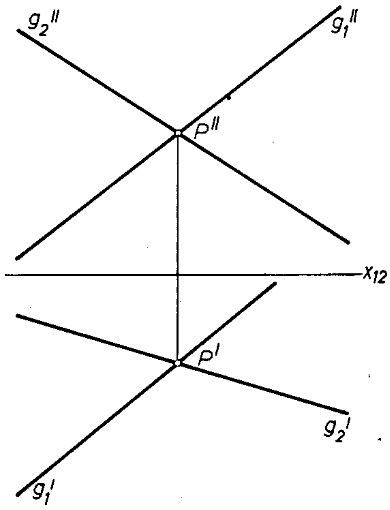


- invarianta: ohranjanje razmerij!
- kako na podlagi V, H in P določimo P ?

14

97/10

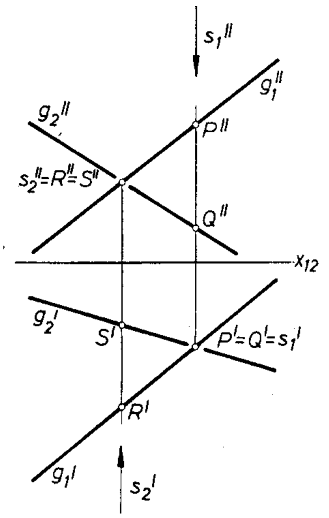
Dve premici



- *Mimobežnici*
- *Sečnici*
  - v pravi točki
  - v nepravi tožki (*vzporednici*)
- vzporednost je invarianta !

15

Določanje vidnosti dveh premic

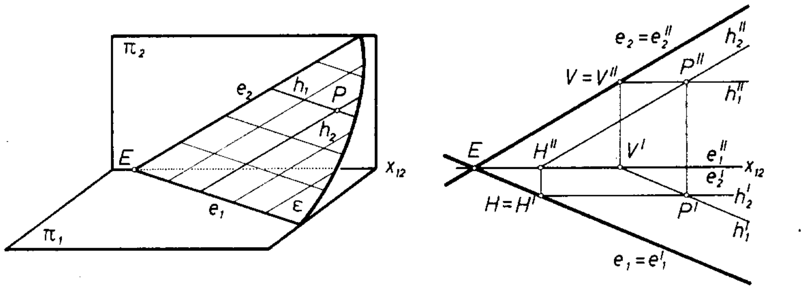


- pomagamo si s pridruženo projekciji

16

97/10

Projekcija ravnine e



- **v splošnem ε seka π_1 in π_2 v premicah e_1 in e_2**
- **premica e_1 je prva ali tlorisna slednica, njene vzporednice so prve soslednice (izohipse!)**
- **premica e_1 je druga (narisna) slednica, njene vzporednice so druge soslednice**
- **točka E je vozliščna točka ravnine**
- **e_1 ,   ?**

17

Soslednice

- **Naris prve soslednice je vzporeden z x12, tloris je vzporeden prvi slednici.**
- **Tloris druge soslednice je vzporeden z x12, naris je vzporeden drugi slednici.**

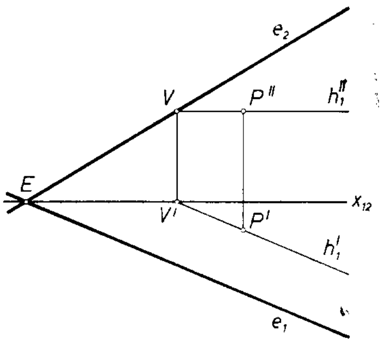
NALOGA:

- **podan tloris prve soslednice podane ravnine; kako konstruiramo naris**
  - **poiščemo njen V , ki leži na x12!**

18

97/10

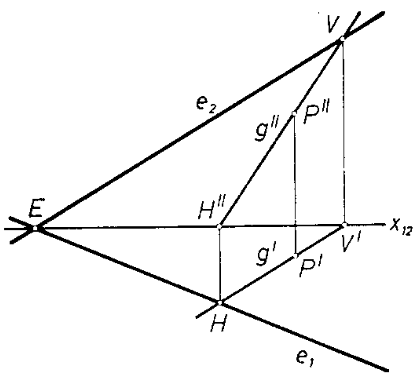
Točka na ravnini



- **kako na podlagi tlorisa poiščemo naris točke:**
  - **s pomočjo soslednice**
- **točka v ravnini podana z eno projekcijo**

19

Premica na ravnini

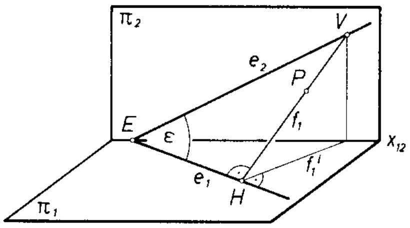


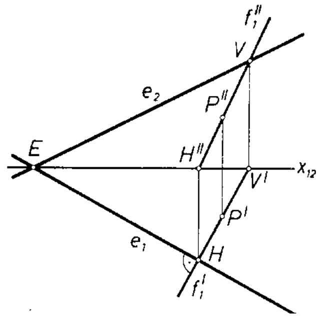
- **kako na podlagi tlorisa poiščemo naris premice:**
  - **H leži na e_1**
  - **V leži na x_{12}**
  - **H leži na x_{12}**
  - **V leži na e_2**
- **premica v ravnini podana z eno projekcijo**

20

97/10

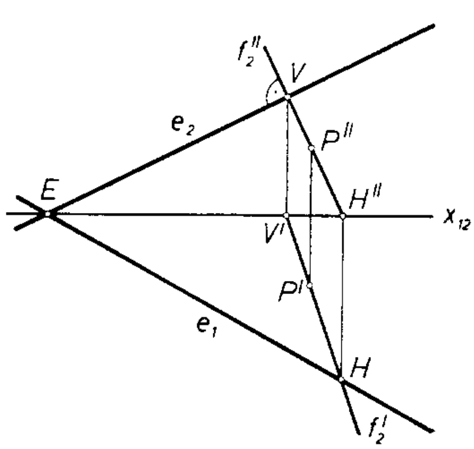
Padnice





- prve padnice f_1 - pravokotnice na e_1 - smer največje strmine in najkrajša razdalja med soslednicama

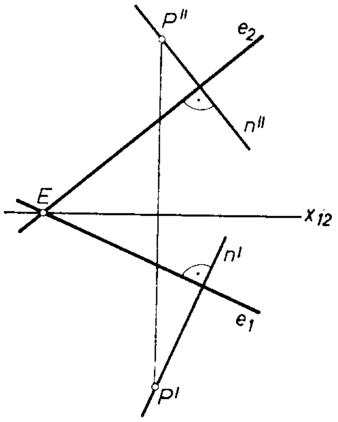
Druge padnice



- druge padnice f_2- pravokotnice na e_2

97/10

Pravokotnica skozi P na ravnino e

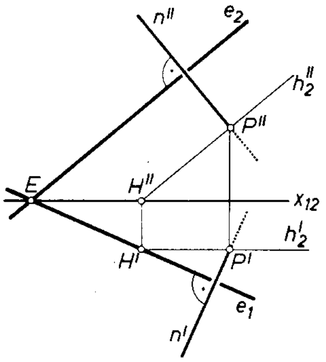


- **pravokotnica (normala) na ravnino je pravokotna na vsako premico v tej ravnini**
- **pravokotna je na vsako (so)slednico**
- **pravokotnost je invariantna**

Zato sledi:

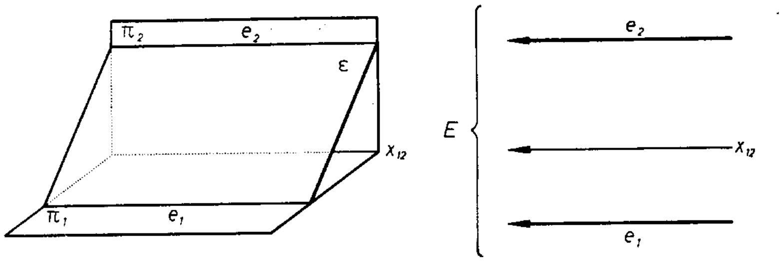
- **Teorem: tloris normale na ravnino je pravokotnen na prvo, naris pa na drugo slednico**

Pravokotnica skozi P (ki je v ravnini) na ravnino e



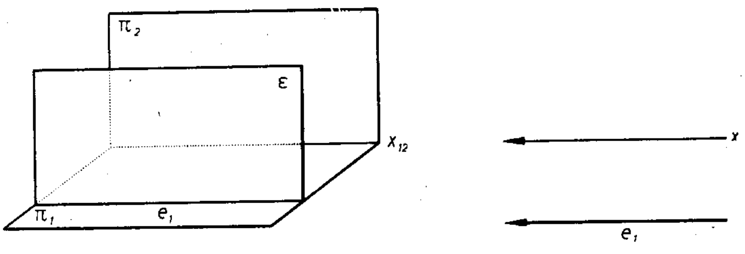
97/10

Posebne lega: vzporednost z x_{12}



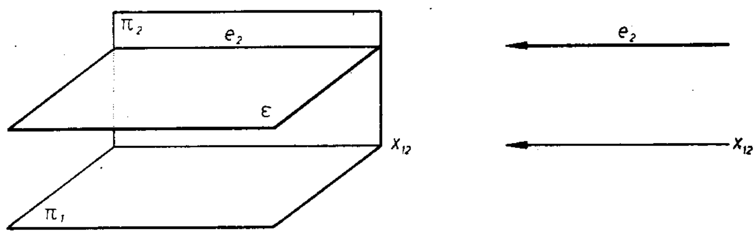
- **E je neprava točka; e_1 in e_2 sta vzporedni**

Posebna lega: frontalna ravnina



- **e_2 je *neprava premica***

Posebna lega: zgornja ravnina



- e_1 je neprava premica

27

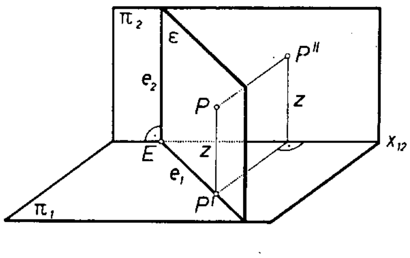
Projicirne ravnine

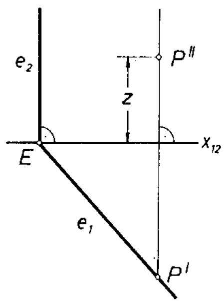
- projekc*ijski* sta π_1 in π_2
- prva projicirna je pravokotna na π_1
- druga projicirna je pravokotna na π_2
- dvojna projicirna je pravokotna na π_1 in π_2

28

97/10

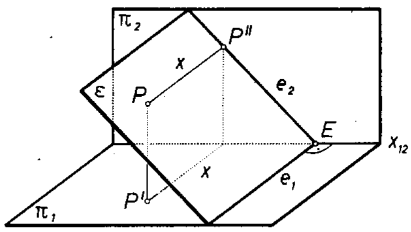
Prva projicirna ravnina

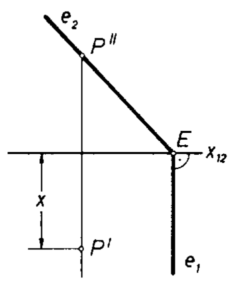




29

Druga projicirna ravnina

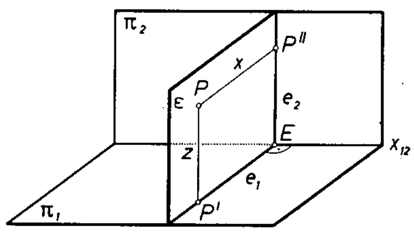


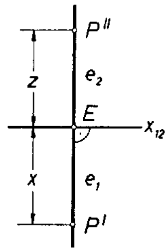


30

97/10

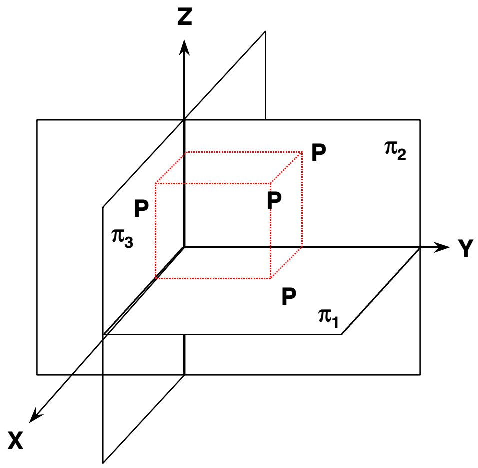
Dvojna projicirna ravnina

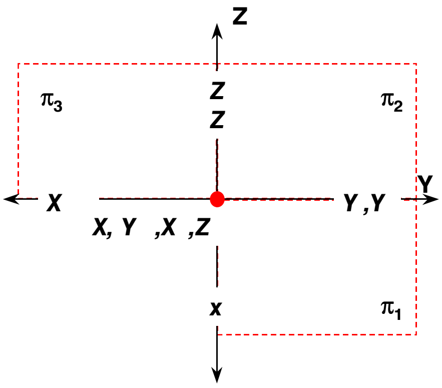




31

Ravnina stranskega risa p3



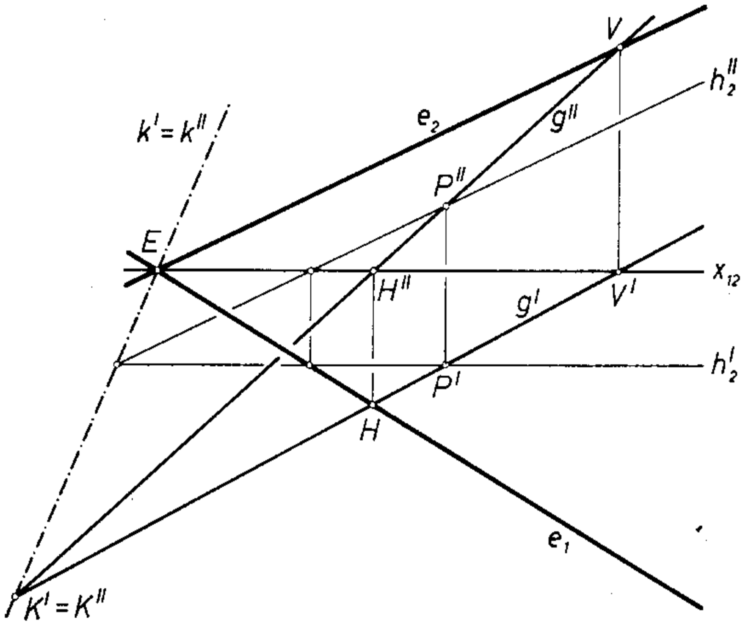


- **tretjeprojicirna ravnina, stranski ris**

32

97/10

Premica koincidence



- presečišče ravnine in koincidenčne ravnine
- poteka skozi E in še eno točko, ki jo dobimo tako, da v ravnino položimo neko poljubno premico

Premica simetije

- **presečiše ravnine in simetrijske ravnine**
- **poteka skozi E in še eno točko, ki jo dobimo tako, da v ravnino položimo neko poljubno premico in poiščemo, kje le-ta seka simetrijsko ravnino**

97/10

Kolineacija in afiniteta

- Geometrijsko SORODSTVO med ravninama:
- točke ene in druge ravnine so si med seboj paroma prirejene
- KOLINEACIJA:
- če točke premice prve ravnine pripadajo točkam premice druge ravnine
- prirejeni točki ležita na kolineacijskem žarku, ki izhaja iz kolineacijskega središča
- mesto, kjer se vsaka točka priredi sama sebi je kolineacijska os

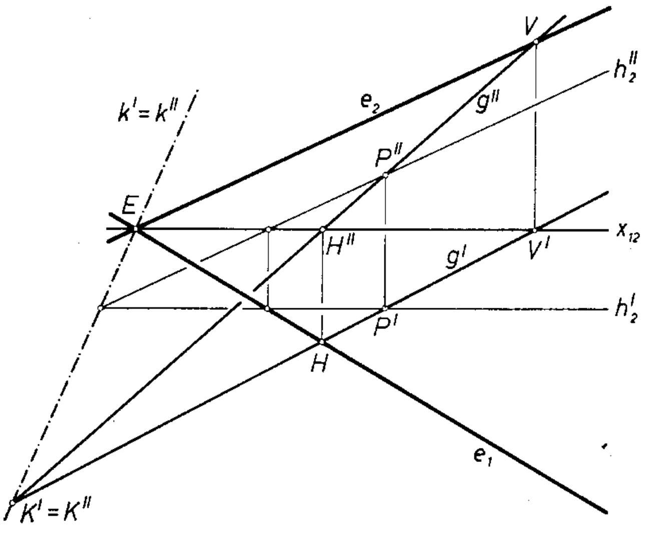
35

Afiniteta

- nepravi točki ene ravnine pripada neprava točka druge ravnine, sledi:
- afiniteta je kolineacija, kjer je kolinacijsko središče v nepravi točki -> kolineacijski žarki so vzporedni = afinitetni žarki
- vzporednicam ene ravnine pripadajo vzporednice druge ravnine
- Perspektivna afiniteta med dvemi liki:
- preme spojnice prirejenih točk so med seboj vzporedne
- sečišča med seboj prirejenih premic so na isti pravi premici
- Definicija:
- perspektivna afiniteta je dvosmerna enoznačno določena preslikava med točkami dveh ravnin.

36

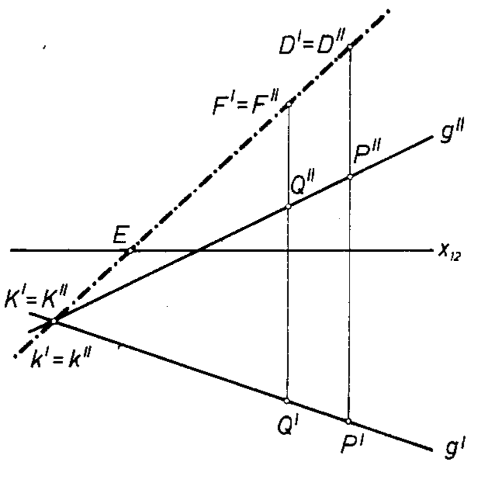
Afiniteta tlorisa in narisa



Teorem:

- **tloris in naris ravninskega lika sta perspektivno afina**
- **afinitetni žarki so prirednice**
- **afinitena os je premica koincidence ravnine, v kateri lik leži**

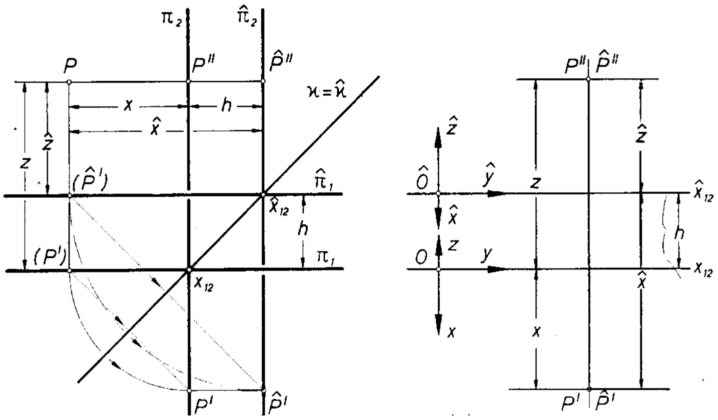
Posledice:



- ravnina je podana s točko in koincidenčno premico
- če podano to dvoje, za vsako drugo točko lahko narišemo iz npr. podanega tlorisa še naris tako, da upoštevmo, da:
  - afinitetni žarek je prirednica, ki je pravokotna na x12
  - premica PQ seka afiniteno os (koincidenčno premico)
  - obe projkeciji jo sekata v isti točki (ker je pač afinitetna os)
- velja: P D :P D = Q F :Q F = *značilno delilno razmerje* ravnine

97/10

Premik osi x_{12} pomeni:



- Če se x_{12} premakne za h navzgor, lega projekcij objekta pa se ne spremeni
  - premik tlorisne ravnine za za h navzgor
  - premik narisne ravnine za h nazaj

39

Dvočrtni postopek - konstruktivne naloge

- Položajne - medsebojna lega elementov
- Metrične - prava velikost elementov

40

97/10

Princip dualnosti

- Dve različni točki določata premico.
- Dve različni ravnini določata premico.

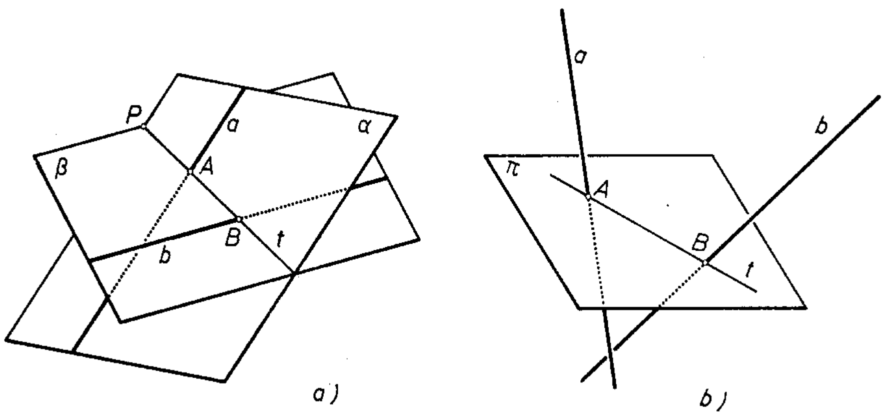
- Tri točke, ki ne ležijo na isti pemici, določajo ravnino.
- Tri ravnine, ki ne gredo skozi isto premico, določajo točko.

- Premica in ravnina imata eno skupno točko.
- Premica in točka imata eno skupno ravnino.

- Če imamo mimobežni premici a in b ter točko P, tedaj obstaja natanko ena premica t, ki ne seka a in b ter gre skozi P.
- Če imam mimobežni premici a in b ter ravnino Pi, ki ne poteha skozi ti dve premici, tedaj obstaja natanko enena premica t, ki seka a,b. Leži v ravnini Pi.

41

Ilustracija zadnjega pravila



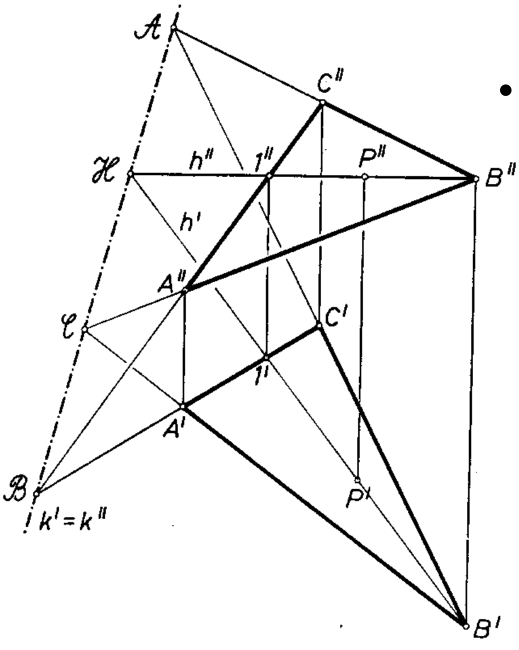
42

97/10

Princip dualnosti

- Položajni teorem, v katerem zamenjamo pojme točka in ravnina ter spajanje in sekanje, drugih pojmov pa ne menjamo, je spet pravilen položajni teorem.

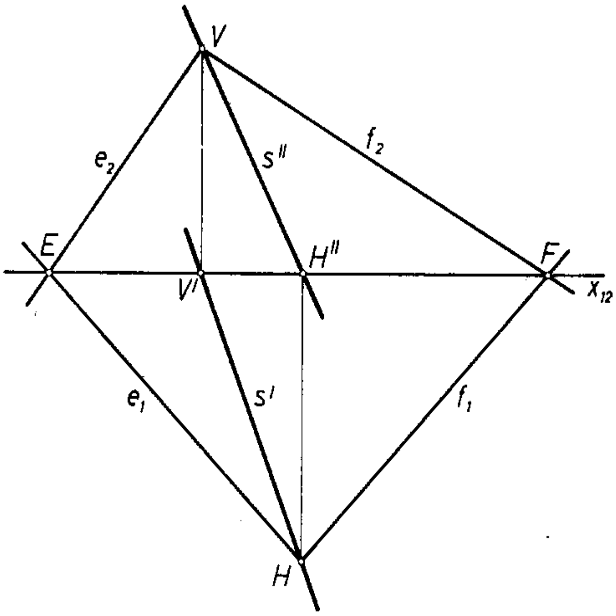
Ravnina, ki jo določajo tri točke



- Naloga: Podan je trikotnik ABC, ki leži v ravnini Pi in en ris ene točke v tej ravnini. Treba je poiskati drugi ris te točke
  - rešitev 1: Narišemo premico skozi P in neko ogljišče trikotnika
  - rešitev 2: Narišemo koincidenčno premico ravnine in skozi P položimo položimo premico skozi še neko znano točko

97/10

Presečnica dveh ravnin

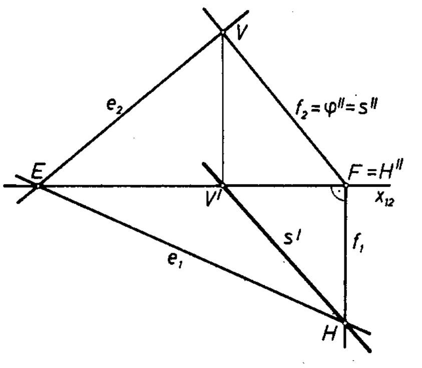


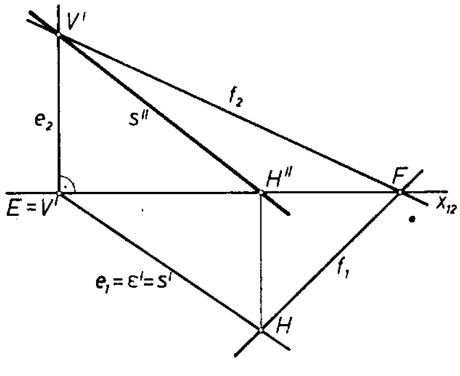
- Podani sta slednici dveh ravnin; iščemo v kateri premici se sekata
- premica poteka skozi točki V in H

45

Poseben primer

Ena od ravnin (φ) je projicirna ravnina:

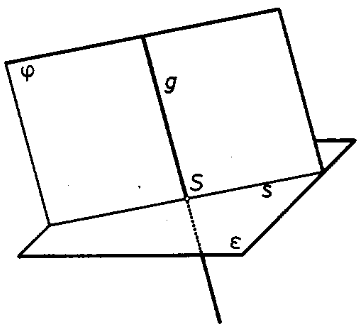


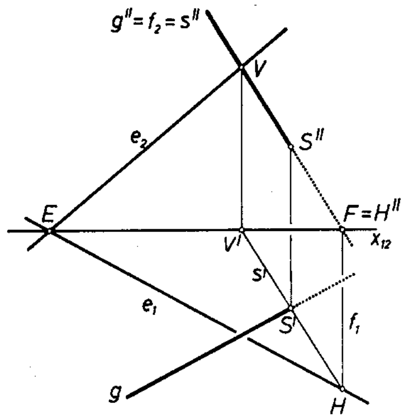


46

97/10

Prebodišče premice in ravnine

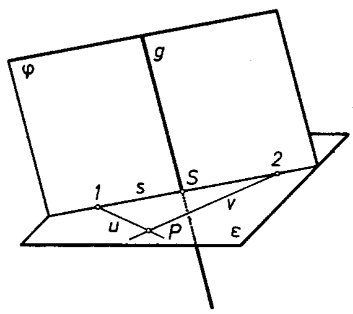


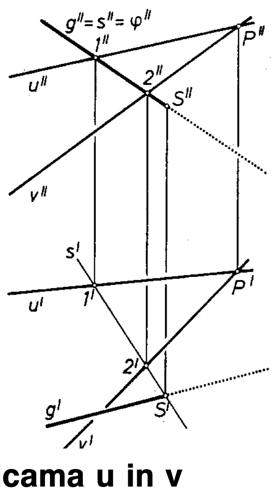


- Podana je ravnina E s slednicami in premica g ; poiskati je treba točko S, kjer premica prebada ravnino.
- Rešitev: skozi premico položimo poljubno ravnino F; poiščemo premico s, kjer se sekata ravnini; iskana točke je tam, kjer se sekata s in g. Naloga je lažja, če je F projicirna ravnina.

47

Prebodišče premice g in ravnine ...





- ... če je ravnina podana s premicama u in v
- skozi g položimo poljubno ravnino; ta ravnina seka premici u in v točkah 1 in 2, premica g pa jo prebada na zveznici teh dveh točk

48

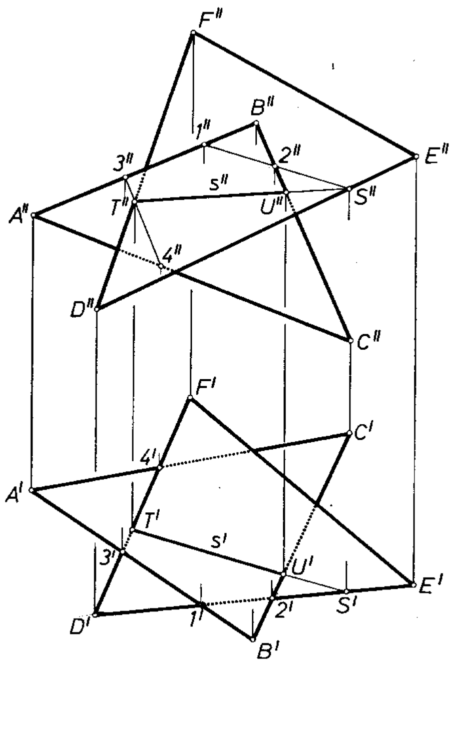
97/10

Presek dveh trikotnikov

- **Podana sta dva trikotnika; zanima nas daljica, v kateri se trikotnika prebadata.**
- **Rešitev: prevedemo na problem iskanja prebodišč ravnine (ki je podana z dvema premicama) in premice t.j. stranice enega trikotnika z ravnino drugega trikotnika. Če to naredimo za dve premici lahko določimo presečno premico ravnin, v katerih ležita trikotnika**
- **Postopek:**

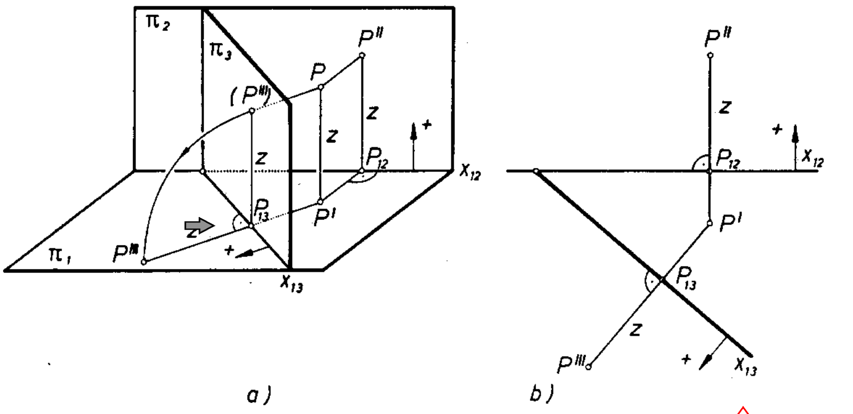
Presek dveh trikotnikov

- skozi DE položimo prvoprojicirno ravnino, ki seka AB in AC v točkah 1 in 2 .
- določimo lego 1 in 2
- določimo lego S in S , to je točka v kateri stranica DE seka ravnino ABC
- podobno ukrepamo še v zvezi s stranico DF in dobimo točko T.
- premica skozi ST je presečnica ravnin ABC in DEF
- prebod se zares zgodi samo v odseku, ki je znotraj obeh trikotnikov v obeh risih
- vidnost robov določamo glede na podatek v drugem risu.
- katera stran trikotnika se vidi?



97/10

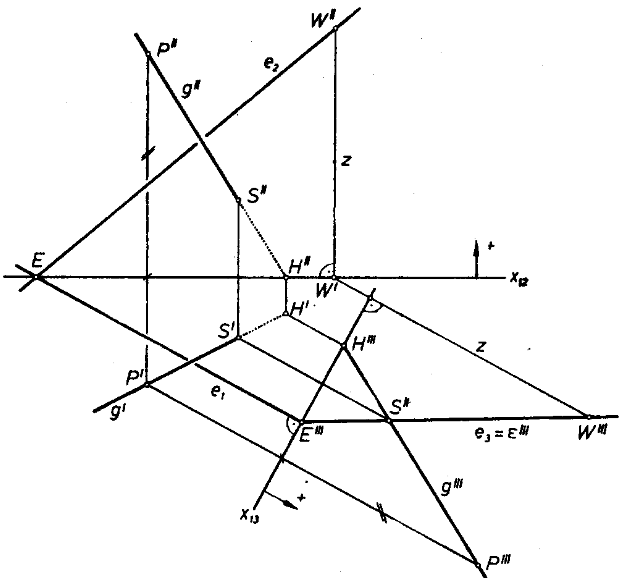
Stranski ris in bočni ris



kam zvrnemo novo ravnino

Pravili: P’ in P’’’ ležita na prirednici; višina Z se oh

Prebodišče premice in ravnine s pomočjo stranskega risa



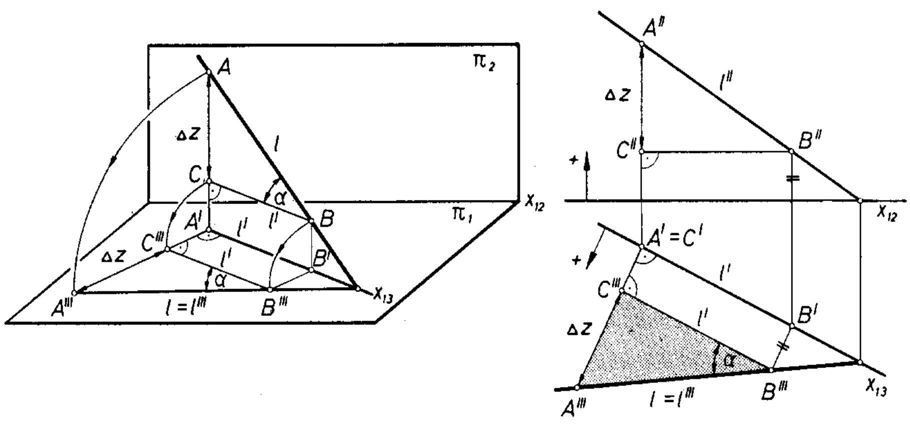
- izberemo ravnino Π_3, ki je pravokotna na Π_1 in na ε ...
- zatoje x_{13} pravokotna na e_1
- določimo W’’’, da dobimo slednico e_3 (e’’’ = e_3, ker smo tako izbrali Π_3).
- določimo H’’ -> H’ -> H’’’
- določimo P’’ -> P’ -> P’’’
- dobimo S’’’
- določimo še S’ in S’’

97/10

Dvočrtni postopek - konstruktivne naloge - metrične

53

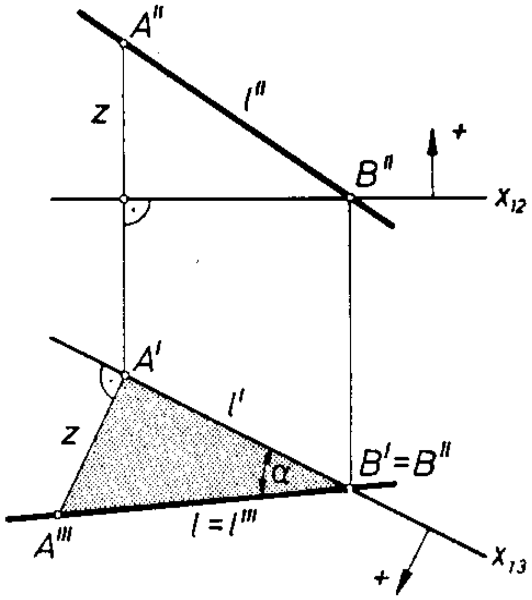
Prava dolžina daljice



54

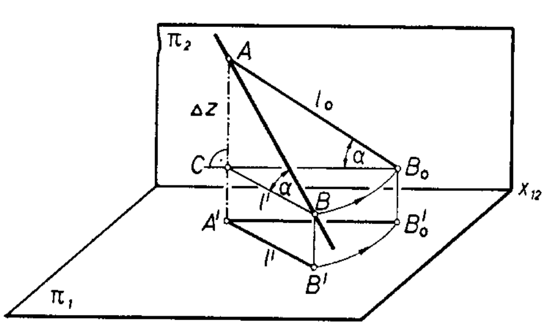
97/10

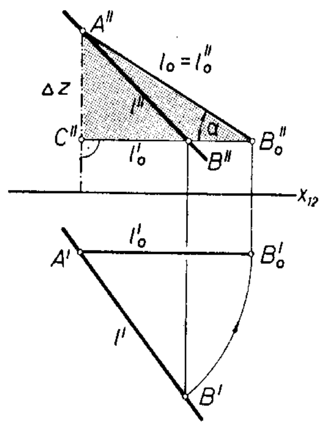
Spretnejša izbira položaja osi x_{12}



55

Prava dolžina z zvrnitvijo daljice

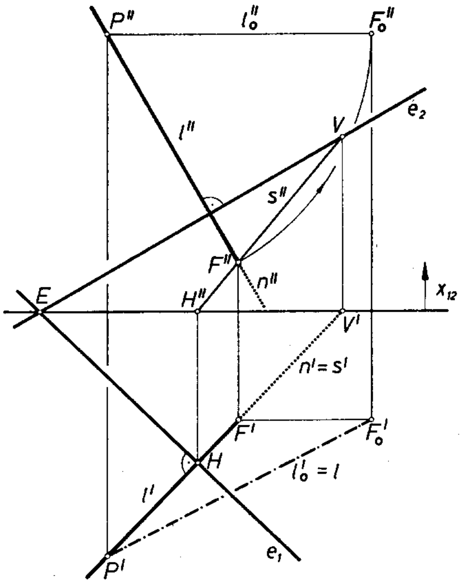




56

97/10

Oddaljenost točke P od ravnine e_1 e_2

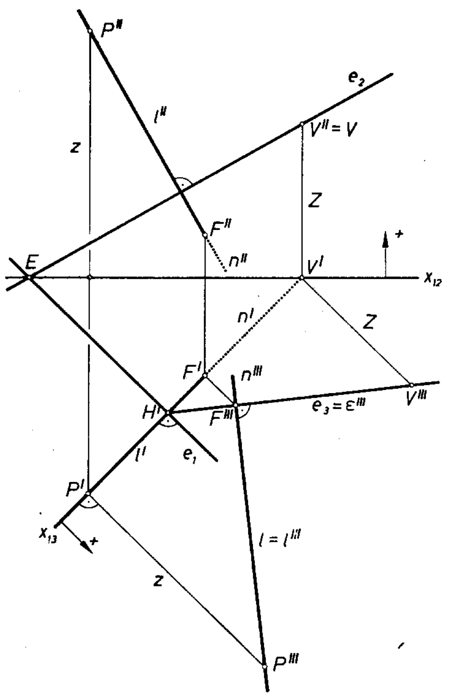


POSTOPEK:

- **normala na ravnino skozi P**
- **prebodišče normale in ravnine s pomočjo prvoproicirne ravnine**
- **prava dolžina daljice**

57

Oddaljenost točke od ravnine s pomočjo stranskega risa



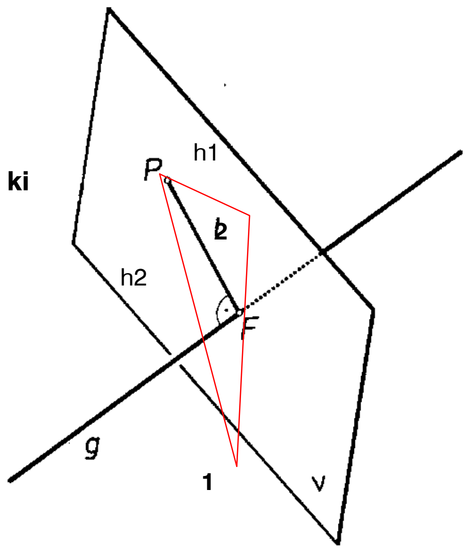
- **ravnino stranskega risa Π_3 položimo skozi normalo, pravokotno na Π_1**
- **slednica e_3 gre skozi H' in V''', ker je $e_3 == \varepsilon'''$, saj je Π_3 pravokotna na ε**
- **l je pravokotna na ε oz. e_3; kje leži določimo npr s pomočjo točke P**
- **dobimo F'''; -> F' -> F''**

58

97/10

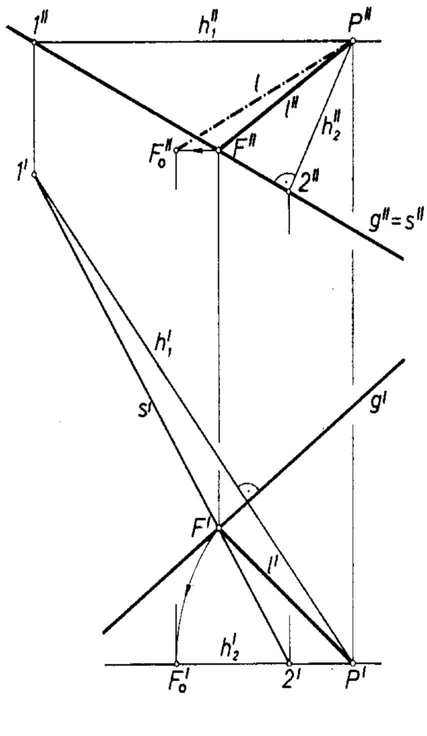
Oddaljenost točke P od premice g: z drugoprojicirno ravnino

1. skozi P položimo ravnino e, ki je pravokotna na g
2. določimo prebodišče P in e
3. določimo pravo dolžino



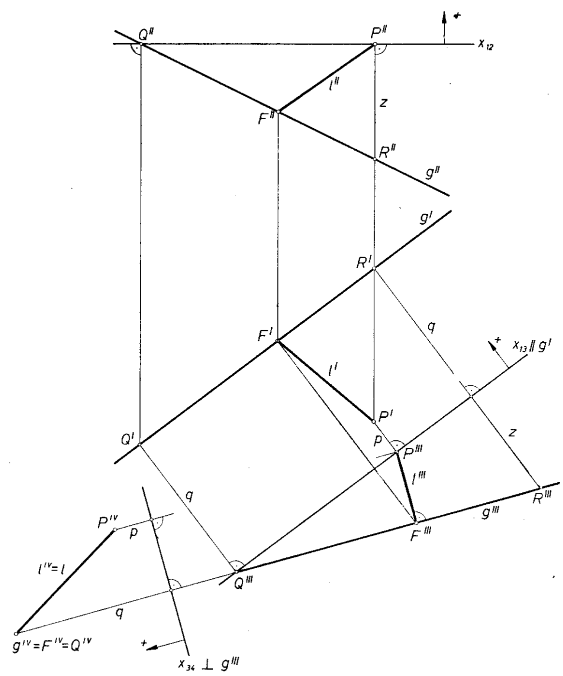
Oddaljenost med P in g

1. h_1' je prva soslednica, h1'' ...
2. h_2'' je druga soslednica ... h2'
3. h_1 in h_2 določata ravnino
4. skozi g'' položimo drugoprojicirno ravnino, ki seka h_1 in h_2 v točkah 1 in 2
5. premica s seka premico g v točki F
6. določimo pravo razdaljo PF



97/10

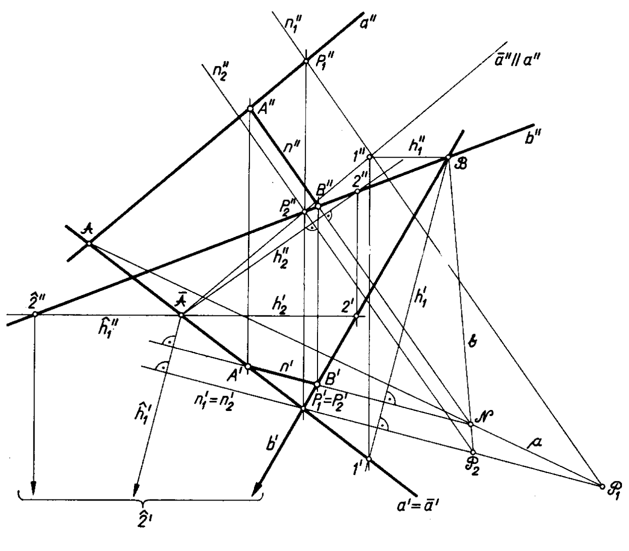
Oddaljenost točke P od premice g: dva stranska risa



- pogledamo tako, da se premica pokaže kot točka
- potrebna sta dva stranska risa

61

Najkrajša razdalja mimobežnic a in b



METODA 1: dva stranska risa postavimo tako, da ena od premic v točko

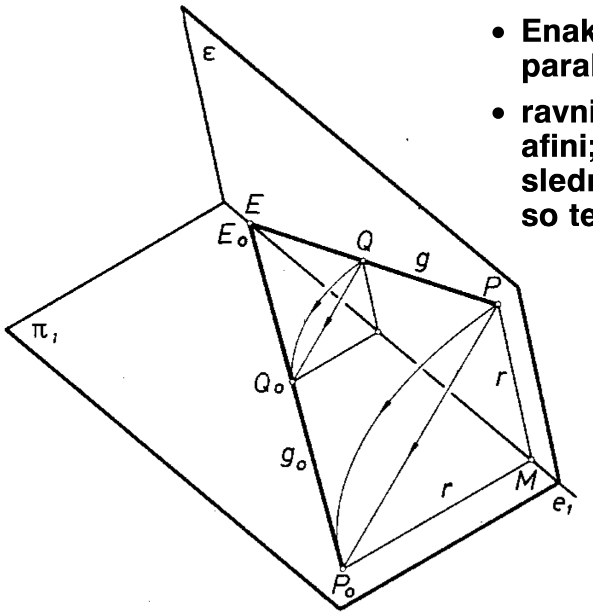
DIREKTNA METODA (na sliki):

- **skozi b postavimo ravnino, ki je vzporedna z a t.j. tako, da jo določata premici b in vzporednica a-ju, ki seka b**
- **glej Strubecker str. 79**

62

97/10

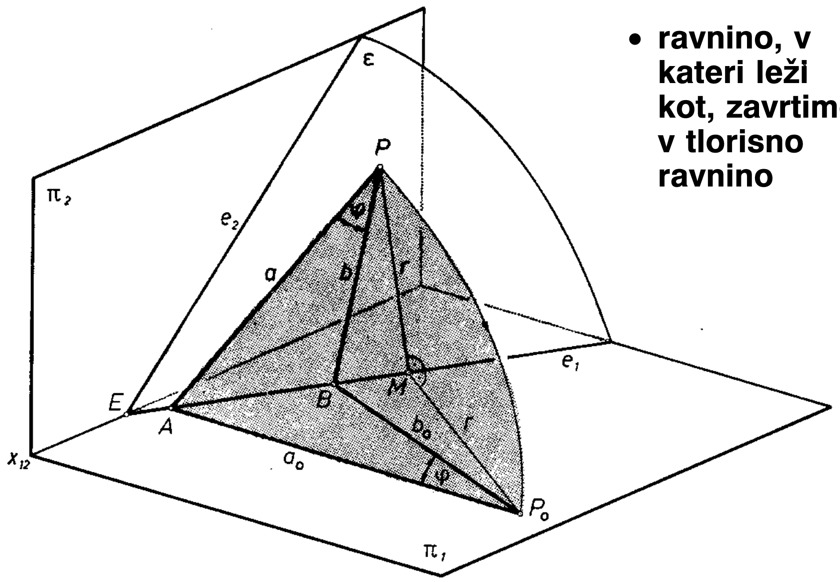
Prava velikost kota



- Enakost rotacije in paralelne projekcije;
- ravnini sta perspektivno afini; os afinosti je slednica; smer afinosti so tetive lokov

63

Konstrukcija z rotacijo ravnine kota v p_1

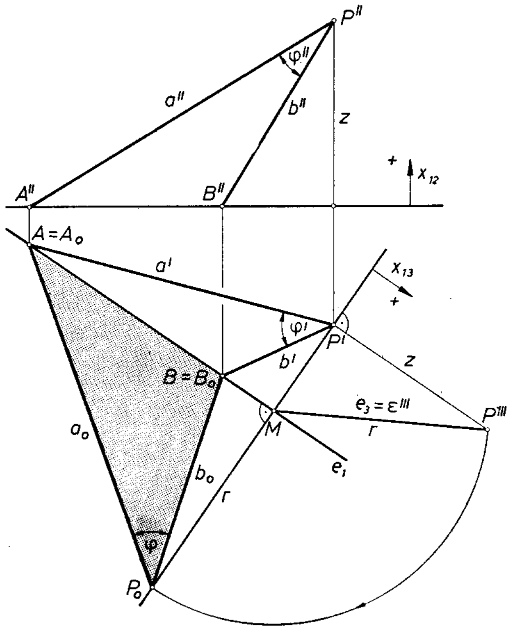


- ravnino, v kateri leži kot, zavrtimo v tlorisno ravnino

64

97/10

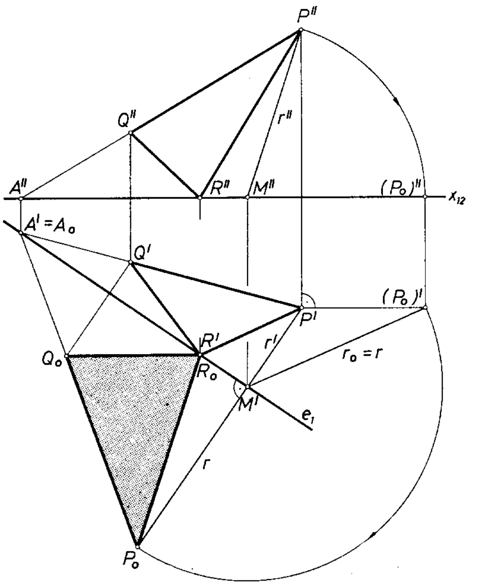
Konstrukcija prave velikosti kota med a in b



- os rotacije je e_1
- varianta: zvrnjeni trikotnik določimo z določitvijo prave dolžine AP
- na sliki: s pomočjo stranskega risa je določena prava višina v svoji ravninitočke P od Π_1

65

Prava velikost ravninskega lika



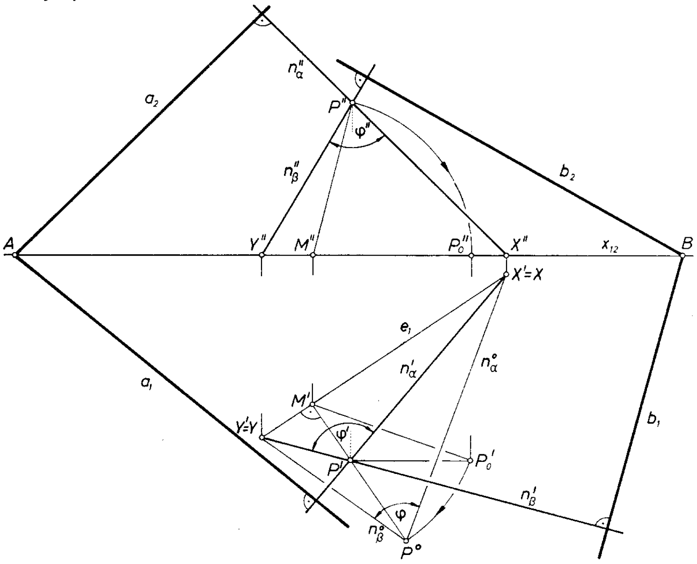
- okoli slednice e_1 ga zvrnemo ga v Π_1:
- s pomočjo stranskega risa je določena prava razdalja PM

66

97/10

Kot med ravninama

to je kot med premicama a in b,
ki ležita v ravnini a oz. b, se sekata v isti točki presečnice in sta nanjo pravokotni



- konstrukcija: poiskati je treba kot med dvema normalama na ravnino
- iz neke točke P spustimo obe normali (n_α in n_β) in dobimo tloris in naris iskanega kota
- pravo velikost z zvrnitvijo kota okrog e_1 v Π_1, tako da določimo pravo razdaljo med P' in M'

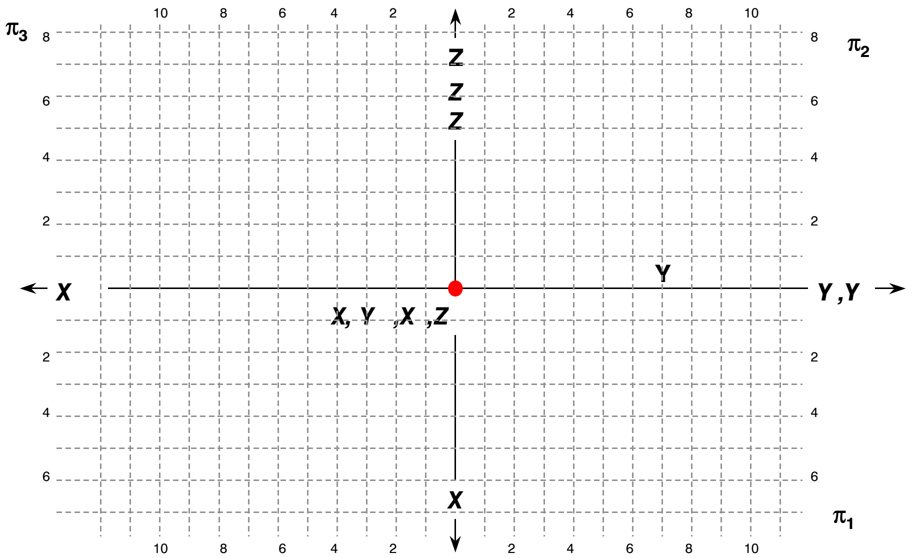
97/10

DVOČRTNI POSTOPEK
VAJE

Naloge označene z "VAJA" so obvezne in morajo biti vpete v mapi.

69

Koordinatni sistem



70

97/10

Projekcije in kvadranti

- **Nariši vse tri projekcije točk in ugotovi, v katerih kvadrantih se nahajajo.**
  - A(-3,-6,-5),
  - B(-4,-7,1),
  - C(3,2,7),
  - D(3,4,-2),
  - E(1,-2,-3),
  - F(-1,0,-1).

- **VAJA: Model projekcija točke**
  - izdelaj 3D model za projekcijo točke T(2,3,4)

Položaj točk glede na ravnine

- **V kakšnem položaju na ravnine $\pi 1$,$\pi 2$,$\pi 3$, σ, κ so točke**
  - A(0,-5,1),
  - B(3,1,0),
  - C(3,0,1),
  - D(-2,0,5),
  - E(0,-4,-3),
  - F(-2,-3,0),
  - G(3,0,-1),
  - H(0,2,-2),
  - I(-4,0,-5),
  - J(3,1,0),
  - K(5,-2,0),
  - L(0,4,4),
  - M(4,2,-4),
  - N(0,0,-5),
  - O(0,-3,0),
  - P(-2,0,0),
  - R(-2,-1,2),
  - Q(3,-3,3),
  - S(0,6,0),
  - T(-5,1,-5).

Simetrično ležeče točke

- **Podana je točka T(3,1,5); poišči točke, ki ležijo simetrično:**
  - **A na** π_1
  - **B na** π_2
  - **C na** π_3
  - **D na** x_{12}
  - **E na** x_{23}
  - **F na izhodišče O**
  - **G na ravnino** σ
  - **F na ravnino** κ

73

VAJA: Simetrično ležeče točke

- **Podana je točka T(2,-3,-5); poišči točke, ki ležijo simetrično:**
  - **A na** π_1
  - **B na** π_2
  - **C na** π_3
  - **D na** x_{12}
  - **E na** x_{23}
  - **F na izhodišče O**
  - **G na ravnino** σ
  - **F na ravnino** κ

74

97/10

Projekcije premic

- Nariši tlorise, narise in prebodišča V_x,H_x,S_x,K_x (x: a..c) z π_1,π_2,σ, κ naslednjih premic. Del premice v prvem kvadrantu izriši debeleje. Upoštevaj vidnost.
  - a((1,3,2),(5,1,1))
  - b((-1,1,-3),(2,2,2))
  - c((-2,2,-2),(3,4,-4))

75

Dve vaji ...

- VAJA: Model projekcije premice
  - izdelaj 3D model za projekcijo premice
- VAJA: Projekcije premic
  - Nariši tlorise, narise in prebodišča V_x,H_x,S_x,K_x (x=a..c) z π_1,π_2,σ,κ naslednjih premic. Del premice v prvem kvadrantu izriši debeleje. b in c nariši posebej in upoštevaj vidnost med njima.
  - a((-2,2,1),(1,-3,-1))
  - b((4,2,-5),(7,2,1))
  - c((2,-3,-4),(2,-1,2))

76

97/10

Daljica, lega premic

- **Podana je daljica AB((1,2,3)(5,6,0)). Poišči točki P in Q na tej premici za kateri velja:**
  - **P je od π_1 oddaljena za 2**
  - **Q je od π_2 oddaljena za 3**

- **V kakšnem položaju so podane premice glede na π_1,π_2, x_{12} ?**
  - **a((1,7,2),(5,2,2))**
  - **b((0,3,5),(6,3,1))**
  - **c((4,4,1),(4,1,5))**
  - **d((-3,5,1),(-3,5,4))**
  - **e((-1,-2,-3),(-1,3,3))**
  - **f((0,4,6),(5,4,6))**

77

Projekcije premic

- **Konstruiraj projekcije premic, ki so podane s svojimi prebodišči:**
  - **Ha(4,4,0),Va(7,0,6)**
  - **Hb(7,3,0),Vb(9,0,-1)**
  - **Hc(1,-2,0),Vc(6,0,5)**
  - **Hd(3,-3,0),Vd(-1,0,-4)**

- **Premica v κ in σ**
  - **Podan je tloris premice, ki poteka skozi točki AB (A'(4,3,-),B'(1,5,-)). Konstruiraj naris za primer, če leži premica v ravnini koincidence in če leži v ravnini simetrije.**

78

VAJA: Lega premice

- ZGORAJ: Podan je naris premice, ki poteka skozi točki AB (A”(-,2,1),B”(-,6,4)). Konstruiraj tloris za primer, če leži premica (k) v ravnini koincidence in če leži premica (s) v ravnini simetrije.
- SPODAJ: Podan je naris premice, ki poteka skozi točki AB (A”(-,2,1),B”(-,6,4) in skozi točko P(2,3,1). Konstruiraj tloris s’, ki je vzporeden ravnini simetrije in k , ki je vzporedna ravnini koincidence.

79

VAJA: Premica seka premico

- ZGORAJ: Skozi točko T(3,4,1) konstruiraj premico, ki seka premico a(-3,-2,-4),(5,2,-4) in je vzporedna s koicidenčno ravnino.
- SPODAJ: Skozi točko T(1,2,5) konstruiraj premico, ki seka premico a(3,-3,-5),(-1,4,4) in je vzporedna s simetrijsko ravnino.

80

Vzporednice

- Določi prebodišča premic a,b,c in d s tlorisno in narisno ravnino, če premice potekajo skozi točko T in so vzporedne s premico p=AB:
  - a. T(2,7,3), A(-1,-2,-2), B(4,6,0).
  - b. T(2,2,3.5), A(1,-3,-4), B(-3,6,-1).
  - c. T(2.5,2,3),A(1,1,2), B(-4,3,2).
  - d. T(2,4,2), A(1,3,2), B(1,1,4).

81

Sečnice

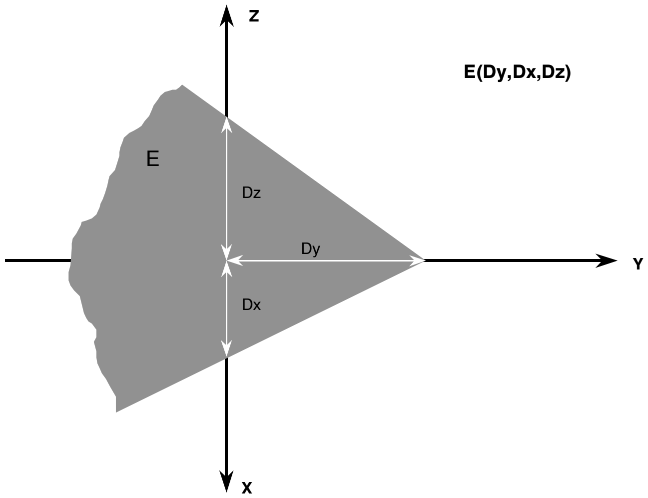
- Podana je premica p=AB(1,-2,5)(4.5,4.5,1) in tloris premice q=CD(4,-1,-)(2,4,3). Določi naris premice q, če se p in q sekata.
- Podana je premica p=AB(1,0,3.5)(6,3,2.5) in naris premice q=CD(3,1,1.5)(7,-,4.5). Določi tloris premice q, če se p in q sekata.
- Skozi točko T(2,-,-) konstruiraj premico, ki seka premico p=AB(1,-3,5)(2,4,1) in je pravokotna na ravnino:
  - $\pi 1$
  - $\pi 2$
  - $\pi 3$

82

97/10

Definicija ravnine

- **Ravnina je podana s slednicama, te pa s odseki, ki jih odrežejo od osi koordinatnega sistema:**



83

VAJA: Model projekcije ravnine

- **Izdelaj 3D model projekcije ravnine**

84

97/10

Osnovne naloge z ravninami

- Podana je ravnina S(-6,4,3). Nariši:
  - prvo soslednico a, ki je od π_1 oddaljena za d=2
  - drugo soslednico, ki je od π_2 oddaljena za d=5
- V podani ravnini P leži premica p, za katero poznamo eno projekcijo. Nariši manjkajočo projekcijo premice
  - P(-3,3,2), p(2,-2,-)(1,1,-).
  - P(-3,3,3), p(-,-2,1)(-,1,-4).
  - P(∞,4,5),p(2,1,-)(-1,4,-).
  - P(-6,4,∞),p(-,-2,1)(-,0,4).
- V podani ravnini P leži točka T v zvezi s katero je podana ena prjekcija; določi druge projekcije te točke.
  - P(-3,2,3), T(2,1,-).
  - P(2,1,-4), T(4,-,2).
  - P(1,-1, ∞), T(-,2,2).
  - P(3,∞,3),T(−1,–,−2).

85

VAJA: Trikotnik v ravnini

- Podana je ravnina P(-1,-2,1). Nariši tloris in naris trikotnika, ki leži v P če so ogljišča:
  - A(3,-1,-), B(2,3,-), C(-2,2,-).
  - A(-,1,1), B(-,5,1), C(-,3,6).

86

97/10

Projicirne ravnine, ravnina skozi točke

- **Skozi premico p(.5,-.5,2.5)(1.5,1.5,1) položi:**
  - prvoprojicirno ravnino
  - drugoprojicirno ravnino
- **Ravnina je podana s točkami A,B,C. Konstruiraj slednice.**
  - A(1,-3,1), B(4,3,4), C(5,0,6).
  - A(2,4,1), B(5,4,3), C(8,3.5,5).
- **Določi naris premice p. Ravnina S je podana s premicama a in b, ki se sekata. a=AB(3,0,2)(1,5,5), b=AC;C=1,5,1). Brez uporabe slednic konstruiraj naris premice p, ki leži v tej ravnini in ima tloris p (1,-1,0)(4,2,0).**

87

VAJA: Konstruiraj slednice ravnine

- **ZGORAJ: Ravnina je podana s premicama a=AS in b=BS; konstruiraj slednice te ravnine**
  - S(4,-1,5), A(1,-4,4), B(2,0,3).
  - *S(2,0,3), A(1,3,6), B(7,2,1).*
- **SPODAJ: Ravnina je podana z odseki S poteka skozi točko T:**
  - T(3,1,3), S(2,2,-).
  - *T(-2,0,-2), S(-2.-.-1).*

88

97/10

Vaji z ravninami

- **VAJA: Ravnina podana s padnico**
  - Zgoraj: konstruiraj slednice ravnine, ki ji je premica p(4,-4,-2)(-1,3,6) prva padnica.
  - Spodaj: konstruiraj slednice ravnine, ki ji je premica p(2,-2,2)(-5,5,-1) druga padnica.
- **VAJA: Stranski ris paralelograma**
  - Določi stranski ris paralelograma ABCD - A(4,1,3), B(1,2,2.5), C(3,2,4.5) - na ravnini Π_3 (2,∞,4).
- **VAJA: Rotacija**
  - Točko A(3,2,4) zavrti okrog osi x12 za 30 stopinj v tisto smer, da se čim bolj približa ravnini Π_1

Premica in ravnina

- **VAJA: Prebodišče premice in ravnine**
  - Določi prebodišče P premice p=PQ, P(1, -1.5, 1), Q(4.5,2,3) z ravnino v kateri leži trikotnik ABC - A(3, -3.5, 2), B(4, 3.5, 1), C(1,1,5).
  - Na sliki upoštevaj vidnost.
- **VAJA: Ravnina vzporedna ravnini**
  - Skozi točko P (3,1,1) položi ravnino, ki je vzporedna ravnini, ki jo določata točka T(2,1,5) in premica a=AB A(-3.5, -4, -1), B(-1, 2, -7).
  - nariši slednici ravnine

VAJA: Premica vzporedna ravnini

- **Nariši projekcijo premice, ki leži v ravnini P(-2,-6,2), gre skozi njeno točko A(2,1,-) in je vzporedna z ravnino Σ (9,6,7).**
- **Navodilo: skozi A položi ravnino, ki je vzporedna z Σ (premisli o prebadanju ravnine Σ s premico, ki gre skozi A in je vzporedna z x_{12}**
- **Iskana premica je presečnica teh dveh ravnin**

91

VAJA: Pravokotne projekcije

- **Konstruiraj pravokotne projekcije premice p=AB A(5,4,5), B(4,5,8) in sicer:**
- **s na ravnino simetrije**
- **k na ravnino koincidence (ZGORAJ)**
- **l na ravnino Σ (3,4,-2) (SPODAJ)**
- **NAVODILO:**
  - **s in k**
    - » ena točka je prebodišče, drugo si oglej v stranskem risu
  - **l:**
    - » ena točka je prebodišče, skozi drugo povleci normalo na ravnino

92

97/10

Metrične vaje

- **VAJA: Prava dolžina daljice**
  - **Poišči pravo dolžino daljice AB A(1,1,-1), B(-2,4,2) z rotacijo okrog osi x_{12}, dokler AB ne pade v Π_2**
  - **GLEJ DP3-6**
- **VAJA: Razdalja točka - premica**
  - **Določi razdaljo l med točko T (3,1,2) in prvo slednico ravnine P(-2,-1,4) ...**
  - **ZGORAJ z uporabo stranskega risa,**
  - **SPODAJ s pravokotnico na slednico skozi P**

93

VAJA: Razdalja med ravninama

- **Podana je ravnina P (-1,-1, 3).**
- **Določi slednice ravnine R, ki za 5 nad P.**

- **NAVODILO:**
  - **pravokotnico na P v iz neke točke M**
  - **prebodišče je N**
  - **odmeri razdaljo med PN**
  - **določi lego točke R na tej pravokotnici, ki bo oddaljena za 5**
  - **...**
- **DRUGA MOŽNOST:**
  - **stranski ris, da se P pokrije s slednico**

94

97/10

Velikost kota

- VAJA: Prava velikost kota
  - Določi pravo velikost kota α, ki ga oklepata ravnina P(2,5,-2) in os x12.
  - NAVODILO: zvrni normalo v Π_1 ali Π_2
- VAJA: Kot med ravninama
  - Določi kot α med ravnina S (-3,3,2) in P(2,2,-5).
  - NAVODILO: DP3-8 zgoraj

95

VAJA: Daljica v ravnini

- Podani sta vzporednici p=AB in q=CD ter točka T, ki leži v ravnini, ki jo določata.
- Skozi T povleci daljici a in b, ki sekata p in q in sta med p in q dolgi 7 enot.
- A(5,-3,1)
- B(7,4,3)
- C(1,-3,4)
- D(-,-,-)
- T(4,1,-)

- NAVODILO:
  - zvrni ravnino okrog njene slednice v npr. Π_1 (glej DP3-6) in reši nalogo v zvrnjeni legi
  - prenesi rešitev v tloris in naris

96

97/10

VAJA: Razdalja med premicama

- Poišči najkrajšo razdaljo med premicama a=AB in c=CD
- A(2,1.5,3)
- B(2,5,3)
- C(1,3,1)
- D(4,7,-2.5)

- NAVODILO:
  - DP3-5

97

VAJA: Presek dveh krogel in ravnine

- Poišči točki, ki so od točk A in B oddaljene za 6 in ležijo v ravnini P1
- A(2,2,3)
- B(3,5,2)

- NAVODILO:
  - točke ležijo v preseku dveh krogel, ki je krožnica, ki leži v ravnini, ki ji je AB normala in ki gre skozi točko C, ki je razpolavlja daljico A in B.
  - iskana točka leži na prvi slednici te ravnine
  - zvrni A okrog te slednice v P1 in nariši krog ...

98

97/10