Zapiski iz matematike

doc. dr. Damjan Škulj, Fakulteta za družbene vede

22. november 2011

1 Osnove logike

1.1 Uvod v logiko

Logika je veda, ki proučuje načela pravilnega mišljenja. Proučuje tiste oblike mišljenja, ki nas od znanih dejstev vodijo do novih spoznanj. Tem miselnim procesom pravimo *sklepanje.* Pri pravilnem sklepanju mora vsak korak nedvoumno in objektivno slediti iz prejšnjih.

V matematiki skušamo logične argumente formalizirati v obliki formalnih izjav. Za te skušamo ugotoviti pod katerimi pogoji so pravilne in katere posledice iz njih nedvoumno sledijo. Za začetek si bomo torej ogledali jezik in osnovna pravila formalne logike. Definirali bomo pojem *(formalne) izjave* in osnovne načine za sestavljanje izjav v nove izjava, ki jih omogočajo *izjavne povezave.* Ugotavljanje, pod katerimi pogoji je neke izjava pravilna, je mogoče s *pravilnostnimi tabelami* in *pravili o enakovrednih izjavah.* Na koncu si bomo ogledali osnovne postopke *dokazovanja* v matematiki in uporabe *kvantifikatorjev* pri tvorjenju izjav.

1.2 Izjave

Osnovni gradnik sklepanja so *izjave.* Za izjavo štejemo vsako trditev, za katero je mogoče vsaj načeloma ugotoviti njeno pravilnost. Za vse trditve, ki imajo enak pomen, bomo šteli, da predstavljajo isto izjavo.

Primer 1.1. Primeri izjav:

- Štiri je sodo število.
- Kit je riba.
- Na Zemlji živi 7 milijard ljudi.

Prva izjava je pravilna, druga je nepravilna, o pravilnosti tretje pa ne moremo vedeti z gotovostjo, vendar je zagotovo pravilna ali nepravilna.

Izjave označujemo z velikimi tiskanimi črkami: $A, B, C_1, X, \ldots$. Vsaka izjava v matematični logiki je lahko *pravilna* (p) ali *napačna* (n). Izjave delimo še na:

enostavne izjave so tiste, ki jih ne moremo razčleniti na bolj enostavne;

sestavljene izjave so zgrajene iz enostavnih s pomočjo *izjavnih povezav.*

Primer 1.2. V sestavljeni izjavi 'Če sije sonce, je toplo.' sta enostavni izjavi 'Sije sonce.' in 'Toplo je.'

V logiki ugotavljamo, kako je s pravilnostjo sestavljenih izjav v odvisnosti od pravilnosti enostavnih izjav, iz katerih je sestavljena.

1.3 Izjavne povezave

Sestavljene izjave so zgrajene iz enostavnih izjav s pomočjo ene ali več *izjavnih povezav.* Osnovne izjavne povezave so *negacija*, s katero izjavo zanikamo; *konjunkcija*, ki označuje, da veljata dve izjavi hkrati in *disjunkcija*, ki označuje, da velja vsaj ena od navedenih izjav.

Negacija izjave A je izjava, ki jo zapišemo $\neg A$ in pomeni izjavo '**ni res**, da velja A' ali na kratko, '**ne** A'. Negacija pravilne izjave je vselej nepravilna in obratno.

Primer 1.3. Če je izjava A: 'Danes je nedelja.', je izjava $\neg A$: 'Danes ni nedelja.'

Konjunkcija je izjavna povezava, ki dvema izjavama A in B priredi novo izjavo $A \wedge B$, ki pomeni 'A **in hkrati** B' ali 'A **in** B'. Konjunkcija izjav je pravilna natanko takrat, ko sta pravilni obe izjavi.

Primer 1.4. Izjava 'Kit je riba in štiri je sodo število.' je konjunkcija izjav.

Disjunkcija izjav A in B je izjava, ki jo zapišemo $A \vee B$ in pomeni 'A **ali** B'. (To pomeni, da velja izjava A ali izjava B ali pa obe hkrati.) Disjunkcija izjav je pravilna natanko takrat, ko je pravilna vsaj ena od izjav.

Primer 1.5. Izjava 'Danes je sreda ali pa sije sonce.' je disjunkcija izjav.

Podobno kot pri računskih operacijah s števili moramo tudi pri izjavnih povezavah upoštevati vrstni red. Velja, da najmočneje veže negacija, nato konjunkcija in nato disjunkcija. Če želimo spremeniti vrstni red, kot ponavadi uporabimo oklepaje.

Primer 1.6. Izjava $\neg A \vee B$ je enaka izjavi $(\neg A) \vee B$ in je različna od izjave $\neg(A \vee B)$.

1.4 Pravilnostne tabele

Kako je pravilnost sestavljene izjave odvisna od pravilnosti enostavnih izjav, ki jo sestavljajo lahko prikažemo s *pravilnostno tabelo.* To sestavljata:

- Nabor vseh možnih vrednosti enostavnih izjav, ki sestavljajo sestavljeno izjavo – *določila izjave.* Tak nabor imenujemo *prostor izjave.* Sestavlja ga 2^n določil.
- Pravilnosti sestavljene izjave pri posameznih določilih. Določila, pri katerih je izjava pravilna, sestavljajo *prostor pravilnosti* izjave.

Zapišimo najprej pravilnostne tabele za sestavljene izjave, ki vsebujejo eno od naštetih izjavnih povezav. Izjavna povezava negacija deluje na eni izjavi, zato njen prostor sestavljata le dve vrednosti.

A	$\neg A$
p	n
n	p

Pri konjunkciji in disjunkciji, ki povezujeta dve enostavni izjavi pa vsebuje prostor izjave štiri določila.

A	B	$A \wedge B$
p	p	p
p	n	n
n	p	n
n	n	n

A	B	$A \vee B$
p	p	p
p	n	p
n	p	p
n	n	n

Pri konstrukciji pravilnostnih tabel za daljše sestavljene izjave upoštevamo pravila o vrstnem redu izjavnih povezav. Za vsako izjavno povezavo dodamo nov stolpec v tabelo.

Primer 1.7. Dana je izjava $A \vee B \wedge \neg C$. Njena pravilnostna tabela je

A	B	C	$\neg C$	$B \wedge \neg C$	$A \vee B \wedge \neg C$
p	p	p	n	n	p
p	p	n	p	p	p
p	n	p	n	n	p
p	n	n	p	n	p
n	p	p	n	n	n
n	p	n	p	p	p
n	n	p	n	n	n
n	n	n	p	n	n

1.5 Vrste izjav

Nekatere izjave so pravilne pri vseh določilih, oziroma je njihov prostor pravilnosti ves prostor izjave. Take izjave imenujemo *tavtologije* ali *logično pravilne izjave.* Izjavo, ki pa je pri vseh določilih napačna, oziroma katere prostor pravilnosti je prazen, imenujemo *protislovje* ali *logično nepravilna izjava.* Izjave, ki so pri nekaterih določilih pravilne, pri drugih pa ne, imenujemo *faktične izjave.*

Primer 1.8. Izjava $A \vee \neg A$ je tavtologija, v kar se zlahka prepričamo s pravilnostno tabelo; podobno tudi, da je izjava $A \wedge \neg A$ protislovje.

1.6 Enakovredne izjave

Sestavljeni izjavi X in Y sta *enakovredni* ali *logično ekvivalentni,* kadar imata obe isti prostor pravilnosti. Tedaj zapišemo $X \sim Y$.

Primer 1.9. S pomočjo pravilnostne tabele se zlahka prepričamo, da sta izjavi $\neg(A \vee B)$ in $\neg A \wedge \neg B$ enakovredni.

Enakovredne izjave v logiki štejemo kot enake. Posebej velja:

- Vse logično pravilne izjave so enakovredne. Zato uvedemo posebno logično pravilno pravilno izjavo P in jo imenujemo kar *logično pravilna izjava.*
- Vse logično nepravilne izjave so enakovredne. Z N označimo *logično nepravilno izjavo.*

Ali sta dani izjavi enakovredni lahko s pomočjo pravilnostne tabele.

Primer 1.10. Iz pravilnostne tabele lahko ugotovimo, da sta izjavi $\neg(A \wedge \neg B)$ in $\neg A \vee B$ enakovredni:

A	B	$\neg B$	$\neg A$	$A \wedge \neg B$	$\neg(A \wedge \neg B)$	$\neg A \vee B$
p	p	n	n	n	p	p
p	n	p	n	p	n	n
n	p	n	p	n	p	p
n	n	p	p	n	p	p

Osnovni primeri enakovrednih izjav so podani v tabeli 1. Vse enakovredne izjave iz tabele so veljavne, če katerokoli enostavno izjavo nadomestimo s poljubno sestavljeno izjavo.

Tabela 1: Algebra izjavnih povezav

Idempotentnost	$A \wedge A \sim A$	$A \vee A \sim A$
Komutativnost	$A \wedge B \sim B \wedge A$	$A \vee B \sim B \vee A$
Asociativnost	$(A \wedge B) \wedge C$ $\sim A \wedge (B \wedge C)$	$(A \vee B) \vee C$ $\sim A \vee (B \vee C)$
Distributivnost	$A \wedge (B \vee C)$ $\sim (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	$A \vee (B \wedge C)$ $\sim (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
DeMorganov zakon	$\neg(A \wedge B) \sim \neg A \vee \neg B$	$\neg(A \vee B) \sim \neg A \wedge \neg B$
Dvojna negacija	$\neg\neg A \sim A$	
	$A \vee N \sim A$ $A \vee P \sim P$	$A \wedge N \sim N$ $A \wedge P \sim A$
	$A \vee \neg A \sim P$ $\neg P \sim N$	$A \wedge \neg A \sim N$ $\neg N \sim P$

1.7 Implikacija in ekvivalenca

V logiki imajo pomembno vlogo sestavljene izjave oblike 'Če A, potem B'. Take izjave imenujemo *pogojne* in jih zapišemo z izjavno povezavo $A \Rightarrow B$, ki jo imenujemo *implikacija*.

Implikacijo $A \Rightarrow B$ v pogovornem jeziku izrazimo na različne načine, kot na primer:

- iz A sledi B;
- če (velja) A, potem (velja) B;
- A (velja), samo če (velja) B;
- B (velja), če (velja) A.

Implikacija ima naslednjo pravilnostno tabelo:

A	B	$A \Rightarrow B$
p	p	p
p	n	n
n	p	p
n	n	p

Implikacija je torej pravilna vselej razen v primeru, ko je prva izjava pravilna in druga nepravilna.

Druga pomembna oblika pogojnih izjav je izjava oblike 'Izjava A velja, če in samo če velja izjava B.' Tako izjavo formalno zapišemo z izjavno povezavo *ekvivalenca* $A \Leftrightarrow B$ in jo preberemo kot

- A (velja) natanko tedaj, ko (velja) B;
- A (velja), če in samo če (velja) B.

Ekvivalenca je pravilna natanko tedaj, ko sta bodisi obe izjavi pravilni, bodisi obe napačni. Pravilnostna tabela za ekvivalenco je

A	B	$A \Leftrightarrow B$
p	p	p
p	n	n
n	p	n
n	n	p

Za implikacijo velja, da veže šibkeje kot negacija, konjunkcija in disjunkcija ter močneje od ekvivalence.

1.8 Izbrana oblika

S pomočjo pravilnostne tabele se lahko hitro prepričamo, da je mogoče implikacijo in ekvivalenco zapisati le z uporabo izjavnih povezav $\neg, \wedge$ in $\vee$:

$$\begin{aligned} A \Rightarrow B &\sim \neg A \vee B && (1)\\ A \Leftrightarrow B &\sim (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) && (2)\\ &\sim (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B) && (3) \end{aligned}$$

Izjava je v *izbrani obliki*, če:

- je zapisana le z operacijami $\neg, \wedge$ in $\vee$;
- znak $\neg$ stoji le neposredno pred enostavnimi izjavami.

Vsako sestavljeno izjavo lahko zapišemo v izbrani obliki, če upoštevamo pravila o enakovrednih izjavah v tabeli 1 in enakovredni zapis implikacije in ekvivalence (1)-(3).

Primer 1.11. Zapišimo izjavo $\neg(A \Rightarrow B)$ v izbrani obliki.

1. Ker ima implikacija zaradi oklepaja prednost pred negacijo, jo nadomestimo z enakovredno izbrano obliko (1): $\neg(A{\Rightarrow}B) \sim \neg(\neg A \vee B)$.
2. Negacijo, ki deluje na sestavljeni izjavi, preoblikujemo po deMorganovem zakonu: $\neg(\neg A \vee B) \sim \neg\neg A \wedge \neg B \sim A \wedge \neg B$, pri čemer smo upoštevali še pravilo o dvojni negaciji.

1.9 Logična implikacija in logična ekvivalenca

V logiki ima implikacija poseben pomen, saj predstavlja osnovo pravilnega sklepanja. Sklep, zapisan v obliki implikacije, je pravilen le, če je implikacija pravilna izjava. Pravilni implikaciji pravimo *logična implikacija*. V implikaciji $A \Rightarrow B$ imenujemo izjavo A *antecedens (predpostavka)* in izjavo B *konsekvens* *(posledica)*. V logični implikaciji $A \Rightarrow B$ pravimo, da je konsekvens *logična posledica* izjave antecedensa oziroma, da antecedens *logično implicira* konsekvens. Pravilnost antecedensa v logični implikaciji zagotavlja pravilnost konsekvensa. Pravimo tudi, da je tedaj antecedens *zadostni pogoj* za konsekvens, konsekvens pa je *potreben pogoj* za antecedens.

Primer 1.12. Vzemimo izjavo 'Vsi sesalci so toplokrvni.' Izjava je implikacija $A \Rightarrow B$, pri čemer je A izjava 'Žival je sesalec.' in B izjava 'Žival je toplokrvna.'

Če vemo, da je žival sesalec, je to dovolj, da lahko sklepamo, da je tudi toplokrvna. Pogoj, da je žival sesalec je torej zadosten, da lahko sklepamo, da je tudi toplokrvna. Po drugi strani pa žival mora biti toplokrvna, da bi lahko bila sesalec. Pogoj toplokrvnosti je torej potreben pogoj, da je žival sesalec. Obratno seveda ne velja, saj so na primer ptiči toplokrvni, a niso sesalci.

Če je antecedens nepravilen, je lahko logična implikacija izpolnjena *na prazno*.

Primer 1.13. Implikacija 'Če je Pariz v Italiji, je Moskva na Češkem.' je pravilna, kakor tudi implikacija 'Če je Pariz v Italiji, je Moskva v Rusiji.'

Če je torej antecedens nepravilen, je konsekvens lahko pravilen ali pa ne, pa bo implikacija vseeno pravilna.

Če je ekvivalenca $A \Leftrightarrow B$ logično pravilna izjava, gre za *logično ekvivalenco*. Izjava A je tedaj potreben in zadosten pogoj za B.

Primer 1.14. Za naravna števila velja trditev: 'Število n je sodo natanko tedaj, ko je število n^2 sodo.' Izjava 'Število n je sodo.' je torej potreben in zadosten pogoj za izjavo 'Število n^2 je sodo.'

1.10 Sklepanje

Veljavno sklepanje je eno od najpomembnejših vprašanj logike. Natančneje, ugotoviti želimo, kdaj iz danih *predpostavk* $P_1, \ldots, P_n$ logično sledi *zaključek* Z. V tem primeru zapišemo

$$P_1, \ldots, P_n \vDash Z.$$

Definicija 1.1. Sklep $P_1, \ldots, P_n \vDash Z$ je pravilen, če je zaključek Z pravilen vedno, ko so pravilne vse predpostavke $P_1, \ldots, P_n$.

Nepravilen logični sklep je *logična napaka*.

Primer 1.15.

1. Logični sklep $A, A \Rightarrow B \vDash B$ je pravilen, v kar se lahko prepričamo s pomočjo pravilnostne tabele.
2. Sklep $A \Rightarrow B, B \vDash A$ pa je logična napaka, saj sta v primeru, ko je B pravilna in A napačna izjava, predpostavki $A \Rightarrow B$ in B pravilni, zaključek A pa je napačen.

Če velja pravilen sklep $\vDash A$, je izjava A pravilna brezpogojno, kar pomeni, da je A logično pravilna izjava.

Izrek 1.1. *Sklep $P_1, \ldots, P_n \vDash Z$ je pravilen natanko tedaj, ko je izjava*

$$P_1 \wedge \ldots \wedge P_n \Rightarrow Z$$

logično pravilna, oziroma logična implikacija.

Naslednji primeri logičnih implikacij so pri pravilnem sklepanju najpogostejši:

Modus ponens (MP) $(A \Rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$;

Modus tollens (MT) $(A \Rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$;

Hipotetični silogizem (HS) $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$.

V pravilnost zgornjih implikacij se zlahka prepričamo s pravilnostnimi tabelami.

Primer 1.16.

1. Sklepanje 'Kadar je sneg, je mrzlo. Sneg je. Torej je mrzlo.' je pravilno. Naj bo A izjava 'Sneg je.' in B izjava 'Mrzlo je.' Zgornji sklep zapišemo formalno kot
$$A \Rightarrow B, A \vDash B$$
Sklep je pravilen, ker je implikacija
$$(A \Rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$$
logično pravilna implikacija modus ponens.

2. Tudi sklepanje 'Kadar je sneg, je mrzlo. Toplo je (torej ni mrzlo). Torej ni snega.' je pravilno. Če za A in B vzamemo izjavi iz prejšnjega primera, lahko zgornji sklep zapišemo formalno kot
$$A \Rightarrow B, \neg B \vDash \neg A.$$
Ta sklep pa je pravilen, saj je implikacija
$$(A \Rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$$
logična implikacija modus tollens.

3. Sklepanje 'Kadar je sneg, je mrzlo. Ni snega. Torej ni mrzlo.' pa je logična napaka. Sklep lahko z uporabo izjav iz prvega primera zapišemo formalno kot
$$A \Rightarrow B, \neg A \vDash \neg B,$$
ki pa je napačen sklep, saj implikacija
$$(A \Rightarrow B) \wedge \neg A \Rightarrow \neg B$$
ni logično pravilna. O tem se lahko prepričamo s pravilnostno tabelo:

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg A$	$\neg B$	$(A \Rightarrow B) \wedge \neg A$	$(A \Rightarrow B) \wedge \neg A \Rightarrow \neg B$
p	p	p	n	n	n	p
p	n	n	n	p	n	p
n	p	p	p	n	p	n
n	n	p	p	p	p	p

Pravzaprav bi bilo dovolj pokazati, da je implikacija napačna pri tretjem določilu, torej če ni snega, a je vseeno mrzlo.

Ali je dano sklepanje pravilno, v splošnem ugotovimo po naslednjem postopku:

1. Sklep zapišemo z logičnimi simboli.
2. Če je dobljena izjava MP, MT ali HS, je sklep gotovo pravilen.
3. Če izjava ni ena od zgornjih treh, zapišemo njeno pravilnostno tabelo, iz katere ugotovimo, ali je izjava logična implikacija.
4. Če ugotovimo, pri katerem določilu je izjava napačna, je dovolj ugotoviti to določilo in pokazati, da je pri njem izjava res napačna.

1.11 Dokazovanje v matematiki

S pomočjo dokazovanja v matematiki iz *osnovnih resnic* ali *aksiomov*, ki jih ne dokazujemo, izpeljemo druge izjave. Matematično izjavo, ki jo lahko dokažemo, imenujemo *trditev* ali *izrek*. Dokaz trditve ali izreka je veljavno sklepanje, ki dokaže, da je izjava oblike $A \Rightarrow B$ pravilna. Predpostavke A takega sklepa so aksiomi ali izjave, ki jih predhodno izpeljemo iz aksiomov. Predhodno dokazane izjave lahko uporabimo na enak način kot aksiome.

Primer 1.17. Aksiom v evklidski geometriji je

> Če sta S in T različni točki v prostoru, obstaja natanko ena premica, ki poteka skozi ti dve točki.

Dokažimo **izrek**

> Dve različni premici v prostoru se sekata v največ eni točki.

Dokaz

> Naj bo A izjava 'Premici sta različni.' in B izjava 'Premici se sekata v največ eni točki.' Zgornji izrek zapišemo kot implikacijo $A \Rightarrow B$.
>
> Izrek želimo dokazati ob predpostavki zgornjega Aksioma. Izjava $A \Rightarrow B$ je enakovredna izjavi $\neg B \Rightarrow \neg A$. Torej, če dokažemo pravilnost te izjave, bo sledila pravilnost izjave $A \Rightarrow B$.
>
> Naj bosta p in q poljubni premici v prostoru, ki se sekata v več kot eni točki (torej, v vsaj dveh različnih točkah, na primer S in T) ($\neg B$). Torej premici p in q obe potekata skozi točki S in T. Toda po Aksiomu obstaja le ena premica, ki poteka skozi ti točki. Torej sta premici p in q enaki in velja $\neg A$.

Trditve lahko dokazujemo *neposredno (direktno)* ali *posredno (indirektno)*. Pri posrednem dokazu namesto dane izjave dokažemo kako enakovredno izjavo. V zgornjem primeru smo namesto $A \Rightarrow B$ dokazali $\neg B \Rightarrow \neg A$.

Pogost način dokazovanja je tudi *dokaz s protislovjem*. Tu predpostavimo, da implikacija $A \Rightarrow B$ ne velja in potem s sklepanjem izpeljemo protislovje. Dokazujemo torej implikacijo:

$$\neg(A \Rightarrow B) \Rightarrow N.$$

Toda, če je zgornje pravilno sklepanje, mora biti $\neg(A \Rightarrow B)$ nujno logično nepravilna izjava, kar pomeni, da je njena negacija $A \Rightarrow B$ logično pravilna.

Primer 1.18. S protislovjem dokažimo izrek

> Če je število n^2 sodo, je tudi n^3 sodo število.

Dokaz

> Naj bo A izjava 'n^2 je sodo število.' in B izjava 'n^3 je sodo število.' Dokazujemo trditev $A \Rightarrow B$.
>
> Velja $\neg(A \Rightarrow B) \sim A \wedge \neg B$. Pokažimo, da vodi ta trditev v protislovje:
>
> Predpostavimo $A \wedge \neg B$, kar pomeni, da je n^2 sodo, n^3 pa liho število. Iz elementarne algebre vemo, da je kvadrat sodega sodo, kvadrat lihega pa liho število. Torej, če je n^2 sodo število (izjava A), je sodo tudi n. Podobno velja, da je kub sodega sodo, lihega pa liho število. Torej, če je n^3 liho, je tudi n liho število.
>
> Naj bo C izjava 'n je sodo število'. Zgornje predpostavke združimo v naslednji pravilni sklep:
>
> $$A \Rightarrow C, \neg B \Rightarrow \neg C, A \wedge \neg B \models C \wedge \neg C \sim N,$$
>
> ki pove, da izjava $\neg(A \Rightarrow B)$ res vodi v protislovje.

1.12 Predikati in kvantifikatorji

Izjava, ki govori o kaki lastnosti danega elementa neke množice ali o odnosih med elementi množice, se imenuje *singularna* ali *posamična izjava*. Množica, iz katere črpamo elemente, pa se imenuje *pogovorno področje*.

Primer 1.19. Denimo, da se ukvarjamo z lastnostmi naravnih števil. Primeri posamičnih izjav so:

1. Število 4 je sodo.
2. Vsota števil 2 in 3 je 5.

Odnose med elementi dane množice in njihove lastnosti opisujemo s *predikati*. Vsak predikat je izjava, katere pravilnost je odvisna od nabora elementov, na katerih deluje. Enomestne predikate imenujemo tudi *lastnosti*.

Če predikat deluje na elementih pogovornega področja dobimo izjavo. Množica

$$\mathbb{P}(L) = \{x \colon L(x)\}$$

je *prostor pravilnosti* lastnosti L. Sestavljajo jo namreč tisti elementi pogovornega področja, ki imajo dano lastnost.

Primer 1.20.

1. Izjava 1 v prejšnjem primeru govori o lastnosti enega elementa. Če definiramo enomestni predikat $S(n)$ kot 'število n je sodo', lahko to izjavo zapišemo $S(4)$. Prostor pravilnosti $\mathbb{P}(S)$ je množica vseh sodih števil.
2. Izjava 2 v prejšnjem primeru govori o odnosu med tremi števili. Če definiramo trimestni predikat $V(a, b, c)$ kot 'vsota števil a in b je c', lahko to izjavo zapišemo kot $V(2, 3, 5)$.

Včasih nas zanima, ali neka lastnost velja za vse elemente pogovornega področja, ali pa za vsaj en element. Take izjave lahko zapišemo z uporabo *kvantifikatorjev.* Izjavo, 'vsi elementi pogovornega področja imajo lastnost L', lahko zapišemo z uporabo *univerzalnostnega kvantifikatorja* $\forall$:

$$\forall x\ L(x),$$

kar preberemo 'za vsak x velja $L(x)$' ali 'vsak x ima lastnost L.' Seveda se izjava nanaša na vse elemente pogovornega področja, ki pa ga moramo predhodno opredeliti. Kadar pa neka lastnost L velja vsaj za en element pogovornega področja, zapišemo:

$$\exists x\ L(x),$$

kar preberemo 'obstaja tak x, da velja $L(x)$' ali 'vsaj en x ima lastnost L.' Znak $\exists$ imenujemo *eksistencialnostni kvantifikator.*

Imejmo izjavi $\forall x\ L(x)$ in $\exists x\ L(X)$. Taki izjavi zanikamo po naslednjem pravilu:

$$\neg\forall x\ L(x) \sim \exists x\ \neg L(x)$$
$$\neg\exists x\ L(x) \sim \forall x\ \neg L(x)$$

Zgornji pravili omogočata zamenjavo univerzalnostnega kvantifikatorja z eksistencialnostnim in obratno.

Primer 1.21. Naj bo pogovorno področje množica ljudi in $L(x)$ lastnost 'Oseba x smuča.' Izjavi 'Ne smučajo vsi ljudje.' in 'Obstaja nekdo, ki ne smuča.' sta pomensko enaki. Formalno pa ju zapišemo kot $\neg\forall x\ L(x)$ oziroma $\exists x\ \neg L(x)$.

Oglejmo si še naslednji primer z dvomestnim predikatom.

Primer 1.22. Naj bo pogovorno področje množica ljudi. Definirajmo dvomestni predikat $P(x, y)$ ki pomeni 'x in y sta prijatelja.' Potem so izjave:

- $\forall x \exists y\, P(x, y)$: Vsakdo ima prijatelja.
- $\neg\exists x \forall y\, P(x, y)$: Nihče ni prijatelj vseh ljudi.
- $\forall x \exists y\, \neg P(x, y)$: Za vsakega človeka obstaja nekdo, ki ni njegov prijatelj.
- $\exists x \neg\forall y\, P(x, y)$: Obstaja nekdo, ki ni prijatelj vseh ljudi.
- $\neg\exists x \neg\exists y\, P(x, y)$: Ni človeka, ki ne bi imel prijatelja.

Očitno sta prva in zadnja izjava enakovredni, kar sledi iz pravil o zamenjavi kvantifikatorjev.

Naloge

1. Ugotovi, ali so naslednje izjave logično pravilne.

(a) $(A \Rightarrow B) \vee (A \wedge \neg B)$
(b) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
(c) $(A \vee B) \wedge (\neg A \wedge \neg B)$
(d) $(A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow A)$
(e) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
(f) $(A \wedge B \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (A \vee \neg B)$
(g) $(A \vee B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C) \vee (B \Rightarrow C)$
(h) $(C \Rightarrow \neg A \vee \neg B) \Rightarrow (C \Rightarrow \neg A) \vee (C \Rightarrow \neg B)$
(i) $(A \Leftrightarrow B) \vee (\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$
(j) $(A \Rightarrow B \vee C) \wedge (\neg B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

2. S pomočjo pravilnostnih tabel pokaži, da so izjave v naslednjih parih enakovredne.

(a) $A \vee B$ in $\neg A \Rightarrow B$
(b) $A \Rightarrow A \vee B$ in P
(c) $A \wedge B \Rightarrow \neg B$ in $\neg(A \wedge B)$
(d) $A \wedge B \Rightarrow \neg C$ in $\neg(A \wedge B \wedge C)$
(e) $A \vee B \Rightarrow C$ in $(A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)$
(f) $A \Rightarrow B \vee C$ in $(A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow C)$
(g) $(A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$ in P

3. Ugotovi, ali so naslednje izjave logično pravilne, logično nepravilne ali faktične.

(a) $A \vee \neg B \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
(b) $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) \wedge (A \wedge \neg B)$
(c) $(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow A)$
(d) $(A \Rightarrow B) \vee (A \wedge \neg B)$
(e) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
(f) $(A \vee B) \wedge (\neg A \wedge \neg B)$
(g) $(A \Rightarrow \neg B) \wedge A \wedge B$
(h) $(A \wedge B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)$
(i) $A \vee (A \Rightarrow B)$
(j) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (B \Rightarrow A)$

4. Naj bo X neka sestavljena izjava. Dokaži:

(a) izjava $X \Rightarrow P$ je logično pravilna
(b) izjava $P \Rightarrow X$ je logično pravilna natanko tedaj, ko je izjava X logično pravilna
(c) izjava $N \Rightarrow X$ je logično pravilna
(d) izjava $X \Rightarrow N$ je logično pravilna natanko tedaj, ko je X logično nepravilna izjava

5. Poišči vsa določila, pri katerih so naslednje sestavljene izjave nepravilne.

(a) $(A \wedge B) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$
(b) $(A \vee \neg B) \wedge (\neg A \Rightarrow \neg C)$
(c) $(A \Rightarrow B \vee C) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$
(d) $(A \Rightarrow B) \wedge B \Rightarrow A$
(e) $(A \vee B \Leftrightarrow C) \Rightarrow (A \Leftrightarrow C) \vee (B \Leftrightarrow C)$
(f) $\neg(A \Rightarrow B \wedge C) \Rightarrow (A \Rightarrow \neg B) \wedge (A \Rightarrow \neg C)$

6. S pomočjo logičnih ekvivalenc pokaži, da so izjave v naslednjih parih enakovredne.

(a) $A \Rightarrow B \vee C$ in $(A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow C)$
(b) $A \Rightarrow B \wedge C$ in $(A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C)$
(c) $(A \vee B) \Rightarrow C$ in $(A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)$
(d) $(A \wedge B) \Rightarrow C$ in $(A \Rightarrow C) \vee (B \Rightarrow C)$
(e) $(A \vee B) \Rightarrow \neg C$ in $C \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
(f) $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$ in $(\neg C \wedge B) \Rightarrow \neg A$

7. Ugotovi, ali so izjave v naslednjih parih enakovredne ali pa poišči določila v katerih se njihove pravilnosti razlikujejo.

(a) $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$ in $(A \Rightarrow B) \Rightarrow C$
(b) $A \vee B \Rightarrow C$ in $(A \Rightarrow C) \vee (B \Rightarrow C)$

8. Priredi naslednjim izjavam enakovredne izjave v izbrani obliki.

(a) $\neg(B \vee C) \Rightarrow A$

(b) $A \Rightarrow (A \Leftrightarrow B)$

(c) $\neg(A \Leftrightarrow B)$

9. Dokaži, da so naslednji sklepi pravilni.

(a) Kdor poje, je srečen. Kdor je srečen, je zdrav. Torej, kdor poje, je zdrav.

(b) Če potrebujem novo obleko, grem v trgovino. Ne grem v trgovino. Torej ne potrebujem nove obleke.

(c) Pingvini so ptiči. Ptiči so živali. Torej so pingvini živali.

(d) Če ni dežja in če imamo prost dan, gremo v hribe. Danes ne gremo v hribe, čeprav imamo prost dan. Torej danes dežuje.

(e) Na računalnik lahko dobimo virus, samo če ne uporabljamo protivirusnega programa ali če uporabljamo nelegalne programe. Na računalniku smo vedno uporabljali samo legalne programe. Dobili smo virus. Torej nismo uporabljali protivirusnega programa.

10. Dokaži, da so naslednji sklepi napačni.

(a) Vsak Slovenec gre na Triglav. Tone je bil na Triglavu. Torej, Tone je Slovenec.

(b) Avto dobro deluje samo, če ima dovolj bencina. Avto ne deluje. Torej avto nima dovolj bencina.

(c) Fiziki dobro obvladajo računstvo, kemiki pa geometrijo. Torej kemiki ne obvladajo računstva.

(d) Žival lahko leti samo, če ima krila. Ptiči imajo krila. Noj je ptič. Torej noj lahko leti.

11. Ugotovi, ali je sklepanje v naslednjih primerih pravilno.

(a) Trgovci dobro zaslužijo. Janez ni trgovec. Torej Janez ne zasluži dobro.

(b) Petra gre vsako leto na počitnice na morje ali v hribe. Lansko leto Petra ni bila na morju. Torej je bila Petra lansko leto v hribih.

(c) Prijatelja spoznaš v nesreči. Torej, če nimaš nesreče, ne spoznaš prijatelja.

(d) Če potrebujem novo obleko, grem v trgovino. Ne grem v trgovino. Torej ne potrebujem nove obleke.

(e) Kdor je zadovoljen, se smeje. Kdor je uspešen, je zadovoljen. Torej: kdor se smeje, je uspešen.

(f) Poslovneži pri svojem delu uporabljajo računalnik. Miha pri svojem delu ne uporablja računalnika. Torej: Miha ni poslovnež.

(g) Kdor je slaven, je bogat. Kdor je bogat, je srečen. Torej: kdor je srečen, je slaven.

(h) Če bo lepo vreme in bomo imeli čas, bomo šli na izlet. Vreme je lepo, a nismo šli na izlet. Torej: nismo imeli časa.

(i) Če se podraži bencin, se zviša inflacija. Če se zviša inflacija, se podraži kruh. Torej: za podražitev kruha je vedno kriva podražitev bencina.

(j) Delo lahko dobro opravimo, samo če imamo kakovostno orodje. Delo smo dobro opravili. Torej: smo imeli kakovostno orodje.

(k) Avtomobili neuglednih znamk se pogosto kvarijo. Kupili smo avto ugledne znamke. Torej se nam avto ne bo pogosto kvaril.

12. Naslednje izjave se nanašajo na naravna števila. Vpeljimo dvomestni predikat $D(x, y) \equiv$ 'število x deli število y'. (To pomeni, da je na primer $D(3, 6)$ pravilna, $D(2, 5)$ pa nepravilna izjava.) Zapiši naslednje izjave v pogovornem jeziku in ugotovi, katere od njih so pravilne.

(a) $\forall x\ (D(3, x) \Rightarrow D(6, x))$
(b) $\exists x\ (D(5, x) \Rightarrow D(3, x))$
(c) $\exists x \forall y\ D(x, y)$
(d) $\forall x \exists y\ D(x, y)$
(e) $\exists x \forall y\ D(y, x)$

13. Naslednje izjave se nanašajo na ljudi. Vpeljimo dvomestna predikata $P(x, y) \equiv$'oseba x ima telefonsko številko osebe y' in $S(x, y) \equiv$'oseba x in oseba y sta zaposleni v istem podjetju'. Zapiši naslednje izjave v pogovornem jeziku:

(a) $\exists x \forall y (S(x, y) \Rightarrow P(x, y))$
(b) $\exists x \forall y (P(x, y) \Rightarrow S(x, y))$
(c) $\neg \exists x \forall y P(x, y)$
(d) $\exists x \neg \exists y (\neg S(x, y) \wedge P(x, y))$

14. Naslednje izjave se nanašajo na države. Vpeljimo dvomestni predikat $P(x, y) \equiv$ 'državi x in y sta že kdaj podpisali mirovno pogodbo'. Zapiši naslednje izjave v pogovornem jeziku:

(a) $\forall x \exists y P(x, y)$
(b) $\exists x \forall y P(x, y)$
(c) $\exists x \neg \exists y P(x, y)$
(d) $\exists x \neg \forall y P(x, y)$

15. Dokaži naslednji trditvi: '*Če praštevilo p deli n^2, potem p deli tudi n.*' in '*Če je za neko naravno število n $\sqrt{n}$ racionalno število, potem je $\sqrt{n}$ naravno število.*'

2 Teorija množic

2.1 Uvod

Množica je skupina reči, ki jih imenujemo *elementi* množice. Množice označujemo z velikimi črkami: $A, B, C_i \ldots$, elemente množic pa z malimi črkami: $a, b_j, c \ldots$. Če je a element množice A, to zapišemo z $a \in A$; če pa element a ne pripada množici A, to označimo z $a \notin A$, kar je enakovredno zapisu $\neg(a \in A)$.

Množico lahko podamo na dva načina: tako, da naštejemo vse njene elemente, ali tako, da podamo pogoje, ki jim morajo elementi množice zadoščati.

Primer 2.1. Množici $A = \{2, 4, 6\}$ in $B = \{x \colon x \in \mathbb{N}, 2|x, x < 7\}$ sta enaki.

Seveda je naštevanje vseh elementov množice primerno le, če vsebuje množica majhno število elementov.

Naj bosta dani množici A in B. Če so vsi elementi množice A tudi elementi množice B, pravimo, da je množica A *podmnožica* množice B in zapišemo $A \subseteq B$. Če pa velja tako $A \subseteq B$ kot $B \subseteq A$, sta množici *enaki*. V primeru, ko velja $A \subseteq B$ in $B \nsubseteq A$, pravimo, da je množica A *prava podmnožica* množice B. Formalno lahko zapišemo:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x \colon x \in A \Rightarrow x \in B)$$
$$A = B \Leftrightarrow (\forall x \colon x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

Naštejmo še nekaj posebnih množic:

prazna množica je množica, ki ne vsebuje nobenega elementa in jo označimo z $\emptyset$ ali $\{\}$;

osnovna množica ali *univerzum* je množica, ki vsebuje vse elemente, ki jih v danem primeru obravnavamo in jo označimo z $\mathbf{U}$;

potenčna množica je množica vseh podmnožic množice A in jo označimo z $\mathcal{P}\, A = \{B \colon B \subset A\}$.

Primer 2.2. Potenčna množica množice $A = \{a, b, c\}$ je množica

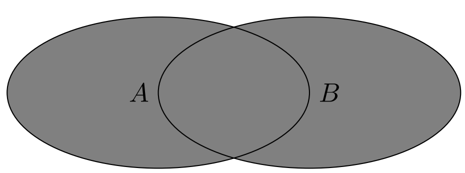
$$\mathcal{P}\, A = \{\{\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a, b, c\}\}.$$

2.2 Operacije z množicami

Iz danih množic lahko tvorimo nove s pomočjo operacij kot so *unija*, *presek, komplement* in *razlika* množic.

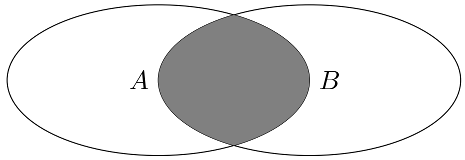
Unija množic A in B je množica $A \cup B$, ki vsebuje vse elemente, ki pripadajo bodisi množici A bodisi množici B:

$$A \cup B = \{x \colon x \in A \ \vee \ x \in B\}$$



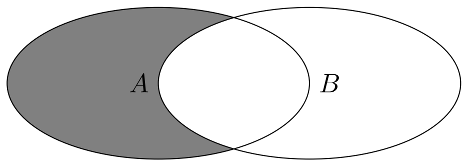
Presek množic A in B je množica $A \cap B$, ki vsebuje vse elemente, ki pripadajo hkrati A in B:

$$A \cap B = \{x \colon x \in A \ \wedge \ x \in B\}$$



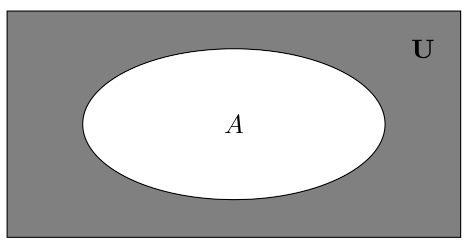
Če je $A \cap B = \emptyset$, pravimo, da sta množici A in B *disjunktni*.
Razlika množic A in B je množica $A - B$ ali tudi $A \backslash B$, ki vsebuje vse elemente množice A, ki niso elementi množice B:

$$A - B = \{x \colon x \in A \ \wedge \ x \notin B\}$$



Komplement množice A je množica A^c, ki vsebuje vse elemente univerzalne množice, ki niso elementi množice A:

$$A^c = \{x \colon x \notin A\} = \mathbf{U} - A$$



Operacijo razlika množic lahko izrazimo tudi takole:

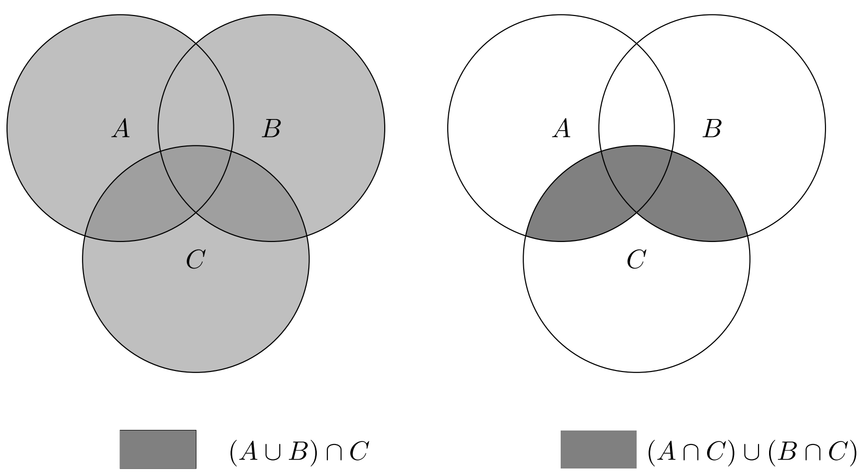
$$A - B = A \cap B^c.$$

Naj bodo A, B in C poljubne množice univerzuma $\mathbf{U}$.

Primer 2.3. Dokaz distributivnostnega zakona z Vennovimi diagrami:

Tabela 2: Lastnosti operacij z množicami

idempotentnost	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
komutativnost	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
asociativnost	$(A \cup B) \cup C$ $= A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C$ $= A \cap (B \cap C)$
distributivnost	$(A \cup B) \cap C$ $= (A \cap C) \cup (B \cap C)$	$(A \cap B) \cup C$ $= (A \cup C) \cap (B \cup C)$
de Morganov zakon	$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$	$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
	$\mathbf{U}^c = \emptyset$	$\emptyset^c = \mathbf{U}$
	$A \cup \mathbf{U} = \mathbf{U}$	$A \cap \mathbf{U} = A$
	$A \cup \emptyset = A$	$A \cap \emptyset = \emptyset$
	$(A^c)^c = A$	
	$A \cup A^c = \mathbf{U}$	$A \cap A^c = \emptyset$
	$A \cap B \subseteq A$	$A \subseteq A \cup B$
	$A \subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad A \cap B = A \quad \Leftrightarrow \quad A \cup B = B$	
	$(C \subseteq A) \quad \wedge \quad (C \subseteq B) \quad \Leftrightarrow \quad (C \subseteq A \cap B)$	
	$(A \subseteq C) \quad \wedge \quad (B \subseteq C) \quad \Leftrightarrow \quad (A \cup B \subseteq C)$	



2.3 Povezava med izjavami in množicami

Nekatere izjave, ki jih obravnavamo v logiki, lahko zapišemo tudi v jeziku množic. Tako lahko na primer ugotovimo, ali gre za pravilno sklepanje kar s pomočjo Vennovih diagramov.

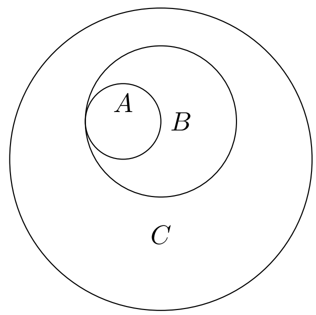
Primer 2.4. Imejmo naslednje sklepanje: *Postrvi so ribe. Ribe živijo v vodi. Torej postrvi živijo v vodi.*

Označimo naslednje množice bitij:

A : *postrvi;*

B : *ribe;*
C : *bitja, ki živijo v vodi.*

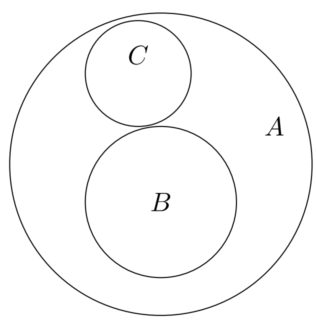
Prva trditev pomeni $A \subseteq B$, druga pa $B \subseteq C$. Če prikažemo te relacije z Vennovimi diagrami, opazimo, da velja $A \subseteq C$, kar je enako zaključku danega sklepanja.



Oglejmo si še primer napačnega sklepanja.

Primer 2.5. Imejmo še naslednje sklepanje: *Živali, ki dihajo s škrgami, živijo v vodi. Krokodili živijo v vodi. Torej krokodili dihajo s škrgami.* Označimo spet:
A : *živali, ki živijo v vodi;*
B : *živali, ki dihajo s škrgami;*
C : *krokodili.*

Prva trditev pomeni $B \subseteq A$, druga pa $C \subseteq A$. Prikažimo te relacije z Vennovimi diagrami:



Ugotovimo torej, da ne velja nujno $C \subseteq B$. Torej sklep ni pravilen.

Naj bo dana množica A univerzuma $\mathbf{U}$. Priredimo ji izjavo

$$L(x) \equiv x \in A.$$

Zgornja izjava je pravilna natanko za vse elemente x, ki pripadajo množici A. Zato je njen prostor pravilnost ravno množica A. Nasprotno lahko vsaki izjavi X priredimo prostor pravilnosti $\mathbb{P}(X)$, ki je podmnožica prostora izjave. Ker imata enakovredni izjavi enak prostor pravilnosti, jima torej pripada enaka množica. Velja torej:

$$A = B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

in obratno,

če je pravilna ekvivalenca $X \Leftrightarrow Y$, velja $\mathbb{P}(X) = \mathbb{P}(Y)$,

saj sta izjavi X in Y enakovredni. Enakosti množic torej ustreza izjavna povezava ekvivalenca. Podobno velja

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)$$

in obratno,

če je pravilna implikacija $X \Rightarrow Y$, velja $\mathbb{P}(X) \subseteq \mathbb{P}(Y)$,

saj je pri logično pravilni implikaciji konsekvens pravilen vselej, ko je pravilen antecedens. Za presek in unijo velja

$$\forall x((x \in A \cap B) \sim (x \in A) \wedge (x \in B))$$
$$\forall x((x \in A \cup B) \sim (x \in A) \vee (x \in B))$$

in obratno

$$\mathbb{P}(X \wedge Y) = \mathbb{P}(X) \cap \mathbb{P}(Y) \tag{4}$$
$$\mathbb{P}(X \vee Y) = \mathbb{P}(X) \cup \mathbb{P}(Y). \tag{5}$$

Za komplement množice pa velja

$$\forall x((x \in A^c) \sim \neg(x \in A))$$

in obratno

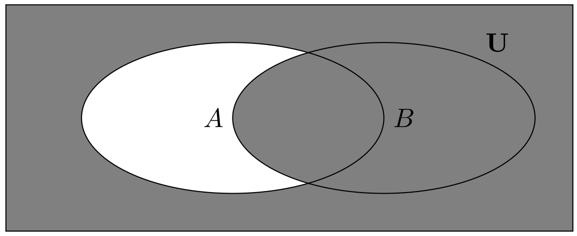
$$\mathbb{P}(\neg X) = \mathbb{P}(X)^c.$$

Tabela 3: Povezava med operacijami z množicami in izjavnimi povezavami.

izjave	množice
$\neg A$	A^c
$A \wedge B$	$A \cap B$
$A \vee B$	$A \cup B$
$A \Rightarrow B$	$A \subseteq B$
$A \Leftrightarrow B$	$A = B$
P	$\mathbf{U}$
N	$\emptyset$
$A \wedge \neg B$	$A - B$

Primer 2.6. Katera množica pripada izjavi $A \Rightarrow B$?

Do odgovora lahko pridemo po dveh poteh. Izjavi pripada relacija $A \subseteq B$. Ta pa velja le, če je $A - B = \emptyset$, se pravi, če je $\mathbf{U} = A^c \cup B$. Do enakega rezultata pridemo, če izjavo prevedemo v izbrano obliko.



Drugače povedano: izven množice, ki pripada izjavi $A \Rightarrow B$ smo le, če smo v A in hkrati nismo v B.

Nekatere lastnosti izjav lahko prikažemo s pomočjo prirejanja množic k izjavam. Izjavi X priredimo množico tako, da

- izjavo prevedemo v izbrano obliko, saj sicer ta vsebuje poleg operacij tudi relacije med množicami;
- vsaki izjavni povezavi priredimo ustrezno operacijo med množicami;
- dobljeno množico lahko predstavimo z Vennovim diagramom.

Primer 2.7. Izjavi $A \Rightarrow A \vee B$ ustreza izjava v izbrani obliki $\neg A \vee (A \vee B)$, tej pa množica $A^c \cup (A \cup B)$. Z Vennovim diagramom se zlahka prepričamo, da je ta množica enaka univerzumu, od koder sledi, da je izjava logično pravilna.

Primer 2.8. Ugotovimo, kdaj velja med množicama A in B relacija:

$$A^c \subseteq B^c. \tag{6}$$

Ugotoviti želimo, katera zveza velja med A in B. Zapišimo zvezo z izjavnimi povezavami:

$$\neg A \Rightarrow \neg B \sim A \vee \neg B \sim \neg B \vee A \sim B \Rightarrow A$$

Zadnja zveza je enakovredna relaciji

$$B \subseteq A. \tag{7}$$

Relacija (6) torej velja natanko tedaj, ko velja relacija (7).

Naloge

1. V kateri relaciji so množice v naslednjih parih?

(a) $A = \{1, 2, 3, 4\}$ in $B = \{2, 4\}$

(b) $A = \mathbb{N}$ in $B = \mathbb{Z}$

2. S pomočjo Vennovih diagramov ugotovi, katera relacija obstaja med množicami v naslednjih parih:

(a) $(A \cup B) - A$ in $(A \cup B) - (A \cap B)$

(b) $(A \cup C) - B$ in $A \cup (C - B)$

(c) $(B \cup (A \cap C)) - (A \cap B \cap C)$ in $(A' \cap B) \cup ((A \cap C) \cap B')$

(d) $B \cup (A - (C \cup B))$ in $(A \cup B) - (A \cap C)$

(e) $B - (B - (A \cup C))$ in $(A \cap B) \cup (B \cap C)$

(f) $(A - B) \cup (B - A)$ in $A \cap ((A \cup B) - (A \cap B))$

(g) $(B - C) \cup (A \cap B)$ in $(B - (A \cup C)) \cup (A \cap B \cap C)$

(h) $(A \cup B) \cap (A \cup C) \cap (B \cup C)$ in $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$

(i) $(C - (A \cup B)) \cup ((A \cap B) - (B \cap C))$ in $(C - A) \cup (B \cap (A \cup C))$

3. Poenostavi naslednje izjave s pomočjo privedbe na množice. Izjavo najprej prevedi v izbrano obliko.

(a) $(A \Rightarrow B) \wedge A$

(b) $\neg(A \wedge B \Rightarrow \neg B)$

(c) $\neg A \Rightarrow (A \wedge B)$

(d) $\neg A \vee \neg B \Rightarrow B$

4. Naslednjim parom izjav priredi množice in s pomočjo Vennovih diagramov ugotovi, ali so enakovredne.

(a) $A \wedge B \Rightarrow C$ in $(A \Rightarrow C) \vee (B \Rightarrow C)$

(b) $A \vee \neg B \Rightarrow \neg A$ in $\neg A$

5. Kaj lahko povemo o množicah A in B univerzuma $\mathbf{U}$, če veljajo naslednje zveze? Prevedi na izjavni račun.

(a) $A' \cap B = \emptyset$

(b) $B \subseteq B \cap A'$

3 Relacije

3.1 Uvod

V življenju se pogosto srečujemo z različnimi odnosi med stvarmi. Med ljudmi nas denimo zanimajo zanimajo sorodstveni in medosebni odnosi. Matematično take odnose opisujemo z relacijami. Primeri relacij v matematiki so na primer relacija *manjše* med števili, ali relacija *podmnožica* med množicami. Če sta dva elementa v relaciji, to opišemo z *urejenim parom*, denimo (a, b), pomeni, da je element a v relaciji z elementom b. Urejeni par (a, b) se razlikuje od množice $\{a, b\}$ v tem, da je pomemben vrstni red elementov v pari, prav tako sta elementa a in b lahko enaka.

3.2 Kartezični produkt

Imejmo množici A in B. Vsi urejeni pari oblike (a, b), pri čemer je $a \in A$ in $b \in B$, sestavljajo množico, ki jo imenujemo *kartezični produkt* množic A in B in ga označimo z $A \times B$. Podobno lahko zapišemo *urejeno n-terico* elementov $a_1, a_2, \dots, a_n$ iz množic $A_1, A_2, \dots, A_n$ kot $(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Elementu, ki je zapisan na i-tem mestu urejene n-terice pravimo *i-ta koordinata* n-terice. Dve n-terici $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ in $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ sta enaki natanko tedaj, ko so paroma enake vse njune koordinate; torej, ko velja $a_i = b_i$ za vsak $i = 1, \dots, n$.

Kartezični produkt množic A in B je torej definiran kot

$$A \times B = \{(a, b) \colon a \in A, b \in B\}.$$

Kartezični produkt več množic definiramo analogno:

$$A_1 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, \dots, a_n) \colon a_i \in A_i, \forall i = 1, \dots, n\}.$$

Kartezični produkt enakih množic zapišemo krajše kot $A \times A = A^2$ ipd.

Primer 3.1. Množico vseh urejenih parov oblike (x, y), pri čemer sta x in y realni števili označujemo z $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Urejene pare v $\mathbb{R}^2$ lahko prikažemo kot točke v ravnini.

Primer 3.2. Oglejmo si še kartezični produkt množic $A = \{a, b, c, d\}$ in $B = \{x, y, z\}$, ki ga lahko predstavimo grafično.

3.3 Relacije

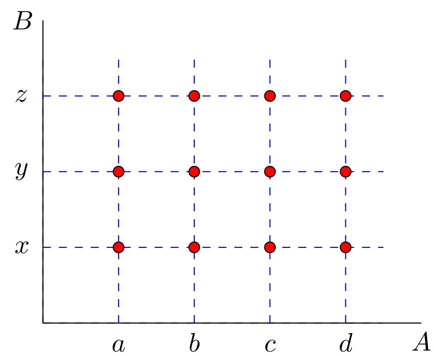
Definicija 3.1. Naj bosta A in B množici. *Binarna relacija* ali na kratko *relacija* med elementi množic A in B je neka podmnožica R kartezičnega produkta $A \times B$.

Pogosto sta množici A in B enaki. V tem primeru govorimo o relaciji na množici A. Če za par elementov $a \in A$ in $b \in B$ velja $(a, b) \in R$, pravimo, da sta elementa v relaciji R in zapišemo aRb.

Primer 3.3. Primeri relacij:

1. Relacija 'večje' v množici števil: $xRy \Leftrightarrow x > y$.

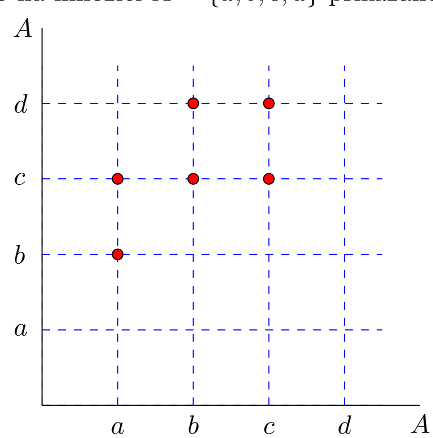
2. V množici držav lahko vpeljemo relacijo $R \equiv$'je sosedna': $xRy \Leftrightarrow$'država x ima skupno kopensko mejo z državo y'.



Slika 1: Kartezični produkt množic $A = \{a, b, c, d\}$ in $B = \{x, y, z\}$.

3. V množici ljudi so primeri relacij: 'oče', 'hči', 'sosed', ...
4. Med množico ljudi in množico podjetij lahko definiramo relacijo $R \equiv$'je zaposlen': $xRy \Leftrightarrow$'oseba x je zaposlena v podjetju y'.

Primer 3.4. Oglejmo si relacijo na množici $A = \{a, b, c, d\}$ prikazano v kartezičnem produktu $A \times A$.



Vsaki relaciji R med množicama A in B priredimo:

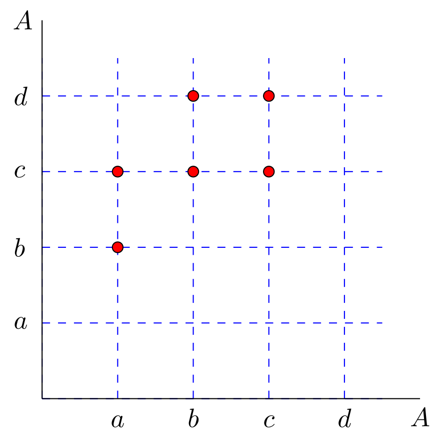
- *definicijsko območje* ali *domeno*, ki je binarne relacije R je množica vseh prvih koordinat te relacije:

$$\mathcal{D}R = \{x \in A \colon \exists y \in B, xRy\}$$

- *zalogo vrednosti*, ki je množica vseh drugih koordinat te relacije:

$$\mathcal{Z}R = \{y \in B \colon \exists x \in A, xRy\}$$

Primer 3.5.



Slika 2: Definicijsko območje relacije je $\{a, b, c\}$, zaloga vrednosti pa je $\{b, c, d\}$

1. Naj bo dana relacija 'mati' v množici ljudi: $xRy \Leftrightarrow$'oseba x je mati osebe y. Domena relacije R je tedaj množica vseh mater, zaloga vrednosti pa je množica vseh ljudi.
2. V domeni relacije '$>$' (večje) na množici naravnih števil so vsa naravna števila, v njeni zalogi vrednosti pa so vsa naravna števila večja od 1.
3. Množica $\emptyset$ določa *prazno relacijo*, množica $A \times A$ pa *univerzalno relacijo* na množici A.
4. Relacija, pri kateri je vsak element v relaciji natanko s samim seboj, je *relacija identitete,* ali *diagonalna relacija* ki jo označimo z I, oziroma navadno kar z '$=$'.

Vsaki relaciji lahko priredimo *inverzno relacijo*, pri kateri zamenjamo koordinati pri vsakem urejenem paru iz relacije R. Inverzno relacijo zaznamujemo z R^{-1} in velja

$$R^{-1} = \{(y, x) \colon xRy\}$$

oziroma

$$yR^{-1}x \quad \Leftrightarrow \quad xRy.$$

Očitno velja $(R^{-1})^{-1} = R$. Prav tako očitno veljata zvezi

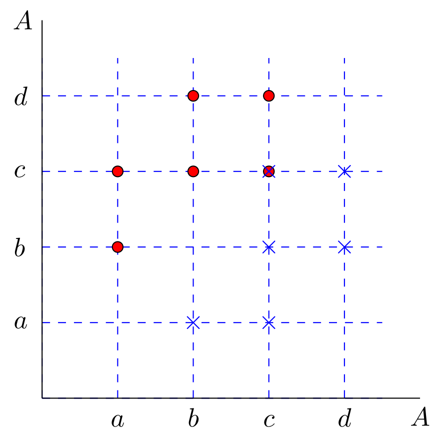
$$\mathcal{D}R^{-1} = \mathcal{Z}R \quad \text{in} \quad \mathcal{Z}R^{-1} = \mathcal{D}R.$$

Primer 3.6. Inverzna relacija relaciji '$>$' je relacija '$<$'.

Imejmo relaciji R in S v množici A. *Kompozitum* relacije R z relacijo S označimo z $R \circ S$ ali kar RS in ga definiramo po naslednjem predpisu:

$$x(R \circ S)y \;\Leftrightarrow\; \exists z(xRz \wedge zSy).$$

Torej, x in y sta v relaciji $S \circ R$ natanko tedaj, ko obstaja tak element z, da velja xRz in zSy.



Slika 3: Relacija R in inverzna relacija R^{-1}.

Primer 3.7.

1. V množici ljudi imejmo relaciji $R \equiv$ 'hči' in $S \equiv$ 'brat'. Tedaj velja $R \circ S \equiv$ 'nečakinja' in $S \circ R \equiv$ 'sin'.

2. V množici premic v ravnini je dana relacija $R \equiv$ 'pravokotna'. Tedaj velja $R \circ R \equiv$ 'vzporedna'.

Kot lahko opazimo iz prvega primera, kompozitum relacij v splošnem ni komutativen:

$$S \circ R \neq R \circ S;$$

vedno pa je asociativen:

$$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T).$$

Za inverz kompozita pa velja naslednje pravilo

$$(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}.$$

Za kompozitum relacije R z identiteto pa velja

$$I \circ R = R \circ I = R.$$

3.4 Tipi relacij

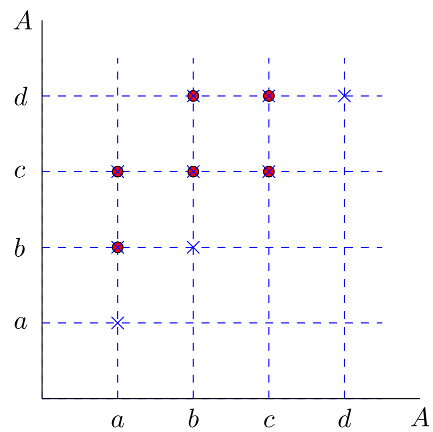
Naštejmo nekaj najpomembnejših tipov relacij na množici A. Relacija R je *refleksivna*, če je vsak element v relaciji sam s sabo:

$$\forall x \in A \colon xRx.$$

Relacija torej ni refleksivna brž ko obstaja tak element $x \in A$, da velja $\neg xRx$.

Primer 3.8.

1. Relacija v množici ljudi $xRy \Leftrightarrow$ 'oseba x je rojena istega leta, kot oseba y' je refleksivna.



Slika 4: Relacija R ni refleksivna. Relacija S pa je.

2. Relacija '$>$' v množici realnih števil ni refleksivna.

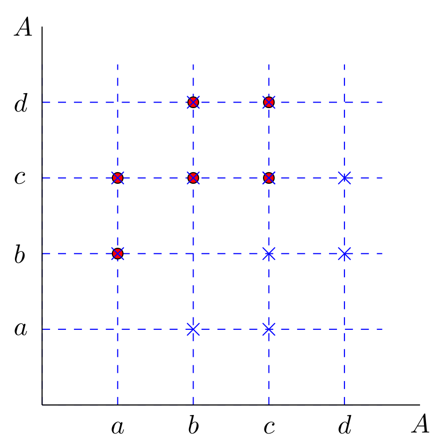
Relacija R je *simetrična*, če velja

$$\forall x \forall y\ (xRy\ \Rightarrow\ yRx).$$

Relacija torej ni simetrična, če obstaja tak par elementov $x, y \in A$, da velja xRy vendar $\neg yRx$.

Primer 3.9.

1. Relacija v množici ljudi $xRy \Leftrightarrow$ 'oseba x je rojena istega leta, kot oseba y' je tudi simetrična.
2. Relacija 'deli' v množici naravnih števil ni simetrična, saj na primer '3 deli 6', vendar '6 ne deli 3'.



Slika 5: Relacija R ni simetrična. Relacija S pa je.

Relacija R je *asimetrična*, če za vsak par elementov x in y, ki sta v relaciji xRy, velja, da nista v relaciji yRx:

$$\forall x \forall y \ (xRy \ \Rightarrow \ \neg yRx).$$

Relacija ni asimetrična, če obstajata taka elementa x in y, da velja tako xRy kot yRx.

Primer 3.10.

1. Relacija 'večje' v množici naravnih števil je asimetrična.
2. Relacija 'večje ali enako' pa ni asimetrična, saj če vzamemo $x = y = 1$, velja tako xRy kot yRx.

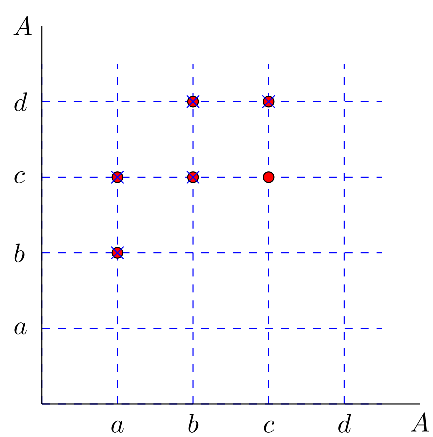
Iz zadnjega primera vidimo, da pri asimetrični relaciji noben element ni v relaciji sam s seboj. Relacija R je *antisimetrična*, če sta poljubna elementa x in y lahko v relacijah xRy in yRx le, če sta enaka:

$$\forall x \forall y \ (xRy \ \wedge \ yRx \ \Rightarrow \ x = y).$$

Relacija ni antisimetrična, če obstajata taka različna elementa x in y, da velja tako xRy kot yRx.
Opomba: Ponovno premisli, v čem je razlika med asimetričnimi in antisimetričnimi relacijami.

Primer 3.11.

1. Relacija 'večje ali enako' v množici naravnih števil je antisimetrična, a ni asimetrična.
2. Relacija 'podmnožica' je antisimetrična.



Slika 6: Relacija R je antisimetrična in ni asimetrična. Relacija S je asimetrična (in zato tudi antisimetrična).

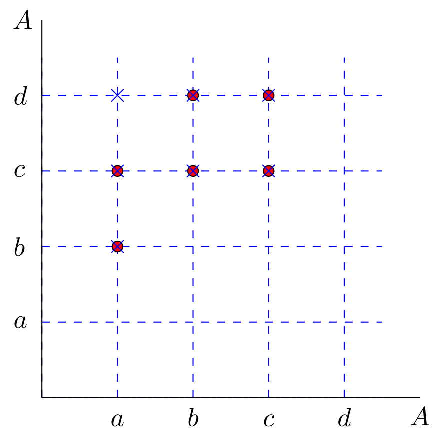
Relacija R je *tranzitivna*, če velja

$$xRy \ \wedge \ yRz \ \Rightarrow \ xRz.$$

To pomeni, da je vselej, ko velja xRy in yRz, tudi xRz. Relacija ni tranzitivna brž ko lahko najdemo take elemente x, y in z, da velja xRy, yRz, vendar $\neg xRz$.

Primer 3.12.

1. Relacija 'večje' ($>$) v množici naravnih števil je tranzitivna.
2. Relacija 'sestra' v množici ljudi je tranzitivna.
3. Relacija 'sestrična' ni tranzitivna.



Slika 7: Relacija R ni tranzitivna, saj velja aRc in cRd, vendar ne velja aRd. Relacija S pa je tranzitivna.

Relacija R je *sovisna*, če za poljubna različna elementa x in y velja vsaj ena od relacij xRy ali yRx:

$$\forall x \forall y\ (x \neq y \ \Rightarrow \ xRy \ \vee \ yRx).$$

Relacija ni sovisna, če obstajata taka različna elementa x in y, da velja $\neg xRy$ in $\neg yRx$.

Primer 3.13.

1. Relacija 'večje' ($>$) v množici naravnih števil je sovisna.
2. Relacija 'podmnožica' ni sovisna.

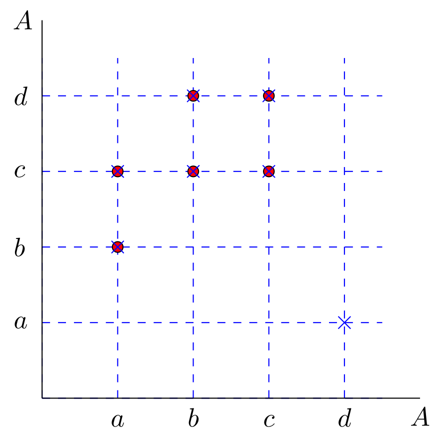
Relacija R je *strogo sovisna*, če za poljubna elementa x in y velja vsaj ena od relacij xRy ali yRx:

$$\forall x \forall y\ (xRy \ \vee \ yRx).$$

Relacija ni sovisna, če obstajata poljubna taka elementa x in y, da velja $\neg xRy$ in $\neg yRx$.

Primer 3.14.

1. Relacija 'večje ali enako' v množici naravnih števil je strogo sovisna.
2. Pokaži, da je vsaka strogo sovisna relacija tudi refleksivna.



Slika 8: Relacija R ni sovisna, saj velja $a \neq d$, vendar ni niti aRd niti dRa. Relacija S pa je sovisna.

3.5 Ekvivalenčna relacija

Relacija R v množici A je ekvivalenčna natanko tedaj, ko je *refleksivna*, *simetrična* in *tranzitivna*. Ekvivalenčna relacija elemente množice združuje v skupine podobnih oziroma ekvivalentnih elementov, ki imajo skupne lastnosti.

Primer 3.15.

1. Relacija 'enako' $(=)$ je ekvivalenčna relacija v množici števil.
2. V množici formalnih izjav je relacija 'enakovredna izjava' ekvivalenčna relacija.
3. V množici končnih podmnožic množice naravnih števil je relacija 'imata enako število elementov' ekvivalenčna relacija.
4. V množici ulomkov je relacija R definirana s predpisom $\frac{a}{b} R \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$ ekvivalenčna relacija.

Ekvivalenčna relacija R razdeli množico A na *ekvivalenčne razrede* tako, da je A disjunktna unija vseh ekvivalenčnih razredov. To pomeni, da je vsak element $x \in A$ v natanko enem ekvivalenčnem razredu. Ekvivalenčni razred elementa x označimo z $[x]$, element $y \in [x]$ pa imenujemo *predstavnik* ekvivalenčnega razreda. To je torej tisti enolično določeni ekvivalenčni razred, ki vsebuje element x. Velja

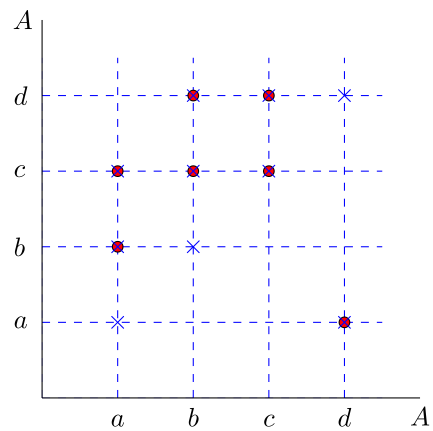
$$[x] = \{y \colon xRy\}.$$

Množico vseh ekvivalenčnih razredov imenujemo *faktorska množica* in jo označimo A/R. Velja torej:

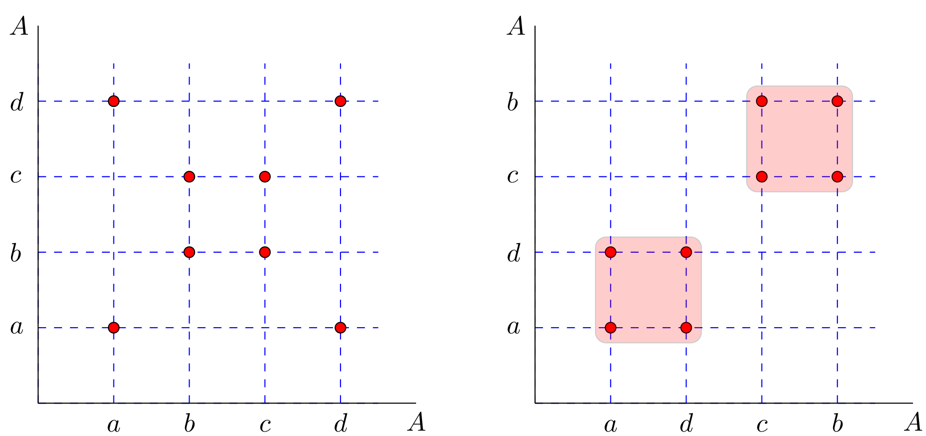
$$A/R = \{[x] \colon x \in A\}.$$

Veljajo naslednje trditve:

1. $\forall x \in A \colon x \in [x]$;
2. $[x] = [y]$ natanko tedaj, ko xRy;



Slika 9: Relacija R je sovisna, ni pa strogo sovisna, saj, na primer, ne velja aRa. Relacija S pa je strogo sovisna.



Slika 10: Relacija R (prva slika) je ekvivalenčna. S preureditvijo točk lahko razdelimo množico v ekvivalenčne razrede (druga slika). Faktorska množica je $A/R = \{\{a, d\}, \{c, b\}\}$.

3. Če je $[x] \neq [y]$, sta $[x]$ in $[y]$ disjunktna.

Primer 3.16. V množico celih števil uvedimo relacijo $xRy \Leftrightarrow |x - y|$ je večkratnik števila 3.

Oglejmo si množico

$$\{\ldots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \ldots\}$$

Opazimo, da so vsa števila iz zgornje množice med seboj v relaciji. Enako velja za množici

$$\{\ldots, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \ldots\}$$

in

$$\{\ldots, -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, \ldots\}$$

Relacija R torej razbije množico $\mathbb{Z}$ v tri ekvivalenčne razrede.

3.6 Relacije urejenosti

Pomembne so tudi relacije, ki množico urejajo. Relacija R določa v množici A strukturo

šibke urejenosti natanko tedaj, ko je *tranzitivna* in *strogo sovisna*.

linearne urejenosti natanko tedaj, ko je *tranzitivna*, *antisimetrična* in *strogo sovisna*.

delne urejenosti natanko tedaj, ko je *refleksivna*, *tranzitivna* in *antisimetrična*.

Primer 3.17.

1. Relacija *ni starejši* v množici ljudi to množico *šibko ureja*.
2. Relacija *manjše ali enako* ($\leq$) množico števil linearno ureja.
3. Relacija *podmnožica* ($\subseteq$) delno ureja množico podmnožic dane množice A.

Naloge

1. Na množici $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ je podana relacija $xRy \Leftrightarrow x < y$.

(a) S katerimi elementi je v relaciji element 3?

(b) Kateri elementi so v relaciji z elementom 3?

(c) Določi definicijsko območje, zalogo vrednosti relacije R.

(d) Določi relaciji R inverzno relacijo.

2. Na množici ljudi sta podani relaciji $xRy \Leftrightarrow$ 'oseba x je roditelj osebe y' in $xSy \Leftrightarrow$ 'oseba x je sestra osebe y'.

(a) Določi domeno in zalogo vrednosti relacij.

(b) Določi relacijama inverzni relaciji.

(c) Kaj je relacija $S \circ R$?

3. Naštej lastnosti relacije R.

(a) v množici realnih števil: $xRy \Leftrightarrow x > y$

(b) v množici realnih števil: $xRy \Leftrightarrow x \leq y$

(c) med množicami: $ARB \Leftrightarrow A \subseteq B$

(d) v množici ljudi: $xRy \Leftrightarrow$ 'osebi x in y imata kakega skupnega znanca'

(e) v množici ljudi: $xRy \Leftrightarrow$ 'oseba x in oseba y sta rojeni istega leta'

4. Ugotovi, katere lastnosti ima naslednja relacija. Ugotovi še, ali predstavlja relacija na množici kako urejenost oziroma, ali je ekvivalenčna relacija.

(a) na množici gradbenih parcel: $xRy \Leftrightarrow$ 'parcela x ima večjo ali enako površino kot parcela y'

(b) na množici zaposlenih: $xRy \Leftrightarrow$ 'oseba x in oseba y sta zaposleni v istem podjetju' (predpostavi, da je vsakdo zaposlen v enem samem podjetju)

(c) na množici ljudi: $xRy \Leftrightarrow$ 'oseba x govori vse jezike, ki jih govori oseba y' (lahko pa govori tudi še kak drugi jezik, vendar ne nujno)

(d) na množici držav: $xRy \Leftrightarrow$ 'država x ima enak politični sistem kot država y'

(e) na množici ljudi: $xRy \Leftrightarrow$ 'osebi x in y se lahko sporazumevata - govorita kakšen skupen jezik'

(f) Na množici ulomkov imamo relacijo $\frac{m}{n} R \frac{p}{q} \Leftrightarrow mq = np$

(g) Med strankami na volitvah v državni zbor imamo relacijo $xRy \Leftrightarrow$ 'stranka x je dobila v DZ vsaj toliko sedežev kot stranka y'. Ugotovi, ali predstavlja relacija na množici političnih strank kako urejenost oziroma, ali je ekvivalenčna relacija.

5. Ugotovi, ali je relacija ekvivalenčna. Če je, opiši ekvivalenčne razrede in faktorsko množico.

(a) Na množici naselij je dana relacija. $xRy \Leftrightarrow$ 'od naselja x je mogoče po cesti priti do naselja y'.

(b) Na množici uporabnikov mobilnega telefona je dana relacija $xRy \Leftrightarrow$ 'obstaja oseba, ki je hkrati v osebnem imeniku obeh uporabnikov x in y'.

(c) V množici ljudi je dana relacija: $xRy \Leftrightarrow$ 'osebi x in y živita v istem kraju'.

(d) V množici ljudi je dana relacija: $xRy \Leftrightarrow$ 'osebi x in y imata skupnega bratranca'.

(e) V množici realnih števil je dana relacija: $xRy \Leftrightarrow$ 'števili x in y imata enak celoštevilski del' (na primer: $2{,}9 \; R \; 2{,}012$).

(f) V množici naravnih števil imamo relacijo: $xRy \Leftrightarrow$ 'števili x in y sta deljivi z istimi praštevili'. (Na primer, $12 \; R \; 36$, ker sta obe števili deljivi s praštevili 2 in 3; števili 4 in 6 pa nista v relaciji R, saj je 6 deljivo s 3, 4 pa ne.)

6. Dokaži, da naslednje relacije niso ekvivalenčne.

(a) v množici ljudi: $xRy \Leftrightarrow x$ in y imata isto babico

(b) v množici $\mathbb{R}$: $xRy \Leftrightarrow x \cdot y \geq 0$

(c) v množici $\mathbb{Z}$: $|x - y| < 3$

4 Funkcije

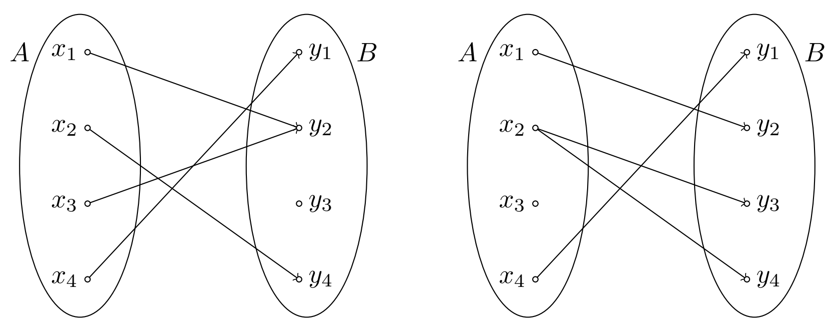
Definicija 4.1. *Funkcija* $f\colon A \to B$ je predpis ali zakon, ki priredi *vsakemu* elementu množice A *natanko določen* element množice B.

Funkcija f je definirana na množici A in ima vrednosti v množici B. Pravimo tudi, da funkcija f *preslika (upodobi)* vsak element množice A v določeni element množice B. Funkcijo imenujemo tudi *upodobitev, preslikava* ali *transformacija.* Označimo: $y = f(x)$ ali $x \mapsto f(x)$, kar pomeni, da je 'y slika x z f' ali 'x se slika v $f(x)$'.

Primer 4.1.

1. Predpis, ki realnemu številu x priredi kvadrat x^2 je funkcija na množici realnih števil.

2. Predpis, ki pozitivnemu številu x priredi število y, katerega kvadrat je x, ni funkcija; saj na primer številu $x = 4$ lahko priredimo $y = 2$ ali $y = -2$. Slika x torej ni natanko določena.



Slika 11: Prvi diagram predstavlja funkcijski predpis, drugi pa ne, ker se x_2 ne preslika enolično, x_3 pa se sploh ne preslika

Funkcijo $f\colon A \to B$ lahko predstavimo z množico urejenih parov (x, y), kjer je $y = f(x)$.

Definicija 4.2. Množico vseh takih urejenih parov oblike $(x, f(x))$ imenujemo *graf funkcije* in označimo:

$$\mathcal{G}f = \{(x, y)\colon x \in A, y = f(x)\}.$$

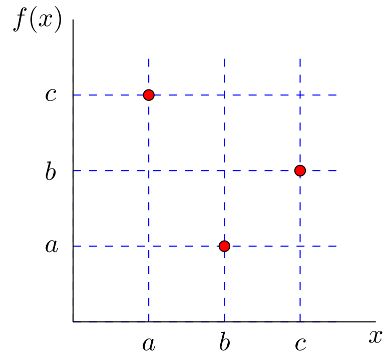
Vsak element množice A nastopa v prvi koordinati natanko enega elementa grafa funkcije. Če sta množici A in B podmnožici množice realnih števil, lahko graf funkcije prikažemo kot podmnožico v ravnini. Funkcijo lahko podamo na več načinov:

- s formulo:

$$f(x) = \cos(x^2 - 1)$$

- s tabelo:

x	1	2	3	4
$f(x)$	2	1	3	1



Slika 12: Graf funkcije iz množice $\{a, b, c\}$ vase.

- z grafom:

$$\mathcal{G}f = \{(1,3),(2,1),(3,2)\}$$

Primer 4.2.

1. Funkcija $f\colon A \to B$, ki slika vse elemente iz množice A v en sam element b iz množice B je *konstanta*. Velja $f(x) = b$ za vsak $x \in A$ ali $\mathcal{Z}f = \{b\}$.

2. Funkcija $f\colon A \to A, f(x) = x$ za vsak $x \in A$ se imenuje *identiteta* na A, id_A.

Včasih je funkcija definirana tako, da velja za različne skupine elementov različen predpis. Tako funkcijo podamo na naslednji način. Na primer

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{če je } n \text{ sodo število;} \\ 3n+1 & \text{če je } n \text{ liho število.} \end{cases}$$

4.1 Lastnosti funkcij

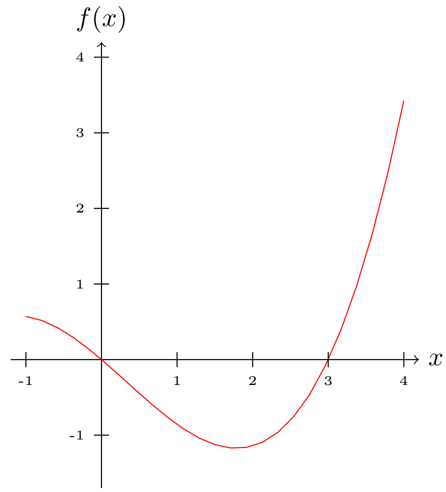
Naj bo dana funkcija $f\colon A \to B$. Na funkcijo lahko gledamo kot na relacijo med množicama A in B. Element $x \in A$ je v relaciji z elementom $y \in B$, če velja $y = f(x)$. Kot podmnožica množice $A \times B$ je ta relacija ravno graf funkcije. Podobno kot pri relacijah, lahko definiramo množico prvih koordinat grafa funkcije imenujemo *domena funkcije*, $\mathcal{D}f$. V našem primeru je to množica A. Množico vseh drugih koordinat v grafu pa imenujemo *zaloga vrednosti funkcije*, $\mathcal{Z}f$. V našem primeru velja $\mathcal{Z}f \subseteq B$.

V primeru realne funkcije, ki je podana z nekim predpisom $f(x)$, štejemo navadno za domeno množico vseh elementov, pri katerih je predpis definiran.

Primer 4.3.

1. Domena funkcije $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x + 1}$ je množica $\mathbb{R} - \{-1\}$, saj je predpis definiran za vsa realna števila razen -1.

2. Domena funkcije $f(x) = \ln(x - 3)$ pa je odprti interval $(3, \infty)$, saj je naravni logaritem definiran le za strogo pozivna števila.



Slika 13: Graf realne funkcije realne spremenljivke.

Funkcija f je *surjektivna*, če velja $\mathcal{Z}f = B$ in *injektivna*, če je vsak element zaloge vrednosti slika natanko enega elementa iz domene:

$$f \text{ je injektivna } \Leftrightarrow \ (x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)),$$

oziroma

$$f \text{ je injektivna } \Leftrightarrow \ (f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2).$$

Funkcija, ki je hkrati injektivna in surjektivna, je *bijektivna*.

Primer 4.4. Naj bo dana funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s predpisom $f(x) = (x-1)^2$.

- Ker velja $f(0) = f(2) = 1$, funkcija ni injektivna.
- Velja pa tudi $f(x) \geq 0$, zato njena zaloga vrednosti ne vsebuje negativnih realnih števil. Funkcija torej ni niti surjektivna.

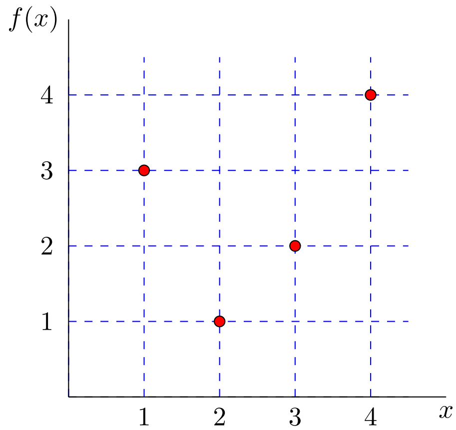
Primer 4.5. Funkcija

x	1	2	3	4
$f(x)$	3	1	2	4

je bijektivna.

Injektivnost in surjektivnost funkcije lahko prepoznamo na grafu funkcije:

- Za graf **injektivne** funkcije velja, da vsaka vodoravna črta seka graf funkcije največ enkrat.
- Za graf **surjektivne** funkcije velja, da vsaka vodoravna črta seka graf funkcije vsaj enkrat.
- Za graf **bijektivne** funkcije velja, da vsaka vodoravna črta seka graf funkcije natanko enkrat.



Slika 14: Graf funkcije iz primera 4.5.

4.2 Operacije s funkcijami

Bodita $f\colon A \to B$ in $g\colon B \to C$ funkciji. Potem lahko definiramo funkcijo iz A v C, ki element $x \in A$ najprej preslika s funkcijo f v množico B, nato pa še z g v množico C. Tako funkcijo imenujemo *kompozitum funkcij* f in g in jo označimo z $g \circ f$:

$$x \stackrel{f}{\longmapsto} f(x) \stackrel{g}{\longmapsto} (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Primer 4.6. Naj bosta dani realni funkciji

$$f(x) = (x+1)^2 \text{ in } g(x) = 2x + 4.$$

Velja

$$(f \circ g)(x) = (2x+5)^2 \text{ in } (g \circ f)(x) = 2(x+1)^2 + 4.$$

Velja še naslednje pravilo za kompozitum funkcije z identiteto. Naj bo $f\colon A \to B$. Tedaj je

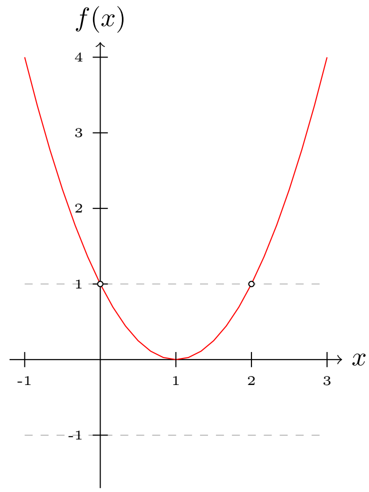
$$f \circ \mathrm{id}_A = \mathrm{id}_B \circ f = f$$

4.3 Inverzna funkcija

Naj bo $f\colon A \to B$ bijektivna funkcija. Tedaj lahko vsakemu elementu y množice B (ki je slika le enega elementa množice A), priredimo element x, ki ima lastnost $f(x) = y$. (Zaradi injektivnosti je tak element en sam.) S tem predpisom dobimo novo funkcijo, ki jo imenujemo *inverzna funkcija* funkcije f in označimo f^{-1}.

Inverzna funkcija ima naslednje lastnosti:

- inverzna funkcija je vselej bijektivna;
- $(f^{-1})^{-1} = f$;



Slika 15: Funkcija $f(x) = (x-1)^2$ ni niti injektivna niti surjektivna.

- $f \circ f^{-1}$ in $f^{-1} \circ f$ sta identiteti, prva je identiteta na B, druga pa identiteta na A.
- $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Primer 4.7. Poiščimo funkcijo inverzno funkciji

$$f(x) = 3x + 2$$

Naj bo $y = 3x + 2$. Izrazimo x kot funkcijo y:

$$x = \frac{y-2}{3}.$$

Ta predpis priredi sliki y prasliko x. Zamenjamo vlogo x in y tako, da bo neodvisna spremenljivka x:

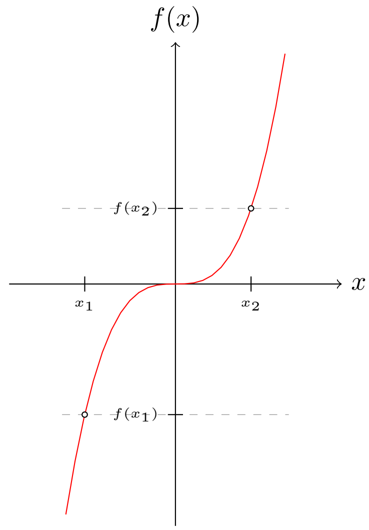
$$f^{-1}(x) = \frac{x-2}{3}.$$

4.4 Kardinalnost množic

Med dvema končnima množicama obstaja bijektivna preslikava natanko tedaj, ko imata enako število elementov, sta *ekvipolentni* oziroma imata enako *kardinalnost*. Za splošni množici pravimo, da sta ekvipolentni oziroma imata enako kardinalnost natanko tedaj, ko med njima obstaja kaka bijektivna preslikava.

Primer 4.8.

1. Množice, ki so ekvipolentne množici $\mathbb{N}$, so *števno neskončne*.
2. Množice, ki so ekvipolentne množici $\mathbb{R}$, imajo *moč kontinuuma*.
3. Množica sodih števil je števno neskončna.



Slika 16: Funkcija $f(x) = x^3$ je bijektivna.

Dokaz. Trditev dokažemo tako, da poiščemo bijektivno preslikavo iz množice naravnih v množico sodih števil. Taka funkcija je funkcija $f(n) = 2n$. Inverzna funkcija $f^{-1}(n) = n/2$ pa vsakemu sodemu številu priredi naravno število. $\square$

Kardinalnost množice A označimo z $|A|$. Za končne množice velja, da je $|A|$ neko naravno število ali 0 za prazno množico. Za kardinalnost množice naravnih števil pa uporabljamo simbol $\aleph_0$ ('alef nič'). Kardinalnost vsake števno neskončne množice je torej enaka $\aleph_0$. Števna množica je na primer tudi množica vseh racionalnih števil, medtem ko je množica vseh realnih števil neštevna.

Naloge

1. Dani sta množici $A = \{1, 2, 3, 4\}$ in $B = \{a, b, c, d\}$ ter funkcija $f\colon A \to B$, ki je podana s tabelo

x	1	2	3	4
$f(x)$	c	b	d	a

Dokaži, da je f obrnljiva funkcija in določi njeno inverzno funkcijo.

2. S tabelama sta podani funkciji f in g. Za vsako od funkcij f in g ugotovi, ali je injektivna oziroma surjektivna. S tabelo podaj funkciji $f \circ g$ in $g \circ f$ in za vsako ugotovi, ali je injektivna, surjektivna oziroma bijektivna.

(a)

x	a	b	c	d
$f(x)$	b	d	c	d

x	a	b	c	d
$g(x)$	c	b	d	a

(b)

x	1	2	3	4
$f(x)$	2	3	1	4

x	1	2	3	4
$g(x)$	3	1	3	4

3. Dani sta realni funkciji f in g. Določi kompozita $f \circ g$ in $g \circ f$ ter njuni zalogi vrednosti. Za funkcije $f, g, f \circ g$ in $g \circ f$ določi zalogo vrednosti in ugotovi ali so injektivne, surjektivne oziroma bijektivne.

(a) $f(x) = 3x + 2$ in $g(x) = (x + 1)^2 - 1$

(b) $f(x) = x^2 - 4x + 4$ in $g(x) = 2x - 1$

(c) $f(x) = \sqrt{x + 3}$ in $g(x) = x + 3$

4. Dokaži, da je množica celih števil ekvipolentna množici naravnih števil.

5 Kombinatorika

5.1 Osnovna pravila

Kombinatorika je matematična disciplina, ki se ukvarja s preštevanjem. Ponavadi to pomeni, da nas zanima število različnih načinov, na katere lahko izvedemo nek proces. Vzemimo na primer nogometni turnir, na katerem igra n moštev. S kombinatorično analizo lahko preštejemo na primer:

1. v koliko različnih vrstnih redih jih lahko zapišemo v seznam tekmovanja;
2. na koliko različnih načinov lahko igrajo tekme, če mora vsako moštvo odigrati natanko k tekem;
3. na koliko različnih načinov so lahko na koncu razdeljene točke.

Število načinov, na katere se kaj lahko zgodi je lahko pomembno iz različnih razlogov. V verjetnostnem računu je namreč število različnih izidov osnova za računanje verjetnosti. Pri načrtovanju algoritmov pa je število možnosti, ki jih mora algoritem pregledati osnova za ugotavljanje njegove časovne in prostorske zahtevnosti. Pri dodeljevanju IP številk računalnikom povezanim v svetovni splet je vprašanje, ali lahko vsakemu dodelimo drugačno številko.

Naštejmo najprej nekaj osnovnih pravil, s katerimi si lahko pomagamo pri preštevanju.

Pravilo 5.1 (Osnovni izrek kombinatorike – pravilo produkta)**.** Če lahko nek proces izvedemo v k korakih, pri čemer imamo na i-tem koraku natanko n_i možnosti, neodvisno od tega, katero možnost smo izbrali na prejšnjih korakih, je skupno število vseh izborov enako $n_1 n_2 \cdots n_k$.

Oglejmo si primer uporabe tega pravila.

Primer 5.1. Izdelovalec programske opreme mora program pred izdajo testirati na različnih kombinacijah operacijskih sistemov in strojne opreme. Ključna za delovanje se izkažeta, poleg operacijskega sistema, tip grafične kartice in nabor čipov na osnovni plošči. Program želijo testirati za vse mogoče kombinacije. Koliko testiranj bo potrebno opraviti, če bo program na voljo za tri operacijske sisteme in ga želijo testirati za šest tipov grafičnih kartic in štiri nabore čipov na osnovnih ploščah.

Problem rešimo z osnovnim izrekom kombinatorike. Naj bo (x, y, z) trojica, pri kateri predstavlja x operacijski sistem, y tip grafične kartice in z nabor čipov na osnovni plošči. Do vseh različnih sistemov pridemo lahko tako, da izbiramo v treh korakih, najprej x, nato y in nazadnje z. Na prvem koraku imamo tako tri, na drugem šest in na tretjem štiri možnosti, ki niso odvisne od izbora na prejšnjih korakih. Po osnovnem izreku kombinatorike je treba izvesti testiranje na skupno $3 \cdot 6 \cdot 4 = 72$ različnih konfiguracijah računalnikov.

Osnovnemu izreku kombinatorike dodamo še naslednje pravilo, ki govori o številu elementov unije množic. Število elementov množice A navadno imenujemo *moč množice* in jo označimo z $m(A)$.

Pravilo 5.2 (Načelo vključitev in izključitev)**.** Imejmo k končnih množic $A_1, \ldots, A_k$. Tedaj velja naslednja zveza med močjo unije in presekov množic:

$$m(A_1 \cup \ldots \cup A_k) = \sum_{I \subseteq \{1,\ldots,k\}} (-1)^{m(I)-1} m\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right).$$

V praksi pomeni zgornja zveza tole: če ugotavljamo moč unije množic, naprej seštejemo moči posameznih množic, tem odštejemo moči presekov vseh možnih parov množic, nato prištejemo vse možne preseke trojic množic... Izmenično seštevanje in odštevanje ponavljamo toliko časa, dokler niso vsi preseki prazni, oziroma po k korakih. V primeru dveh množic velja

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B).$$

Primer 5.2. Iz skupine petih oseb, med katerimi sta tudi Ivana in Francè, izberemo dve osebi. Zanima nas, koliko je izborov, v katerih je vsaj eden od omenjenih.

Označimo z A množico tistih izborov, v katerih je Ivana, z B pa tiste izbore, v katerih je Francè. Izbori v katerih je vsaj eden od njiju sestavljajo množico $A \cup B$. Moč množice $A \cup B$ bomo izračunali s pomočjo moči množic A, B in $A \cap B$, ki jih je lažje določiti. Ivana je lahko izbrana s katero koli od preostalih štirih oseb, zato velja $m(A) = 4$ in prav tako $m(B) = 4$. Skupaj sta lahko v natanko enem izboru, oziroma $m(A \cap B) = 1$. Od sledi $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B) = 4 + 4 - 1 = 7$.

5.2 Permutacije

Naj bo danih n različnih elementov. Zanima nas, v koliko različnih vrstnih redov jih lahko razporedimo. Če imamo na primer tri elemente a, b in c, se lahko hitro prepričamo, da so vsi mogoči vrstni redi naslednji: abc, acb, bac, bca, cab in cba. Različnim vrstnim redom elementov pravimo *permutacije*. Jasno je, da je število permutacij različnih permutacij odvisno le od števila elementov. Do števila vseh permutacij pridemo z uporabo osnovnega izreka kombinatorike. Izbiramo v n korakih:

1. Na prvo mesto postavimo katerikoli element. Pri tem imamo n možnosti.
2. Na drugo mesto lahko postavimo kateregakoli od preostalih elementov, pri čemer imamo le še $n - 1$ možnosti.
3. Postopek nadaljujemo do zadnjega mesta, na katerega lahko postavimo le še edini preostali element, se pravi, da imamo samo še eno možnost.

Ker smo za vsako naslednje mesto lahko izbirali med enim elementom manj, je po osnovnem izreku kombinatorike vseh izborov $n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1 = n!$. Število permutacij n elementov označimo s P_n. Ugotovili smo torej, da velja:

$$P_n = n!$$

Primer 5.3. V teku tekmuje pet moških in tri ženske.

(a) Na koliko načinov se lahko razvrstijo na cilju?

(b) Koliko pa je teh načinov, če razvrščamo posebej moške in ženske?

Rešitev:

(a) Vseh možnih razvrstitev je $P_8 = 8! = 40\,320$.

(b) Če pa razvrščamo moške in ženske posebej, imamo pri moških $P_5 = 5! = 120$ in pri ženskah $P_3 = 3! = 6$ možnih razvrstitev. Skupno število razvrstitev pa je po pravilu produkta $P_5 \cdot P_3 = 120 \cdot 6 = 720$.

Nekoliko splošnejši primer permutacij imamo, če razvrščamo elemente, ki niso vsi različni. Denimo, da nas zanimajo vse razvrstitve iz črk A, B, E, C, E, D, A. Vsi različni vrstni redi teh črk seveda niso različni, saj se vsaka od črk A in E ponovi dvakrat. Če bi imeli namesto danih črk na primer črke A, B, E, C, e, D, a, bi bilo število vseh razvrstitev enako $P_7 = 7!$. Opazimo lahko, da postaneta, ko zanemarimo velikost črke A, natanko dva niza enaka. Na primer BEACaED in BEaCAED. Enako velja tudi za črko E. Podobno bi lahko ugotovili, da postane z izenačenjem k elementov $k!$ razvrstitev enakih. Od tod lahko sklepamo, da je število različnih permutacij, pri katerih smo izenačili k elementov, enako

število vseh permutacij/število permutacij izenačenih elementov

V splošnem imamo m elementov, pri čemer se i-ti element ponovi natanko k_i-krat. Takim razvrstitvam pravimo *permutacije s ponavljanjem.* Njihovo število pa je

$$P_n^{k_1,k_2,\ldots,k_m} = \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!},$$

pri čemer je $n = k_1 + \ldots + k_m$ skupno število vseh ponovitev elementov.

Primer 5.4. Število vseh razvrstitev črk A, B, E, C, E, D, A je enako

$$P_7^{2,2,1,1,1} = \frac{7!}{2!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!}.$$

Ker je $1! = 1$, pisanje ponovitev tistih elementov, ki se ponovijo le enkrat, ni potrebno. Zato navadno pri permutacijah s ponavljanjem označimo le ponovitve elementov, ki se ponovijo več kot enkrat. Število razvrstitev črk torej lahko označimo z

$$P_7^{2,2} = \frac{7!}{2!\cdot 2!}.$$

Primer 5.5. Ana trikrat na teden obišče svojo prijateljico Matejo. Na koliko različnih načinov lahko to stori.

Označimo z A dneve v tednu, na katere Ana obišče Matejo in z B tiste, na katere je ne obišče. Imamo torej niz v katerem so trije dnevi z oznako A in štirje z oznako B. Število vseh možnih razvrstitev teh dni je enako

$$P_7^{3,4} = \frac{7!}{3!\cdot 4!} = 35.$$

Vrnimo se spet na razvrščanje n različnih elementov. Do sedaj so nas zanimale le tiste razvrstitve, pri katerih smo razvrstili vse elemente. Kaj pa če bi jih izmed teh izbrali le $r \leq n$? Takim razvrstitvam pravimo *variacije (brez ponavljanja).* Njihovo število pa označimo z V_n^r, pri čemer pravimo številu mest za razvrščanje, r, *red variacije.* Na podoben način kot smo ugotovili število permutacij, lahko ugotovimo da je število variacij reda r iz n elementov enako

$$V_n^r = n(n-1)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Primer 5.6. V slaščičarni prodajajo dvanajst okusov sladoleda. Na koliko načinov lahko kupimo sladoled s tremi kepicami z različnimi okusi?

Izbiramo tri različne okuse izmed dvanajstih. Število vseh izborov je

$$V_{12}^3 = 12\cdot 11\cdot 10 = 1320.$$

V primeru variacij je zanimiv tudi primer, ko se elementi lahko ponavljajo. Natančneje, če se vsak element lahko ponovi poljubno mnogokrat. Tak primer je na primer izbor vseh tri-črkovnih kratic iz črk slovenske abecede, ali izbor vseh telefonskih števil. V splošnem imamo torej n različnih elementov, ki jih razporejamo na r mest, pri čemer lahko iste elemente brez omejitev uporabimo ponovno. Takim razvrstitvam pravimo *variacije s ponavljanjem reda r iz n elementov.* Njihovo število pa označimo z ${}^{(p)}V_n^r$. Tu seveda ni potrebna omejitev $r \leq n$. S podobnim sklepanjem kot pri variacijah brez ponavljanja ugotovimo

$$ {}^{(p)}V_n^r = n^r. $$

Primer 5.7. Ugotovimo, koliko je vseh različnih nizov iz treh črk slovenske abecede.

Razporejamo 25 črk na 3 mesta. Število takih razvrstitev je

$$ {}^{(p)}V_{25}^3 = 25^3 = 15\,625. $$

Primer 5.8. Mojca ima pet različnih kemičnih svinčnikov v treh predalih. Na koliko načinov so lahko razporejeni po predalih?

Vsak kemični svinčnik je lahko v enem od treh predalov. Ker je svinčnikov pet, lahko izbiramo tako, da se pri vsakem odločimo, v kateri predal ga bomo dali. Število takih izborov pa je enako številu variacij s ponavljanjem:

$$ {}^{(p)}V_3^5 = 3^5 = 243. $$

5.3 Kombinacije

Pri izbiranju r elementov iz množice n elementov nas pogosto zanima le, kateri elementi so izbrani, ne pa v kakšnem vrstnem redu. Če se elementi ne ponavljajo, govorimo o *kombinacijah reda r iz n elementov*, njihovo število pa označimo z C_n^r. Do števila kombinacij lahko pridemo na naslednji način. Uredimo danih n elementov v nekem vrstnem redu in jim dajmo dve vrsti oznak: *izbran* in *neizbran.* Ker izbiramo r elementov, jih ima toliko oznako *izbran*, preostalih $n - r$ pa ima oznako *neizbran.* Vsaka različna razporeditev oznak pomeni drugačen izbor r elementov. Take razporeditve pa so ravno permutacije dveh elementov (oznak), pri čemer se prvi ponovi r-krat, drugi $(n-r)$-krat. Število kombinacij brez ponavljanja reda r iz n elementov je torej enako

$$ C_n^r = \frac{n!}{n!(n-r)!} =: \binom{n}{r}. $$

To število smo označili z oznako, ki jo imenujemo *binomski simbol*, njegova vrednost pa se imenuje *binomski koeficient.* Ime izvira iz uporabe pri potencah binomov. Naštejmo nekaj najpomembnejših lastnosti binomskih koeficientov:

(a) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1;$

(b) $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r};$

(c) $\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}.$

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}
$$

Slika 17: Pascalov trikotnik: binomski koeficient $\binom{n}{r}$ je r-ti element v n-ti vrstici, pri čemer začnemo vrstice in elemente številčiti z 0.

Lastnost (a) pomeni, da je le en izbor, ko izberemo vse oziroma nič elementov. Lastnost (b) pove, da je število izborov, ko izbiramo r elementov enako številu izborov preostalih $n-r$ elementov. Lastnost (c) pa je pomembna kot rekurzivna enačba, iz katere lahko računamo binomske koeficiente pri večjih n iz tistih pri manjših.

Lastnosti binomskih koeficientov lahko prikažemo s *Pascalovim trikotnikom* (slika **??**).

Primer 5.9. V podjetju so tri enote, ki imajo po $5, 10$ in 15 zaposlenih.

(a) Na koliko načinov lahko sestavijo šestčlanski odbor?

(b) Na koliko načinov lahko sestavijo tak odbor, če mora imeti v njem prva enota enega, druga dva in tretja tri člane?

Rešitev:

(a) Izbiramo šest izmed tridesetih delavcev, kar lahko storimo na

$$C_{30}^6 = \binom{30}{6} = 593\,775$$

načinov.

(b) Izbor opravimo tako, da iz vsake enote posebej izberemo člane odbora, pri čemer imamo $\binom{5}{1}, \binom{10}{2}$ oziroma $\binom{15}{3}$ možnosti, od koder dobimo po pravilu produkta

$$\binom{5}{1} \cdot \binom{10}{2} \cdot \binom{15}{3} = 5 \cdot 45 \cdot 455 = 102\,375$$

vseh možnih izborov.

V verjetnostnem računu pa je pomembna še naslednja posplošitev pojma kombinacij brez ponavljanja. Izbiranje r elementov iz množice n elementov lahko razumemo tudi kot delitev dane množice v dve skupini, z r in $n-r$ elementi. Denimo, da bi zdaj elemente te množice radi razdelili v k skupin z $r_1, r_2, \ldots, r_k$

elementi, pri čemer velja $r_1 + r_2 + \ldots + r_k = n$. Na koliko načinov lahko to storimo? Podobno kot pri kombinacijah, lahko zdaj dodelimo vsakemu elementu namesto ene od dveh, eno od k oznak, ki pomenijo pripadnost posamezni skupini. Če te oznake dodelimo elementom tako, da dobi vsak element natanko eno, lahko različne izbore spet predstavimo kot različne permutacije s ponavljanjem k različnih elementov, pri čemer r_i predstavljajo števila ponovitev posameznega elementa. Od tod lahko sklepamo, da je število takih izborov enako

$$\binom{n}{r_1, r_2, \ldots, r_k} := \frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdots r_k!}.$$

Zgornjo oznako imenujemo *multinomski simbol*, njegovo vrednost pa *multinomski koeficient*.

Primer 5.10. Zavarovalnica ponuja tri vrste življenjskih zavarovanj, A, B in C. V nekem dnevu so zavarovali deset novih strank, pri čemer jih je pet izbralo zavarovanje A, trije B in dva C. Na koliko načinov so se lahko zavarovanci zavarovali?

Deset zavarovancev razporejamo v tri skupine, pri čemer mora prva šteti pet, druga tri in tretja dva člana. Število takih razporedov je enako

$$\binom{10}{5, 3, 2} = \frac{10!}{5! \cdot 3! \cdot 2!} = 2520.$$

Imejmo spet množico z n različnimi elementi iz katere izbiramo r elementov, pri čemer se sme vsak element poljubno mnogokrat ponoviti, ne zanima pa nas vrstni red, v katerem so bili izbrani. V tem primeru govorimo o *kombinacijah s ponavljanjem reda r iz n elementov*. Njihovo število označimo s simbolom ${}^{(p)}C_n^r$. Da bi ugotovili število takih razvrstitev, razmišljajmo podobno kot pri kombinacijah brez ponavljanja. Tam smo vsem elementom dodelili oznako, ki je povedala, ali je element izbran ali ne. Pri tem je moralo biti število oznak za izbor enako r. V primeru, ko se elementi lahko ponavljajo, je vsak element lahko izbran tudi večkrat, toda skupno število vseh izborov mora biti še vedno enako r. Denimo, da bi imeli elemente A, B in C, ki bi jih razporejali s ponavljanjem v skupino velikosti 5 elementov. Eden od načinov, kako lahko enolično prikažemo posamezen izbor je, da vsakemu elementu priredimo število ponovitev v izboru. Tako bi na primer $(A, 4; B, 1; C, 0)$ pomenilo, da je bil element A izbran štirikrat, element B enkrat, element C pa ni bil izbran. V splošnem bi vsak izbor v tem primeru lahko predstavili kot $(A, k_1; B, k_2; C, k_3)$, pri čemer je pogoj, da je vsota $k_1 + k_2 + k_3$ enaka 5. Število izborov je torej enako številu rešitev enačbe

$$k_1 + k_2 + k_3 = 5,$$

pri čemer so k_1, k_2 in k_3 nenegativna cela števila.

Zgornje ugotovitve lahko posplošimo v naslednjo trditev.

Trditev 5.1. *Število kombinacij s ponavljanjem reda r iz n elementov je enako številu nenegativnih celoštevilskih rešitev enačbe*

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_n = r. \tag{8}$$

Lažje kot ugotoviti število nenegativnih rešitev take enačbe, pa je ugotoviti število (strogo) pozitivnih rešitev. Denimo, da nas zanimajo vse pozitivne celoštevilske rešitve enačbe

$$k_1 + k_2 + k_3 = 5.$$

Velja $5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$. Vidimo, da ta zapis vsebuje $4 = 5 - 1$ znake $+$. Če izberemo katerakoli dva $+$, dobimo s tem neko rešitev enačbe. Če na primer izberemo prvi in tretji $+$, dobimo $5 = 1 {\color{red}+} 1 + 1 {\color{red}+} 1 + 1 =$

$1+2+2$. Očitno je, da z različnimi izbori dveh znakov + dobimo vse možne rešitve zgornje enačbe. Toda število takih izborov je ravno število kombinacij brez ponavljanja reda 2 iz 4 elementov. Tudi to ugotovitev lahko posplošimo.

Trditev 5.2. *Število pozitivnih celoštevilskih rešitev enačbe*

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_n = r$$

je enako številu kombinacij brez ponavljanja reda $n-1$ iz $r-1$ elementov, kar je enako

$$\binom{r-1}{n-1}.$$

Kako pa si lahko z zgornjo rešitvijo pomagamo pri iskanju števila vseh nenegativnih rešitev? Naj bo $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = r$ neka nenegativna rešitev. Tedaj je $(k_1+1)+(k_2+1)+\cdots+(k_n+1) = r+n$ pozitivna rešitev enačbe

$$l_1 + l_2 + \cdots + l_n = r + n. \tag{9}$$

Hitro pa se lahko prepričamo, da lahko vsaki nenegativni rešitvi enačbe (8) po zgornjem postopku priredimo enolično določeno pozitivno rešitev enačbe (9) in obratno. Ugotovili smo torej:

Trditev 5.3. *Število nenegativnih rešitev enačbe* (8) *je enako številu pozitivnih rešitev enačbe* (9) *in to je enako*

$$\binom{r+n-1}{n-1} = \binom{n+r-1}{r}.$$

Dokaz. Da je število pozitivnih rešitev enačbe (9) enako $\binom{r+n-1}{n-1}$, sledi iz trditve 5.2, enakost $\binom{r+n-1}{n-1} = \binom{n+r-1}{r}$ pa sledi iz $r = (n+r-1)-(n-1)$ in lastnosti (b) binomskih koeficientov. □

Če upoštevamo še trditev 5.1, lahko izpeljemo naslednjo posledico.

Posledica 5.1. *Število kombinacij s ponavljanjem reda r iz n elementov je enako*

$$^{(p)}C_n^r = \binom{n+r-1}{r}.$$

Naloge

1. Na neki konferenci govorijo udeleženci tri različne jezike: latinsko, grško in angleško. Latinsko govori 32, grško 35 in angleško 40 udeležencev. Od tega govori latinsko in grško 19, grško in angleško 17 ter angleško in latinsko 15 udeležencev. Vse tri jezike govori 12 udeležencev konference.

(a) Predstavi udeležence konference glede na jezik, ki ga govorijo, z Vennovim diagramom.

(b) Koliko udeležencev konference govori latinsko ali grško?

(c) Koliko je vseh udeležencev konference? (Odgovor poišči po formuli za moč unije množic in ga preveri z Vennovim diagramom iz točke (a).)

(d) Koliko udeležencev konference govori natanko dva jezika?

2. V neki skupini za rekreacijo igrajo košarko, nogomet in rokomet. Košarko jih igra 53, nogomet 51 in rokomet 56. Košarko in nogomet jih igra 29, košarko in rokomet 30 ter nogomet in rokomet 27. Vse tri športe jih igra 17.

(a) Predstavi člane skupine glede na šport, ki ga igrajo, z Vennovim diagramom.

(b) Koliko članov skupine igra košarko ali nogomet?

(c) Koliko je vseh članov skupine?

(d) Koliko članov skupine igra le en šport?

3. V razredu želijo sestaviti glasbeno skupino, ki bo igrala na novoletni zabavi. Izbrati morajo kitarista, bobnarja in pevko. Kitaro igrajo trije učenci, bobne dva, od katerih noben ne igra kitare, poje pa šest učenk. Na koliko načinov lahko sestavijo skupino?

4. Marko se odloča za vpis na fakulteto. Izbira med štirimi fakultetami. Na vsaki od njih je pet dodiplomskih in trije podiplomski programi. Na koliko različnih načinov lahko študira, če želi končati tudi podiplomski študij. (Predpostavi še, da se med študijem ne bo prepisal ali spremenil svoje odločitve in mora pred podiplomskim končati dodiplomski študij.)

5. Na koliko načinov lahko pošljemo pet različnih razglednic petim prijateljem?

6. V koliko vrstnih redih lahko obiščemo šest slovenskih krajev, če

(a) nimamo omejitev?

(b) je med njimi tudi Ptuj, ki ga moramo obiskati prvega?

(c) Ljubljane ne smemo obiskati zadnje?

7. Koliko šestmestnih števil lahko sestavimo iz treh dvojk, dveh štiric in ene sedmice?

8. Na koliko načinov lahko v trgovini deset ljudi izbere rdeč, moder in črn plašč, če

(a) imajo v trgovini samo en plašč vsake barve (torej bodo dobili plašč le trije kupci)?

(b) če imajo v trgovini na zalogi vsaj še deset plaščev vsake barve in kupi plašče vseh deset kupcev?

9. V koliko različnih vrstnih redih lahko razporedimo v vrsto bele šahovske figure. (Pri šahu je 16 belih figur, od tega 8 kmetov, po dva topa, konja in lovca ter kralj in kraljica.)

10. Na polico želimo razvrstiti 8 knjig, med katerimi so tudi Prešernove Poezije in Slovenski pravopis. Na koliko različnih načinov lahko to storimo, če

(a) nimamo omejitev?

(b) morajo Poezije stati na prvem mestu?

(c) Slovenski pravopis ne sme stati na zadnjem mestu?

11. Koliko besed lahko sestavimo iz črk (za besedo štejemo vsak niz, sestavljen iz naštetih črk):

(a) Z, G, O, Š, Č, E, N, K, A ?

(b) A, V, T, O, M, O, B, I, L ?

(c) P, O, N, A, V, L, J, A, N, J, E ?

12. Koliko različnih števil lahko sestavimo iz števk 2,4,4,6,3,1?

13. Pet parov je povabljenih na zabavo. Na koliko načinov jih gostiteljica lahko posede, če

(a) ni važno kdo kje sedi?

(b) naj mož in žena sedita skupaj?

(c) naj ženske sedijo skupaj, prav tako pa tudi moški?

14. Ugotovi, koliko je vseh mogočih tri-črkovnih nizov iz črk slovenske abecede, če

(a) so dovoljene vse mogoče kombinacije.

(b) na prvem mestu ne stoji soglasnik.

(c) dve enaki črki ne smeta stati skupaj. (Namig: preštej vse take kratice, pri katerih stojita skupaj po dve enaki črki, in tiste, pri katerih so vse črke enake.)

15. Zanimajo nas bijektivne preslikave iz množice $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ v množico $B = \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

(a) Koliko je vseh takih preslikav?

(b) Koliko je med njimi takih preslikav, ki slikajo 1 v 7?

(c) Koliko je med njimi takih preslikav, ki slikajo vsa soda števila v soda?

16. Iz množice števil $\{1, 2, \dots, 20\}$ slučajno izbiramo 5 števil. Koliko je vseh takih izborov, če

(a) se števila smejo ponavljati in upoštevamo različne vrstne rede?

(b) se izbrana števila smejo ponavljati in jih uredimo od najmanjšega do največjega?

17. Ugotovi, koliko je vseh injektivnih preslikav $f\colon A \to B$, pri čemer sta $A = \{1, 3, 5, 7\}$ in $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$, če

(a) ni drugih omejitev?

(b) se mora število 7 slikati v število, ki je večje od 9?

(c) se števili 1 in 5 ne smeta slikati v katero od števil 10, 12 ali 14?

18. Iz množice 30 ljudi (10 moških in 20 žensk) izbiramo vzorec 5 ljudi. Na koliko načinov lahko to storimo, če

(a) ni drugih omejitev?

(b) moramo v vzorec izbrati 2 moška in 3 ženske?

(c) morata biti v vzorcu najmanj dve ženski?

19. Pet prijateljev igra karte. Trenutno imajo vsi skupaj v rokah vseh 52 kart. Na koliko načinov so lahko karte razporejene med igralci?

20. Dvanajst tekmovalcev se je pomerilo v skoku v daljino. Na koncu so prvim trem podelili zlato, srebrno in bronasto medaljo. Na koliko različnih načinov bi lahko podelili medalje? (Predpostavimo še, da nobenega od prvih treh mest ne deli več tekmovalcev.)

21. Študent hodi na kosilo vsak dan v eno od treh restavracij. Na koliko načinov lahko kósi od ponedeljka do petka, če:

(a) vsak dan lahko izbira med vsemi restavracijami?

(b) sta ob torkih odprti le dve restavraciji?

(c) je ob ponedeljkih odprta le ena, ob petkih pa dve restavraciji?

22. V trgovini kupimo 5 zvezkov. Zvezki, ki so na voljo, imajo platnice v štirih različnih barvah. Na koliko načinov lahko nakupimo zvezke? (Zvezkov vsake barve imajo v trgovini vsaj še 5.)

23. Na koliko načinov lahko izpišemo po abecednem redu pet imen iz seznama 20 imen?

24. Na izpitu dobi študent tri vprašanja.

(a) Na koliko načinov je lahko sestavljen izpit, če so vprašanja izbrana s seznama 30 izpitnih vprašanj?

(b) Na koliko načinov pa je lahko sestavljen izpit, če vemo, da sta prvi dve vprašanji izbrani izmed prvih dvajsetih, tretje pa izmed zadnjih desetih vprašanj?

6 Grafi

6.1 Osnovni pojmi

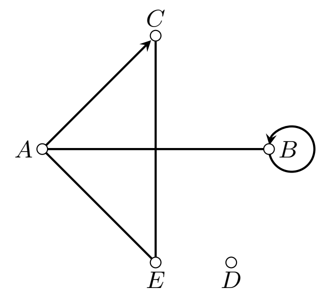
Definicija 6.1. *Graf* je diagram, ki ga sestavljajo

točke ali *vozlišča*, ki jih označimo z $A, B, \ldots$;

povezave: vsaka od njih povezuje dve točki grafa. Povezavo, ki povezuje točki A in B označimo z $e = (A, B)$.

Množico točk označimo z $V(G)$ ali preprosto V in množico povezav s $P(G)$ ali samo P. Zapišemo: $G = (V, P)$. Za točki, ki ju povezuje povezava iz P pravimo, da sta *sosedni*. Za povezavo $e = (A, B)$, ki povezuje točki A in B, pa pravimo, da je incidenčna s točkama A in B. Točki A in B sta *krajišči* povezave e. Točka, ki ni povezana z nobeno drugo točko, se imenuje *izolirana točka*. Zahtevamo lahko še dodatne lastnosti grafa:

- Povezave grafa so lahko *usmerjene* ali *neusmerjene*. Če ima graf le neusmerjene povezave, pravimo, da je graf *neusmerjen*.
- Če vsaka povezava povezuje različni točki – ni *zank*, in sta poljubni točki povezani kvečjemu z eno povezavo – ni *vzporednih povezav*, imenujemo graf *enostavni graf*.



Slika 18: Graf vsebuje neusmerjene povezave, npr. (A, E); usmerjene povezave, npr. (A, C). Točka B je povezana sama s seboj z zanko. Točka D pa je izolirana točka.

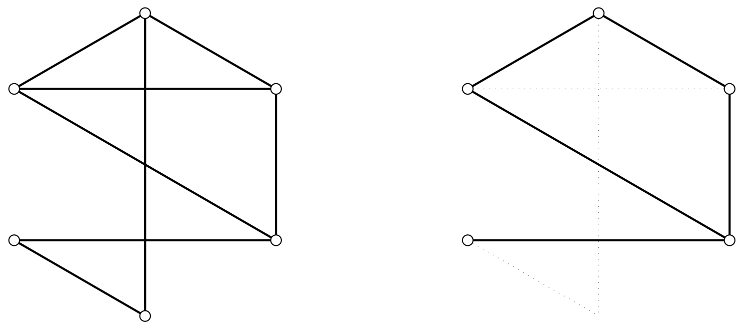
Tu bomo obravnavali le *enostavne neusmerjene grafe*. V takem grafu porodi množica povezav relacijo na množici točk. Točki sta v relaciji, natanko tedaj, ko sta povezani. Taka relacija je pri neusmerjenem grafu simetrična. Število točk, sosednjih z dano točko A, imenujemo *stopnja točke A* in jo označimo z $d(A)$. Označimo z n število točk grafa G, z m pa število njegovih povezav in naj bodo $d_1, d_2, \ldots, d_n$ vse stopnje točk danega grafa. Lahko se je prepričati o naslednjih lastnostih:

1. Vsota stopenj točk grafa je enaka dvakratnemu številu povezav:

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2m;$$

2. Od tod sledi, da je vsota stopenj točk v grafu vedno sodo število.
3. Od tod pa spet enostavno sledi, da je število točk lihe stopnje vedno sodo.

Če grafu odstranimo poljubno število točk ali povezav, dobimo *podgraf* danega grafa. Vedno ko odstranimo točko, moramo odstraniti tudi vse povezave, ki so z njo incidenčne. *Komplement grafa G* je graf, ki ga označimo z $\bar{G}$, ki ima isto množico točk kot G, povezani pa so natanko tisti pari točk, ki niso povezani v grafu G.



Slika 19: Drugi graf je podgraf prvega.

6.2 Osnovni primeri grafov

Pri obravnavi grafov pogosto naletimo na naslednje tipe grafov, ki nastopajo samostojno ali kot podgrafi drugih grafov:

polni graf je graf, v katerem so povezani vsi pari točk in ga označimo s K_n;

ničelni graf je graf z n točkami, a brez povezav;

pot je graf z n točkami, ki jih lahko označimo z $A_1, \ldots, A_n$, pri čemer so povezani vsi pari točk A_i in A_{i+1} za $i = 1, \ldots, n-1$; pot označimo s P_n; prvo in zadnjo točko poti imenujemo *krajišči poti*;

cikel je graf podoben poti, pri čemer pa sta prva in zadnja točka enaki; cikel z n točkami označimo s C_n; cikel, ki ima sodo oziroma liho število točk, imenujemo *sodi* oziroma *lihi cikel*.

6.3 Izomorfizem grafov

Imejmo grafa $G_1 = (V_1, P_1)$ in $G_2 = (V_2, P_2)$. *Izomorfizem grafov* je bijektivna preslikava $f\colon V_1 \to V_2$, ki ohranja sosednost:

$$(A, B) \in P_1 \iff (f(A), f(B)) \in P_2.$$

Grafa, med katerima obstaja izomorfizem, sta *izomorfna*.

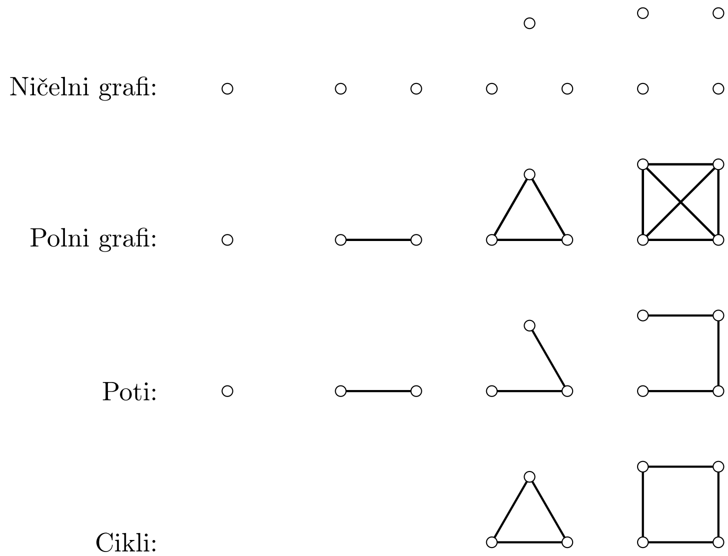
Izomorfizem med grafoma iz slike 21 je na primer preslikava f podana s tabelo:

T	A	B	C	D
$f(T)$	B	C	D	A

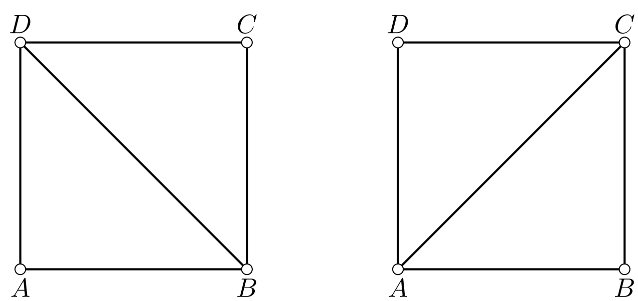
6.4 Dvodelni grafi

Graf je *dvodelen*, če lahko množico njegovih točk V razbijemo v dve disjunktni podmnožici V_1, V_2, tako da noben par točk, ki pripadata isti podmnožici, ni povezan. V dvodelnem grafu lahko točko pobarvamo z dvema barvama tako, da nobeni dve sosednji točki nista pobarvani z isto barvo.

Izrek 6.1.



Slika 20: Primeri osnovnih tipov grafov



Slika 21: Izomorfna grafa

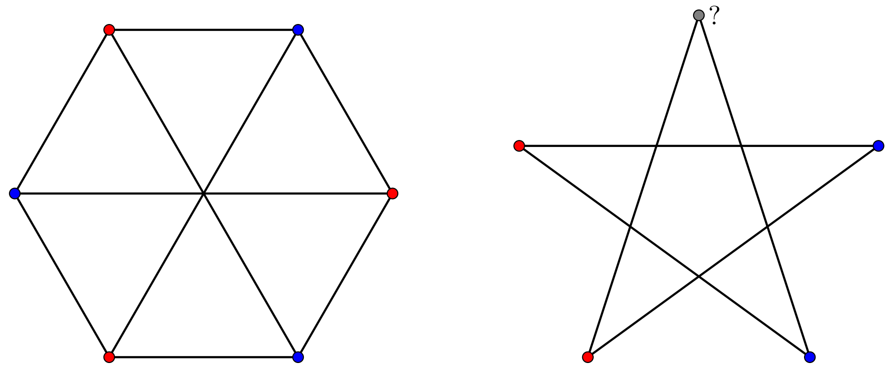
1. *Vsak podgraf dvodelnega grafa je tudi sam dvodelen graf.*

2. *Graf je dvodelen natanko tedaj, ko ne vsebuje lihih ciklov kot podgrafov.*

6.5 Regularni grafi

Graf je *regularen*, če imajo vse njegove točke isto stopnjo. Če imajo vse točke grafa stopnjo d pravimo, da je graf *regularen stopnje* d ali d-*valenten*.

6.6 Sprehodi in obhodi

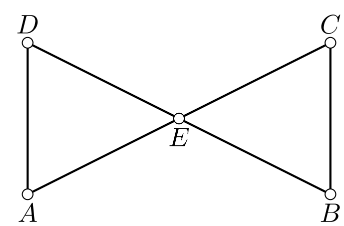


Slika 22: Prvi graf je dvodelen, drugi pa je lih cikel, zato ga ne moremo pobarvati z dvema barvama.

Sprehod v grafu je tako zaporedje ne nujno različnih točk $A_1, \ldots, A_r$, da velja $(A_i, A_{i+1}) \in P$ za $i = 1, \ldots, r-1$. Točki A_1 in A_r sta *krajišči sprehoda*. Če velja $A_1 = A_r$, pravimo takemu sprehodu *obhod*.

Sprehod (obhod), v katerem se točke sicer ponavljajo, povezave pa ne, imenujemo *enostavni sprehod (obhod)*. Graf G je *povezan*, če med poljubnima točkama A in B obstaja tak sprehod, da sta ti točki njegovi krajišči.

Eulerjev sprehod (obhod) je tak enostaven sprehod (obhod), ki vsebuje vse povezave grafa G. Tak graf lahko narišemo z eno potezo, ne da bi dvignili svinčnik, ali šli dvakrat po isti povezavi.



Slika 23: Eulerjev obhod je na primer zaporedje točk $ADEBCEA$.

Izrek 6.2.

1. *Graf G ima Eulerjev obhod natanko tedaj, ko so vse njegove točke sode stopnje.*

2. *Graf G ima Eulerjev sprehod natanko tedaj, ko ima največ dve točki z liho stopnjo.*

6.7 Drevesa

Povezan graf brez ciklov imenujemo *drevo*.

Izrek 6.3. *Za povezan graf G z n točkami so ekvivalentne naslednje trditve.*

1. *graf G je drevo;*

2. *graf G ima natanko $n-1$ povezav;*

3. *če grafu G odstranimo katerokoli povezavo, izgubi povezanost;*

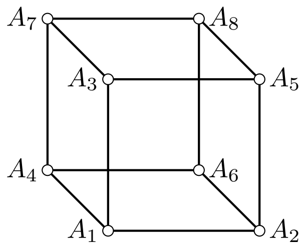
4. *če grafu G dodamo katerokoli povezavo, dobimo cikel.*

Naloge

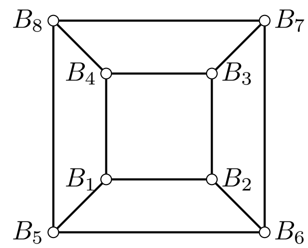
1. Nariši grafe K_6, P_4 in C_7.

2. Ugotovi, ali sta grafa v naslednjih parih izomorfna. (Če sta, poišči izomorfizem, če pa nista, to dokaži.)

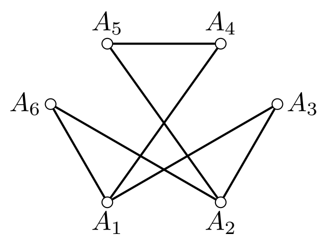
(a)



in



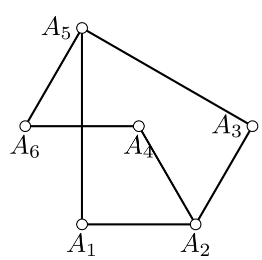
(b)



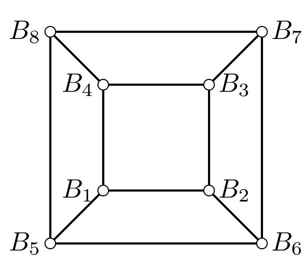
in C_6

3. Za dane grafe ugotovi, ali so dvodelni (navodilo: če je graf dvodelen, pobarvaj njegove točke z belo in črno barvo tako, da nobeni sosednji točki nista pobarvani z isto barvo; če pa ni dvodelen, poišči v njem lih cikel); regularni in ali imajo Eulerjev obhod oziroma sprehod.

(a)



(b)



4. Nariši vse neizomorfne povezane grafe na štirih točkah.

5. Poišči vse neizomorfne grafe na petih točkah, ki so izomorfni svojemu komplementu.

6. Nariši vsa neizomorfna drevesa na šestih točkah.

7 Matrike

7.1 Osnovni pojmi

Matrika je v splošnem pravokotna tabela realnih števil. Njena osnovna značilnost je število vrstic in število stolpcev. Če ima m vrstic in n stolpcev, pravimo, da je *velikosti* ali *razsežnosti* $m \times n$. Na prvem mestu vedno podamo podatek o vrsticah, na drugem pa podatek o stolpcih. Elementu na križišču i-te vrstice in j-tega stolpca pravimo tudi (i,j)-ti element.

Primer 7.1. Matrika

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 7 & 7 & -3 & \frac{2}{7} \\ 4 & 3{,}5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

je ima razsežnost 3×4, njen $(2,3)$-ti element pa je -3.

Matrike navadno označujemo z velikimi, njihove elemente pa z malimi tiskanimi črkami. Splošni (i,j)-ti element označimo z a_{ij}. Matriko na desni lahko označimo tudi z $A = (a_{ij})$. Pri tem lahko posebej poudarimo tudi njeno razsežnost, npr. $A_{m \times n}$ ali $A = (a_{ij})_{m \times n}$. Pri zapisu elementa a_{ij} prvi indeks vedno pomeni vrstico, drugi pa stolpec. Splošni zapis matrike razsežnosti $m \times n$ je videti takole:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Primer 7.2.

1. Matriko
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$
lahko zapišemo tudi kot $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, pri čemer je $a_{ij} = i + j$.

2. Matriko
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
lahko zapišemo tudi kot $A = (a_{ij})_{3 \times 4}$, pri čemer je
$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{če je } j > i; \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Matriko, ki ima le en stolpec ali le eno vrstico, imenujemo kar *stolpec* oziroma *vrstica*. Matriko, ki ima en sam element: $A = [a]$, imenujemo *skalar*. Če je število vrstic matrike enako številu stolpcev, pravimo, da je matrika *kvadratna*. Številu vrstic (stolpcev) kvadratne matrike pravimo *red*.

Matriki $A = (a_{ij})_{m \times n}$ in $B = (a_{ij})_{k \times l}$ sta enaki, če imata enako razsežnost in so njuni istoležni elementi enaki; torej če velja $m = k$ in $n = l$ ter $a_{ij} = b_{ij}$ za vsak par indeksov $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

$$\begin{bmatrix} d_1 & * & * \\ * & d_2 & * \\ * & * & d_3 \end{bmatrix}$$

Tabela 4: Glavna diagonala matrike

Tabela 5: Veljajo naslednje vsebovanosti:

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{zgornje trikotne} & & \\ & & \Uparrow & & \\ \text{enotske} \Rightarrow \text{skalarne} \Rightarrow & & \text{diagonalne} & & \Rightarrow \text{simetrične} \\ & & \Downarrow & & \\ & & \text{spodnje trikotne} & & \end{array}$$

Naj bo $A = (a_{ij})$ kvadratna matrika reda n. Tedaj so elementi, ki imajo oba indeksa enaka: a_{ii}, *diagonalni elementi* in tvorijo *glavno diagonalo.* Matrika A je *zgornja trikotna*, če so vsi njeni elementi pod glavno diagonalo $(a_{ij}; i > j)$ enaki 0; in *spodnja trikotna*, če so vsi njeni elementi nad glavno diagonalo $(a_{ij}; i < j)$ enaki 0.

Primer 7.3. Naslednja matrika je zgornja trikotna:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

Matrika je *simetrična*, če velja $a_{ij} = a_{ji}$ za vse pare indeksov $1 \leq i, j \leq n$.

Primer 7.4. Matrika S je simetrična.

$$S = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Matrika je *diagonalna*, če je hkrati spodnja in zgornja trikotna, torej, če so vsi njeni elementi, razen morda diagonalnih, enaki 0. Če so vsi diagonalni elementi diagonalne matrike enaki, pa je matrika *skalarna*, oziroma *enotska* ali *identična*, če ima na diagonali same enice. Identično matriko označimo z I.

Primer 7.5. Matrika I je enotska reda 3.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Če matriki odstranimo nekaj vrstic ali stolpcev, dobimo *podmatriko* matrike.

Primer 7.6. Naj bo dana matrika

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Z odstranitvijo tretje vrstice in drugega ter tretjega stolpca dobimo podmatriko

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

7.2 Operacije z matrikami

Vsoto matrik lahko vpeljemo za matriki iste velikosti (torej taki, ki imata isto število vrstic in stolpcev). Matrike seštevamo *po komponentah*. Naj bosta dani matriki $A = (a_{ij})_{m\times n}$ in $B = (b_{ij})_{m\times n}$. Tedaj je njuna vsota matrika $C = (c_{ij})_{m\times n}$ z elementi $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, za vse $i = 1, \ldots, m$ in $j = 1, \ldots, n$.

Primer 7.7. Naj bosta dani matriki

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{in} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Potem je njuna vsota

$$A + B = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 5 \\ -1 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Poljubni matriki A lahko priredimo *nasprotno matriko* $-A$, tako da vsakemu elementu matrike A spremenimo predznak. *Razliko matrik* A in B definiramo kot vsoto matrik A in $-B$; torej $A - B = A + (-B)$. Vpeljemo še *ničelno matriko*, ki je matrika velikosti $m \times n$ in ima vse elemente enake 0. Označimo jo z $\mathbf{0}$.

Za seštevanje matrik veljajo naslednje lastnosti:

asociativnost: $(A + B) + C = A + (B + C)$;

komutativnost: $A + B = B + A$;

nevtralni element za seštevanje je $\mathbf{0}$: $A + \mathbf{0} = \mathbf{0} + A = A$;

nasprotni element za seštevanje je $-A$: $A + (-A) = (-A) + A = \mathbf{0}$.

Matriko $A = (a_{ij})$ pomnožimo s številom α tako, da pomnožimo z α vsak njen element: $\alpha A = (\alpha a_{ij})$. Število α v tej vlogi imenujemo navadno *skalar*.

Primer 7.8. Pomnožimo matriko

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

s številoma 3 in -2:

$$3A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ -3 & 12 & -3 \end{bmatrix} \qquad -2A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -6 \\ 2 & -8 & 2 \end{bmatrix}$$

Lastnosti množenja matrike s številom:

asociativnost: $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$;

distributivnost: $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ in $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;

nevtralni element je število 1: $1A = A$;

nasprotna matrika $-A$ je enaka matriki $(-1)A$;

množenje z 0: $0A = \mathbf{0}$;

množenje z naravnim številom: $nA = A + A + \cdots + A$ (vsota n členov).

7.3 Množenje matrik – matrično množenje

Naj bosta dani matriki $A = (a_{ij})_{m\times n}$ in $B = (b_{ij})_{k\times l}$. Produkt matrik AB lahko definiramo le v primeru, ko ima prva matrika toliko stolpcev, kot ima druga matrika vrstic: $n = k$.

Označimo $AB = C$. Matrika C ima toliko vrstic kot A in toliko stolpcev kot B. Velja torej $C = (c_{ij})_{m\times l}$.

Splošni element c_{ij} matrike C dobimo po formuli

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir}b_{rj} \text{ za } i = 1, \ldots m,\ j = 1, \ldots, l.$$

Splošni element c_{ij} torej dobimo tako, da seštejemo produkte vseh istoležnih elementov i-te vrstice in j-tega stolpca.

Tabela 6: Množenje matrik

$$\begin{bmatrix} * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & \cdots & b_{1j} & \cdots & * \\ * & \cdots & b_{2j} & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & b_{nj} & \cdots & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & \cdots & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & c_{ij} & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & * & \cdots & * \end{bmatrix}$$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

Primer 7.9. Naj bosta dani matriki

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \qquad \text{in} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Potem sta

$$AB = \begin{bmatrix} -6 & 19 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \qquad \text{in} \qquad BA = \begin{bmatrix} 5 & -3 & -10 \\ 0 & -14 & -10 \\ 3 & 8 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lastnosti množenja matrik

1. množenje matrik je *asociativno*: $(AB)C = A(BC)$;
2. enotska matrika I je za množenje *nevtralni element*: $AI = IA = A$;

3. *distributivnost*: $(A+B)C = AC + BC$ in $C(A+B) = CA + CB$.

Matriki $A = (a_{ij})_{m\times n}$ *transponirana* matrika A^T je matrika, ki jo dobimo tako, da v matriki A zamenjamo vlogo vrstic in stolpcev. Velja torej $A^T = (a_{ji})_{n\times m}$.

Primer 7.10. Naj bo $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$. Potem je $A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$.

Če je matrika simetrična, se pri transponiranju ne spremeni in obratno, vsaka matrika, za katero velja $A = A^T$, je simetrična.

Včasih se zgodi, da sestavimo večjo matriko iz manjših. Sestavne dele take matrike imenujemo *bloki*. Zapisu matrike

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

pravimo *bločni zapis* matrike A. Pri tem morajo imeti podmatrike v isti vrstici (stolpcu) enako število vrstic (stolpcev).

Primer 7.11. Naj bodo $A_{11} = [1]$, $A_{12} = [3\ 1]$, $A_{21} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $A_{22} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$.

Tedaj velja $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 3 & 1 \\ \hline -1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{array}\right]$

7.4 Determinante

Pri študiju matrik ima pomembno vlogo število, ki mu pravimo *determinanta matrike*. Determinanto imajo le kvadratne matrike. Determinanto matrike $A = (a_{ij})_{n\times n}$ zapišemo kot

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

Determinante računamo po naslednjih postopkih.

Determinanta matrike $A = [a]$ je enaka številu a. Determinanto matrike reda 2 izračunamo po pravilu

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Determinanto reda 3 izračunamo po formuli:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33},$$

ki si jo je najlaže zapomniti kot *Sarrusovo pravilo*:

Pravilo 7.1 (Sarrusovo pravilo)**.** Determinanti pripišemo prvi in drugi stolpec, nato pa množimo elemente diagonal, kot kaže slika. Zmnožke označene z neprekinjeno črto seštejemo s pozitivnim, tiste s črtkano črto pa z negativnim predznakom.

$$
\begin{array}{ccc|cc}
+ & + & + & & \\
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\
- & - & - & &
\end{array}
$$

Računanje determinante lahko postopoma prevedemo na računanje determinant nižjega reda z *razvojem po vrstici* ali *stolpcu.* To storimo takole: izberemo i-to vrstico (stolpec) matrike $A = (a_{ij})_{n\times n}$, po možnosti s čim več elementi enakimi 0. Naj še A_{ij} pomeni matriko, ki ji odstranimo i-to vrstico in j-ti stolpec. Za razvoj po i-ti vrstici velja formula

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij},$$

za razvoj po j-tem stolpcu pa imamo formulo

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}.$$

Primer 7.12. Izračunajmo determinanto

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (*)$$

z razvojem po vrstici.
Ker sta v drugi in tretji vrstici le dva elementa različna od 0, bomo imeli manj računanja, če razvijemo determinanto po eni od njiju kot pa, če jo razvijemo po prvi vrstici. Računajmo torej z razvojem po drugi vrstici:

$$(*) = 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 0 + 2 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= 1 \cdot (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) \cdot (-7) = 1 + 14 = 15$$

Naštejmo nekaj najpomembnejših lastnosti determinant.

Izrek 7.1.

(i) z zamenjavo dveh vrstic (stolpcev) determinanta spremeni predznak;

(ii) če sta dve vrstici (stolpca) enaki, je determinanta enaka 0;

(iii) *če pomnožimo eno vrstico (stolpec) matrike s številom α, se vrednost determinante pomnoži z istim številom;*

(iv) *če je katerakoli vrstica (stolpec) matrike enaka nič, je determinanta enaka 0;*

(v) *če vrstici (stolpcu) prištejemo večkratnik poljubne vrstice (stolpca), se determinanta ne spremeni;*

(vi) $\det A = \det A^T$*;*

(vii) $\det AB = \det A \det B$*;*

(viii) *determinanta spodnje (zgornje) trikotne matrike je enaka produktu diagonalnih elementov.*

7.5 Rang matrike

Naslednja pomembna količina, ki jo določimo matriki je njen *rang*.

Definicija 7.1. Rang je enak redu največje kvadratne podmatrike matrike A, ki ima determinanto različno od 0. Označimo ga z $r(A)$.

Primer 7.13. Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Če matriki A odstranimo zadnji stolpec dobimo matriko

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix},$$

katere determinanta je enaka -7, torej različna od 0. Ker je red zgornje matrike 2, je rang matrike A najmanj 2. Da je to prava vrednost, sledi iz dejstva, da v matriki A nimamo kvadratnih podmatrik, ki bi imele red večji od 2.

7.6 Obratna matrika

Naj bo A kvadratna matrika reda n. Če obstaja taka matrika A^{-1} iste dimenzije, da velja

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I,$$

pravimo, da je matrika A *obrnljiva*, matrika A^{-1} pa je *obratna* ali *inverzna matrika matrike* A.

Izrek 7.2. *Kvadratna matrika A je obrnljiva natanko tedaj, ko je* $\det(A) \neq 0$.

Primer 7.14. Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

matrika z determinanto različno od 0: $ad - bc \neq 0$. Tedaj velja

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Izrek 7.3. *Naj bosta A in B obrnljivi matriki, I pa enotska matrika. Velja:*

(i) $I^{-1} = I$;

(ii) $(\alpha A)^{-1} = \dfrac{1}{\alpha} A^{-1}$, *če je le* $\alpha \neq 0$;

(iii) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

(iv) $(A^{-1})^{-1} = A$;

(v) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Ena od metod za iskanje obratne matrike je s pomočjo *adjungirane matrike.*

Definicija 7.2. Naj bo A kvadratna matrika reda n. Tedaj je njena adjungirana matrika enaka

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} +\det A_{11} & -\det A_{21} & \dots & (-1)^{n+1}\det A_{n1} \\ -\det A_{12} & +\det A_{22} & \dots & (-1)^{n+2}\det A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n+1}\det A_{1n} & \det A_{2n} & \dots & +\det A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Kadar je $\det A \neq 0$, velja

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A.$$

Naloge

1. Zmnoži naslednje pare matrik v tistih vrstnih redih, v katerih je to mogoče.

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -4 & 6 & 8 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & -8 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -6 & 7 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ -7 & 8 & 12 \\ 4 & 4 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$

(e) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(f) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 7 & 4 & -4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & -2 & 8 \end{bmatrix}$

(g) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 6 & 2 \\ 4 & 1 & -3 & 4 \\ 2 & -5 & 8 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -3 \\ 6 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 8 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

2. Izračunaj determinanto

(a) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \\ 1 & 4 & -4 \end{vmatrix}$;

(c) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \end{vmatrix}$

(e) $\begin{vmatrix} -3 & 7 & 7 \\ 4 & -2 & 1 \\ 8 & 4 & -4 \end{vmatrix}$

(f) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

(g) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -7 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

(h) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}$

(i) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}$

(j) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \\ 5 & 4 & -4 \end{vmatrix}$

(k) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 7 & 4 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

(l) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

(m) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & -3 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

3. Določi rang matrike

(a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

(e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

(f) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -2 \\ 6 & -3 & 3 \end{bmatrix}$

8 Sistemi linearnih enačb

8.1 Matrični zapis sistema enačb

Sistem m linearnih enačb z n neznankami ima splošno obliko:

$$\begin{array}{lllll} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 & + \ldots & + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 & + \ldots & + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 & + \ldots & + a_{mn}x_n & = b_m \end{array}$$

Števila a_{ij} in b_i so znana, x_j pa so *neznanke*, ki bi jih radi določili tako, da bodo izpolnjene vse enačbe.

Sistemu enačb priredimo *(osnovno) matriko sistema*, v katero zapišemo koeficiente a_{ij}. Kot rezultat dobimo matriko

$$A = (a_{ij})_{m \times n}.$$

Desne strani in neznanke pa zapišemo v *stolpec desnih strani* $\boldsymbol{b}$ in *stolpec neznank* $\boldsymbol{x}$:

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \qquad \text{in} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Sistem enačb lahko zapišemo s pomočjo zgornjih matrik kot

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

Primer 8.1. Imejmo sistem enačb

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 3 \\ -x_1 + 3x_2 &= -4 \end{aligned}$$

Osnovna matrika sistema, stolpec desnih strani in stolpec neznank so

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} \qquad \text{in} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Rešitev sistema pa je vektor

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

8.2 Reševanje sistema linearnih enačb

Osnovna ideja reševanja sistema enačb je, da enačbe kombiniramo med seboj na tak način, da iz njih izločimo čim več spremenljivk v upanju, da bomo dobljene enačbe znali rešiti, z upoštevanjem že dobljenih rešitev pa se bodo poenostavile še preostale enačbe. V ta namen si bomo ogledali *Gaussov postopek*, ki je eden najbolj ekonomičnih pristopov k reševanju sistemov linearnih enačb. Postopek bomo izvajali v matrični obliki, še prej pa si oglejmo, kaj ta postopek predtavlja na sistemih enačb zapisanih v klasični obliki.

Vsak sistem lahko rešimo s pomočjo naslednjih osnovnih transformacij. V sistemu enačb smemo:

1. zamenjati položaj dveh enačb;
2. pomnožiti enačbo s številom, ki je različno od 0;
3. prišteti enačbi večkratnik druge enačbe.

Očitno ima sistem, na katerem smo izvedli zaporedje zgornjih operacij enake rešitve kot začetni sistem. S primerno izbiro zaporedja teh operacij pa lahko dosežemo, da bo dobljeni sistem lažje rešiti.

Primer 8.2. Če v sistemu

$$\begin{array}{rrrcl} E_1: & 2x_1 & +x_2 & = & 3 \\ E_2: & 3x_1 & -x_2 & = & 7 \end{array}$$

prvi enačbi prištejemo drugo, dobimo nov sistem:

$$\begin{array}{rrrcl} E_1' = E_1 + E_2: & 5x_1 & & = & 10 \\ E_2: & 3x_1 & -x_2 & = & 7 \end{array}$$

Iz prve enačbe smo torej eleminirali neznanko x_2, zato jo lahko rešimo in dobimo $x_1 = 2$ in če ta rezultat vstavimo v drugo enačbo, dobimo še $x_2 = -1$.

Oglejmo si še nekaj primerov:

Primer 8.3. Imejmo sistem:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & -2 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & & & + & 5x_3 & = & -2 \end{array}$$

Če seštejemo prvi dve enačbi, dobimo tretjo. Tretja enačba nam ne pove nič več, kot to, kar nam povesta že prvi dve. V resnici imamo torej le dve neodvisni enačbi.

Primer 8.4. Imejmo sistem:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & -2 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & & & + & 5x_3 & = & 0 \end{array}$$

Če seštejemo prvi dve enačbi, dobimo

$$3x_1 \quad + \quad 5x_3 \quad = \quad -2$$

in če dobljeno enačbo odštejemo od tretje, dobimo:

$$0 = 2.$$

Enačbe so torej protislovne, kar pomeni, da sistem nima rešitve.

Potrebujemo torej sistematično metodo, ki bi za vsak sistem enačb odkrije vse njegove rešitve in v primeru, da rešitev ni, to jasno potrdi.

Včasih sistem enačb rešitve ne določa enolično, pač pa lahko vrednosti nekaterih spremenljivk poljubno izbiramo. Takim spremenljivkam pravimo *parametri.*

Kot bomo videli, je število parametrov, če je sistem rešljiv, enako razliki med številom neznank in številom neodvisnih enačb.

Primer 8.5. V enačbi

$$x_1 + x_2 = 1$$

lahko na primer poljubno določimo vrednost ene spremenljivke, npr. x_2. Naj bo $x_2 = t$, pri čemer je t parameter, se pravi poljubno realno število. V tem primeru dobimo $x_1 = 1 - t$. Splošna rešitev je torej enoparametrična družina rešitev:

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1-t \\ t \end{bmatrix}; t \in \mathbb{R}.$$

8.3 Gaussov postopek

Gaussov postopek bomo opisali za sistem enačb v matrični obliki. Imejmo torej osnovno matriko sistema A, stolpec desnih strani $\boldsymbol{b}$ in stolpec neznank $\boldsymbol{x}$, ki jih povezuje enačba

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

Tak sistem je dejansko določen z A in $\boldsymbol{b}$. Vpeljimo *razširjeno matriko sistema*, ki jo bločno zapišemo kot

$$[A\ \boldsymbol{b}].$$

Ta matrika sistem enolično določa in obratno, vsak sistem je do imen neznank enolično določen s svojo razširjeno matriko.

Vrstice razširjene matrike predstavljajo posamezne enačbe, pri čemer predstavlja zadnji element vrstice desno stran enačbe.

Dovoljene operacije z enačbami v sistemu prevedimo v matrični zapis. Operacijam z enačbami ustrezajo operacije z vrsticami razširjene matrike. V razširjeni matriki sistema torej smemo:

1. zamenjati vrstici;
2. pomnožiti vrstico s številom, ki je različno od 0;
3. prišteti vrstici večkratnik druge vrstice.

Matrika, ki jo dobimo z zaporedjem zgornjih operacij je razširjena matrika sistema enačb, ki ima iste rešitve, kot začetni sistem. Pravimo, da sta sistema *ekvivalentna*. Označimo novo matriko z B', začetno pa z B. Pišemo: $B \sim B'$.

Sistem enačb rešujemo po Gaussovem postopku tako, da prevedemo razširjeno matriko v tako imenovano *stopničasto obliko*:

$$\begin{bmatrix} \cdots & |\underline{x} & \multicolumn{4}{l}{\rule{4cm}{0.4pt}} \\ \cdots & \cdots & |\underline{x} & \multicolumn{3}{l}{\rule{3cm}{0.4pt}} \\ & & & |\underline{x} & \rule{1cm}{0.4pt} & \\ & & & & \ddots & \end{bmatrix}$$

pri čemer pomeni x prvi element v vrstici, ki je različen od 0.

Predpostavimo za trenutek, da smo matriko že prevedli v tako obliko. Sistem je v tem primeru lahko rešiti. Rešujemo od spodaj navzgor. Najprej v zadnji enačbi eno od neznank izrazimo z drugimi (če jih je več, sicer jo preprosto izračunamo) – te postanejo parametri rešitve. Rešitev vstavimo v prejšnjo enačbo, v kateri izrazimo naslednjo neznanko. Ta postopek ponavljamo, dokler ne rešimo vseh enačb. Rešljivost po tem postopku zagotavlja stopničasta oblika matrike. V vsaki naslednji enačbi je namreč vsaj ena dodatna neznanka, ki ji vrednost lahko določimo tako, da bo enačba izpolnjena.

Primer 8.6. Denimo, da smo razširjeno matriko sistema enačb po Gaussovem postopku prevedli v obliko:

$$B' = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & 14 \end{array}\right]$$

Zgornji matriki ustreza sistem enačb:

$$\begin{array}{rrrcr} 2x_1 + & 3x_2 - & x_3 & = & 1 \\ & 2x_2 + & 3x_3 & = & 4 \\ & & 7x_3 & = & 14 \end{array}$$

Iz zadnje enačbe dobimo $x_3 = 2$, če to rešitev vstavimo v prejšnjo enačbo, dobimo

$$2x_2 + 3 \cdot 2 = 4,$$

od koder dobimo $x_2 = -1$. Z vsatavljanjem že izračunanih spremenljivk v prvo enačbo pa dobimo še enačbo

$$2x_1 + 3 \cdot (-1) - 2 = 1,$$

iz katere izračunamo $x_1 = 3$. Rešitev sistema je torej

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Oglejmo si zdaj postopek, ki poljubno matriko prevede v stopničasto obliko.

1. Matriko najprej preoblikujemo tako, da bo v prvem stolpcu le en element različen od 0, in sicer v prvi vrstici. To dosežemo tako, da

   - z morebitno menjavo vrstic postavimo na prvo mesto vrstico, ki ima v prvem stolpcu element različen od 0;
   - vsem ostalim vrsticam prištejemo tak večkratnik prve vrstice, da bodo v prvem stolpcu v vseh ničle. Če je v prvi vrstici v prvem stolpcu element a_{11} in v i-ti vrstici element a_{i1}, dobimo novo i-to vrstico kot
   $$E_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} E_1 \tag{10}$$
   (računamo s celimi vrsticami), pri čemer sta E_1 in E_i prva oziroma i-ta vrstica matrike.

   Od nič različen element v prvi vrstici, katerega

   Primer 8.7. Naj bo

   $$B = \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

razširjena matrika nekega sistema enačb. Ker je v prvi vrstici v prvem stolpcu že element različen od 0, odštejmo drugi vrstici dvakratnik, tretji pa enkrat prvo vrstico in dobimo:

$$\begin{aligned} E_2' &= E_2 - 2E_1 \\ E_3' &= E_3 - E_1 \end{aligned} \qquad \sim \left[\begin{array}{rrr|r} \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \end{array}\right].$$

2. Denimo, da smo del razširjene matrike že prevedli v stopničasto obliko. To pomeni, da matriko lahko zapišemo bločno v obliki

$$B = \begin{bmatrix} T & X \\ \mathbf{0} & B' \end{bmatrix},$$

pri čemer je T matrika v stopničasti obliki, B pa del, ki še ni preoblikovan po Gaussovem postopku. Postopek nadaljujemo na enak način kot prej, le da se omejimo zgolj na matriko B', z vrsticami nad njo pa ne počnemo ničesar več. Prvi vrstici matrike B' bomo rekli *ključna vrstica*, prvemu stolpcu pa *ključni stolpec*. Element na križišču ključne vrstice in ključnega stolpca imenujemo *ključni element*.

Primer 8.8 (Nadaljevanje primera 8.7)**.** V matriki

$$\left[\begin{array}{rrr|r} \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

sta prva vrstica in stoplec že v stopničasti obliki. Preoblikovati je potrebno še preostali del. Postopek nadaljujemo le še z drugo in tretjo vrstico. Če tretji vrstici odštejemo drugo, dobimo

$$E_3' = E_3 - E_2 \qquad \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right].$$

Rešitev sistema dobimo z reševanjem od spodaj in je

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Pri Gaussovem postopku je koristno upoštevati še naslednji navodili, zlasti, če ga delamo "peš".

1. Če je mogoče postavimo za ključno vrstico tako, ki ima v ključnem stolpcu število 1 ali -1, saj se s tem izognemo ulomku v (10).

Primer 8.9. Če v matriki

$$B = \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{array}\right]$$

zamenjamo prvo in tretjo vrstico

$$E_1 \leftrightarrow E_3 \qquad \sim \left[\begin{array}{ccr|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \end{array}\right],$$

bomo imeli v nadaljevanju lažje delo:

$$\begin{aligned} E_2' &= E_2 - 3E_1 \\ E_3' &= E_3 - 2E_1 \end{aligned} \qquad \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -5 & -7 & -17 \\ 0 & -1 & -7 & -9 \end{array}\right].$$

Zamenjamo še drugo in tretjo vrstico, da dobimo

$$E_2 \leftrightarrow E_3 \qquad \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & -7 & -9 \\ 0 & -5 & -7 & -17 \end{array}\right].$$

Od tu pa nadaljujemo Gaussov postopek do

$$E_3' = E_3 - 5E_2 \qquad \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & -7 & -9 \\ 0 & 0 & 28 & 28 \end{array}\right].$$

Rešitev sistema je $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

2. Če v ključnem stolpcu nimamo nobene 1, ali -1, se vendarle lahko izognemo ulomkom tudi drugače. Če element v ključnem stolpcu ni deljiv s ključnim elementom, lahko vrstico pomnožimo s ključnim elementom. Tedaj spet lahko odštejemo dobljeni vrstici celoštevilski večkratnik ključne vrstice.

   Primer 8.10. V matriki

$$B = \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & -1 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right]$$

   lahko drugo vrstico množimo z 2 in ji odštejemo trikratnik prve vrstice. Ti dve operaciji lahko naredimo kar v enem koraku. Postopek za tretjo vrstico gre po običajni poti:

$$\begin{aligned} E_2' &= 2E_2 - 3E_1 \\ E_3' &= E_3 + E_1 \end{aligned} \qquad \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & -1 & 8 \\ 0 & -7 & 7 & -14 \\ 0 & 4 & -1 & 5 \end{array}\right].$$

Podobno ravnamo v naslednjem koraku:

$$E_3' = 7E_3 + 4E_2 \qquad \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & -1 & 8 \\ 0 & -7 & 7 & -14 \\ 0 & 0 & 21 & -21 \end{array}\right].$$

Od tu potem zlahka ugotovimo končno rešitev $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

8.4 Rang matrike po Gaussovem postopku

Če matriko po Gaussovem postopku prevedemo v stopničasto obliko, lahko ugotovimo tudi rang matrike. Velja namreč, da se pri vrstičnih Gaussovih operacijah rang ohranja. Za stopničasto matriko pa je lahko preveriti, da je njen rang enak številu vrstic, ki vsebujejo od nič različne elemente.

Zapomnimo si torej pravilo.

Pravilo 8.1. Rang matrike A lahko ugotovimo tako, da jo z Gaussovimi operacijami pretvorimo v stopničasto obliko. Rang matrike A je potem enak številu vrstic z elementi različnimi od nič dobljene stopničaste matrike.

Primer 8.11. Ugotovimo rang matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Po gaussovem postopku dobimo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dobljena matrika je že stopničasta in ima dve vrstici, ki vsebujete elemente različne od 0. Velja torej $r(A) = 2$.

8.5 Rešljivost sistemov

Rang razširjene matrike sistema enačb nam pove še en pomemben podatek, in sicer, koliko neodvisnih enačb vsebuje sistem. Neodvisne enačbe so tiste, ki jih ne moremo izpeljati iz preostalih.

Primer 8.12. V primeru 8.3 smo imeli sistem Imejmo sistem:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & -2 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & & & + & 5x_3 & = & 0 \end{array},$$

za katerega smo ugotovili, da je tretja enačba vsota prve in druge, kar pomeni, da so enačbe odvisne. Ugotovimo rang razširjene matrike po Gaussovem postopku:

$$
\begin{array}{rl}
 & B = \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -2 \end{array}\right] \\
E_1 \leftrightarrow E_2 & \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & 5 & -2 \end{array}\right] \\
\begin{array}{l} E_2' = E_2 - 2E_1 \\ E_3' = E_3 - 3E_1 \end{array} & \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -1 & -2 \end{array}\right] \\
E_3' = E_3 - E_2 & \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].
\end{array}
$$

Rang matrike je torej 2, kar pomeni, da sta le dve izmed enačb neodvisni.

Oglejmo si še, kaj to pomeni za rešljivost sistema. Druga vrstica sedaj predstavlja enačbo

$$-3x_2 - x_3 = -2,$$

ki ima dve neznanki. Pri taki enačbi pa lahko eno neznanko poljubno določimo kot parameter. Naj bo torej

$$x_3 = t,$$

pri čemer je parameter t poljubno realno število. Tedaj velja:

$$x_2 = \frac{2-t}{3}.$$

Z vstavljanjem v prvo enačbo

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$$

dobimo

$$x_1 + \frac{t-2}{3} + 2t = 0,$$

od koder sledi

$$x_1 = \frac{2-7t}{3}.$$

V zgornjem primeru smo videli, da ima sistem enačb s tremi neznankami, a le dvema neodvisnima enačbama rešitev, ki ni enolična, pač pa se izraža z enim parametrom.

Oglejmo si še naslednji primer.

Primer 8.13. Sistem, katerega razširjeno matriko prevedemo v obliko

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

nima rešitve, saj je zadnja enačba je oblike $0 = 1$ in očitno ni izpolnjena pri nobenem naboru vrednosti neznank x_1, x_2, x_3.

Po drugi strani pa lahko opazimo, da ima osnovna matrika rang enak 2, med tem, ko je rang razširjene matrike enak 3.

Pravilo 8.2. V splošnem lahko povemo o rešljivosti sistemov enačb naslednje:

1. Sistem enačb je *rešljiv* natanko tedaj, ko je *rang osnovne matrike* enak *rangu razširjene matrike*: $r(A) = r(B)$.
2. Kadar je sistem rešljiv, je rešljiv *enolično*–rešitev je ena sama, če je rang osnovne matrike (in torej tudi razširjene) enak številu neznank n: $r(A) = r(B) = n$.
3. Kadar je sistem rešljiv, vendar je rang osnovne matrike *manjši* od n, se rešitev izraža z $n - r(A)$ parametri.

8.6 Homogeni sistemi

Če je v sistemu linearnih enačb stolpec desnih strani $\boldsymbol{b}$ enak $\mathbf{0}$, pravimo, da gre za *homogeni sistem enačb*. Za homogeni sistem enačb je značilno, da je $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ vedno njegova rešitev. Tej rešitvi pravimo *trivialna rešitev*.

Bolj zanimivo vprašanje je, ali ima homogen sistem tudi kakšno netrivialno rešitev. To ima samo v primeru, ko je rang osnovne matrike manjši od števila neznank. V tem primeru se rešitev izraža z enim ali več parametri.

Pri reševanju homogenega sistema po Gaussovem postopku stolpec desnih strani navadno izpuščamo, saj je tudi po vseh transformacijah enak $\mathbf{0}$.

Primer 8.14. Sistem, katerega osnovno matriko prevedemo po Gaussovem postopku v obliko

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ima netrivialno rešitev

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -t \\ t \\ t \end{bmatrix}; \; t \in \mathbb{R}.$$

Trivialna rešitev je le posebni primer splošne rešitve za $t = 0$.

8.7 Računanje obratne matrike po Gaussovem postopku

Na način podoben reševanju sistema linearnih enačb lahko za obrnljivo matriko poiščemo njen obrat. Matriko, ki jo v bločnem zapisu predstavimo kot

$$[\, A \mid I \,]$$

skušamo z zaporedjem Gaussovih operacij prevesti v obliko

$$[\, I \mid B \,].$$

Če je matrika A obrnljiva, velja $B = A^{-1}$. Postopek opravimo podobno kot pri reševanju sistema enačb tako, da zaporedoma izničimo spodnji in nato zgornji trikotnik, le-tega v obratnem vrstnem redu.

Primer 8.15. Poiščimo obrat matrike

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}:$$

Zapišimo matriko $[\ A \mid I\ ]$ in z množenjem prve vrstice s 3 in druge z 2 dobimo

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 6 & 3 & 3 & 0 \\ 6 & 4 & 0 & 2 \end{array}\right],$$

V naslednjem koraku odštejmo prvo vrstico drugi, nato pa še trikratnik druge prvi:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 6 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 6 & 0 & 12 & -6 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right].$$

Končno še delimo prvo vrstico s 6 in dobimo:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right].$$

Velja torej $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$, kar lahko preverimo s preprostim množenjem:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

8.8 Uporaba obratne matrike pri reševanju sistemov linearnih enačb

Denimo, da imamo enolično rešljiv sistem linearnih enačb, ki mu pripada matrična enačba:

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \tag{11}$$

pri čemer je A kvadratna matrika. Ker je sistem rešljiv enolično, je rang matrike A enak številu neznank, to pa je ravno red matrike A. Torej je matrika A obrnljiva.

Pomnožimo enačbo (11) na obeh straneh z leve strani z matriko A^{-1}: $A^{-1}A\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$, od koder sledi $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$. Rešitev sistema, $\boldsymbol{x}$ dobimo torej z množenjem stolpca desnih strani z obratno matriko matrike sistema.

8.9 Cramerjevo pravilo

V primeru, ko je osnovna matrika sistema obrnljiva kvadratna matrika, lahko rešitve $\boldsymbol{x}$ sistema

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

poiščemo še na naslednji način. Naj matrika $(A_i; \boldsymbol{b})$ pomeni matriko, ki smo ji odstranili i-ti stolpec in ga nadomestili s stolpcem $\boldsymbol{b}$.

Tedaj je i-ta komponenta rešitve $\boldsymbol{x}$ enaka:

$$x_i = \frac{\det(A_i; \boldsymbol{b})}{\det A}.$$

Zgornje pravilo ima večji teoretični kot praktični pomen, saj je za računanje primerno le pri majhnih n.

Primer 8.16. Naj bo dan sistem enačb v matrični obliki:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Velja $\det A = -1$ in

$$\det(A_1; \boldsymbol{b}) = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -9 \text{ in } \det(A_2; \boldsymbol{b}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5,$$

od koder sledi

$$x_1 = \frac{-9}{-1} = 9 \text{ in } x_2 = \frac{5}{-1} = -5.$$

Velja torej $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 9 \\ -5 \end{bmatrix}$.

Naloge

1. Zapiši osnovno in razširjeno matriko, stolpec desnih strani in stolpec neznank za naslednje sisteme enačb in jih reši po Gaussovem postopku:

(a)
$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &= -6 \\ -x_1 + 2x_2 &= 5 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 - x_3 &= -11 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 5 \\ -3x_1 - 7x_2 - x_3 &= -19 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - 5x_2 + 7x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 8 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 &= 9 \\ 3x_1 - 4x_2 + 7x_3 &= 17 \end{aligned}$$

(e)
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 10 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 17 \end{aligned}$$

(f)
$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 8 \\ 2x_1 + x_2 &= 5 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 6 \end{aligned}$$

(g)
$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 9 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 &= 11 \\ -x_1 + 8x_2 - 4x_3 &= 13 \end{aligned}$$

(h)
$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= -2 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 &= 8 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 &= -12 \end{aligned}$$

(i)
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 11 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= -6 \\ x_2 - x_3 &= -6 \end{aligned}$$

2. Poišči vse rešitve homogenih sistemov enačb, ki jim pripadajo naslednje osnovne matrike:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -4 & 0 & 8 \\ 1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & -6 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 1 & 8 \\ 4 & 2 & -4 \end{bmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ (h) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 5 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & -8 \end{bmatrix}$

3. Vojaška enota nakupuje vozila za transport vojakov tipov A, B in C. Vozila tipa A imajo prostora za 8 oseb, stane pa vsako 200 000 €. Vozila tipa B imajo prostora za 12 oseb, vsako pa stane 250 000 €. Vozila tipa C imajo prostora za 15 oseb, stanejo pa po 300 000 €. Kupiti želijo skupno 10 vozil, ki morajo imeti skupno kapaciteto 106 oseb. Cena vseh vozil pa naj bo 2 350 000 €. Zanima nas, koliko vozil posameznega tipa mora enota kupiti, da bo zadostila vsem kriterijem.

(a) Zapiši vse tri zahteve o skupnih značilnostih vozil kot linearne enačbe. Kaj so neznanke?

(b) Zapiši sistem v matrični obliki in ga reši po Gaussovem postopku.

(c) Ali lahko zadostimo zahtevam vojaške enote? Če lahko, ali lahko to storimo enolično ali na več načinov?

4. Trgovec nabavi vreče sladkorja, soli in pralnega praška. Skupaj je nabavil 100 vreč, ki so tehtale 120 kg, skupno pa je zanje plačal 275 evrov. Koliko je bilo vreč posameznega blaga, če sta sladkor in sol pakirana v kilogramske, pralni prašek v dvokilogramske vreče in je cena vreče sladkorja 3, vreče soli 2, vreče pralnega praška pa 5 evrov?

5. Trije učenci neke šole so se udeležili šahovskega turnirja, na katerem je vsak odigral tri tekme. Ko so jih ob prihodu domov povprašali o uspešnosti, so povedali, da so skupaj zbrali 6,5 točk in da je bilo število neodločenih izidov za dva več kot porazov. S prevedbo na linearne sisteme ugotovi, koliko zmag, neodločenih izidov in porazov so dosegli učenci na turnirju. (Pri šahu se zmaga točkuje z eno točko, neodločen izid pa s pol točke).

6. Anja je spekla tri vrste piškotov, recimo jim A, B in C. Za piškote A porabi 2 dag moke, 1 dag sladkorja in 1 dag jajc, za piškote vrste B porabi 3 dag moke, 2 dag sladkorja in 1 dag jajc, za piškote vrste C pa porabi 2 dag moke, 1 dag sladkorja in 2 dag jajc. Porabila je 47 dag moke, 26 dag sladkorja in 27 dag jajc. Koliko piškotov posamezne vrste je spekla? Zapiši problem v obliki sistema linearnih enačb in ga reši.

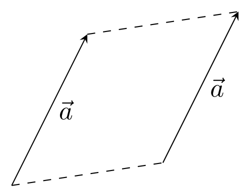
9 Vektorski prostori

9.1 Osnovni primeri in definicije

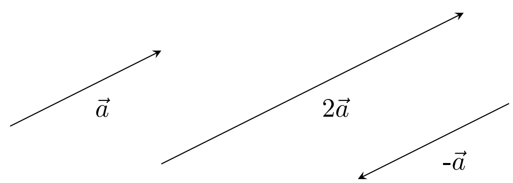
V matematiki se pogosto srečujemo z objekti, ki jih lahko seštevamo in množimo z realnimi števili.

Primer 9.1.

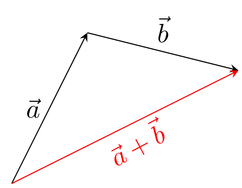
1. V prostoru usmerjenih daljic v ravnini ali trirazsežnem prostoru štejemo dve daljici za enaki, če sta vzporedni in imata enako dolžino:



   Če vektor $\vec{a}$ pomnožimo s številom, se s tem številom pomnoži njegova dolžina, smer pa ostane ista. Množenje z negativnim številom pa pomeni, da vektor kaže v nasprotno smer:



   Usmerjene daljice seštevamo po naslednjem pravilu:



   Vektor $\vec{b}$ vzporedno premaknemo v končno točko vektorja $\vec{a}$. Rezultat je vektor, ki veže začetno točko vektorja $\vec{a}$ in končno točko translatiranega vektorja $\vec{b}$.

2. V uporabni matematiki in zlasti v statistiki se srečujemo z *n-tericami števil* $(x_1, \ldots, x_n)$. Tudi ta množica dopušča naravno definicijo operacij seštevanje in množenje s številom:

   - n-terico $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ pomnožimo s številom α tako, da s tem številom pomnožimo vsako njeno komponento:
   $$\alpha(x_1, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n);$$
   - vsota n-teric $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ in $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ je n-terica, ki ima za komponente vsote komponent n-teric $\boldsymbol{x}$ in $\boldsymbol{y}$:
   $$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n).$$

n-terice lahko predstavimo tudi kot vrstice ali stolpce matrik.

Lastnosti, ki so skupne prejšnjima in podobnim primerom, strnemo v definicijo vektorskega prostora:

Definicija 9.1. *Vektorski prostor* nad obsegom realnih števil $\mathbb{R}$ je neprazna množica V, v kateri sta definirani dve operaciji:

1. *Seštevanje elementov množice V:* vsakemu paru elementov $\boldsymbol{x}$ in $\boldsymbol{y}$ priredimo element
$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in V,$$
ki ga imenujemo *vsota* elementov $\boldsymbol{x}$ in $\boldsymbol{y}$. Seštevanje je torej dvočlena **notranja** operacija v množici $V: \; V \times V \to V$.

2. *Množenje elementov množice V z realnim številom:* vsakemu elementu $\boldsymbol{x} \in V$ in realnemu številu α priredimo element
$$\alpha\boldsymbol{x} \in V,$$
ki ga imenujemo *produkt elementa $\boldsymbol{x}$ s številom α.* Množenje s številom je torej dvočlena **zunanja** operacija na množici $V: \; \mathbb{R} \times V \to V$.

Operaciji morata zadoščati naslednjim *aksiomom.*

Lastnosti seštevanja:

1. seštevanje je komutativno: $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$;
2. seštevanje je asociativno: $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$;
3. obstaja nevtralni element $\boldsymbol{0}$ za seštevanje: $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$;
4. za poljubni element $\boldsymbol{x}$ obstaja njemu nasprotni element, ki ga označimo z $-\boldsymbol{x}$: $\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = (-\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

Lastnosti množenja s številom:

1. število 1 je nevtralni element: $1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$;
2. množenje s števili je asociativno: $(\alpha\beta)\boldsymbol{x} = \alpha(\beta\boldsymbol{x})$;
3. seštevanje števil je distributivno glede na množenje z elementom iz V: $(\alpha + \beta)\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{x}$;
4. seštevanje elementov množice V je distributivno glede na množenje s številom: $\alpha(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \alpha\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{y}$.

Množico V, ki izpolnjuje zgornje zahteve imenujemo *(realni) vektorski prostor*, njene elemente *vektorji*, realna števila, ki nastopajo v računskih operacijah, pa *skalarji.*

Primer 9.2.

1. Hitro lahko ugotovimo, da tudi matrike iste razsežnosti tvorijo vektorski prostor za operaciji *seštevanje matrik* in *množenje matrike s številom.* Posebni primer matrik so matrike, ki imajo n vrstic in

le en stolpec. Pri takih matrikah oznako stolpca običajno kar izpuščamo in njene elemente zapišemo v obliki:

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Toda zgornji zapis v bistvu predstavlja n-terico $(x_1, \ldots, x_n)$. Vektorski prostor n-teric bomo odslej označevali z V_n, njegove elemente pa bomo običajno pisali v obliki (12).

2. Množica polinomov stopnje največ n tvori vektorski prostor:

   - vsota polinomov $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ in $q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n$ je polinom
   $$(p+q)(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n.$$
   - produkt polinoma $p(x)$ in števila α pa je polinom
   $$\alpha p(x) = \alpha a_0 + \alpha a_1 x + \alpha a_2 x^2 + \cdots + \alpha a_n x^n.$$

   Tudi množica vseh polinomov očitno tvori vektorski prostor, saj lahko pri seštevanju polinomov različne stopnje štejemo nekatere koeficiente kot enake 0.

9.2 Vektorski podprostor

Neprazna podmnožica P vektorskega prostora V je *(vektorski) podprostor* prostora V, če je tudi sama vektorski prostor za operaciji seštevanje in množenje s številom.

Trditev 9.1. *Množica $P \subseteq V$ je vektorski podprostor natanko tedaj, ko vsebuje hkrati z vektorjema $\boldsymbol{x}$ in $\boldsymbol{y}$ tudi*

- *njuno vsoto $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ in*
- *za poljuben skalar α tudi vsak element oblike $\alpha\boldsymbol{x}$.*

Dokaz. Preverimo, da ima množica P, ki zadošča zgornjima pogojema res vse zahtevane lastnosti vektorskih prostorov.

Komutativnost in asociativnost seštevanja se podeduje iz V, saj gre za isto operacijo. Vzemimo poljuben element $\boldsymbol{x}$ iz P. Po zgornjih zahtevah je tudi $(-1)\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x}$ element množice P, kar pomeni, da množica P skupaj z vsakim elementom vsebuje tudi njegov nasprotni element. Poleg tega je v množici P tudi njuna vsota $\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$. Množica P torej vsebuje tudi nevtralni element za seštevanje. To pa so vse lastnosti, ki jih mora imeti seštevanje v vektorskem prostoru.

Lastnosti množenja pa se vse podedujejo iz prostora V. Od tod sledi, da ima množica $P \subseteq V$, ki zadošča pogojem trditve, res vse lastnosti vektorskega prostora. □

Če za vektorski podprostor P velja $P \neq V$, pravimo, da je P *pravi podprostor* prostora V in če je $P \neq \{\boldsymbol{0}\}$, je P *netrivialni* podprostor.

Primer 9.3.

1. V prostoru n-teric V_n naj bo P množica vseh takih n-teric, ki imajo vse komponente enake, torej vsebuje vse vektorje oblike

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ x \\ \vdots \\ x \end{bmatrix}.$$

Pokažimo, da je ta množica vektorski podprostor prostora V_n. Pokazati moramo, da zadošča obema pogojema trditve 9.1. Naj bosta dani n-terici

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ x \\ \vdots \\ x \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y \\ y \\ \vdots \\ y \end{bmatrix}$$

iz množice P in α neko realno števivlno. Tedaj velja

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} x+y \\ x+y \\ \vdots \\ x+y \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \alpha\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \alpha x \\ \alpha x \\ \vdots \\ \alpha x \end{bmatrix}$$

Tako vsota $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ kot produkt $\alpha\boldsymbol{x}$ sta n-terici z enakimi komponentami in zato elementa množice P, ki je zato res vektorski podprostor prostora V_n.

2. Množica vseh rešitev homogenega sistema linearnih enačb z n neznankami je podprostor prostora V_n.

   Naj bo A osnovna matrika sistema in P množica vseh rešitev homogenega sistema, ki ga v matrični obliki zapišemo kot $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Naj bosta $\boldsymbol{x}$ in $\boldsymbol{y}$ poljubni rešitvi tega sistema in α poljubno realno število. Velja

$$A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0} \text{ in } A(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha A\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0},$$

   kar pomeni, da sta tako $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ kot tudi $\alpha\boldsymbol{x}$ tudi rešitvi istega homogenega sistema in to pomeni, da je ta množica res vektorski podprostor v V_n.

   Ta prostor je trivialni podprostor natanko tedaj, ko je sistem enolično (trivialno) rešljiv.

3. Množica polinomov, ki imajo pri 1 ničlo je vektorski podprostor v množici vseh polinomov stopnje največ n.

   Naj bosta namreč $p(x)$ in $q(x)$ polinoma, za katera velja $p(1) = q(1) = 0$, in α poljubno realno število. Tedaj je

$$(p+q)(1) = p(1) + q(1) = 0 \text{ in } \alpha p(1) = 0,$$

   od koder sklepamo, da sta tako $(p+q)(x)$ kot $\alpha p(x)$ polinoma z ničlo pri 1 in je tako ta množica vektorski podprostor v množici polinomov stopnje največ n.

4. Oglejmo si še primer podmnožice vektorskega prostora, ki pa sama ni vektorski prostor. Naj bo P podmnožica vseh n-teric s samimi pozitivnimi komponentami, ki je podmnožica vektorskega prostora V_n. Množica P torej vsebuje vse vektorje oblike

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

pri čemer velja $x_i > 0$ za vsak $i = 1, \ldots, n$. Toda če tak $\boldsymbol{x}$ pomnožimo z negativnim številom, ima dobljena n-terica negativne komponente, kar pomeni, da ni element množice P. Ta množica torej ne izpolnjuje druge zahteve trditve 9.1 in zato ni vektorski podprostor prostora V_n.

9.3 Linearna kombinacija

Imejmo elemente $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ vektorskega prostora V in poljubna realna števila $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Definirajmo izraz

$$\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{x}_n. \tag{13}$$

Tak izraz imenujemo *linearna kombinacija* vektorjev. Zaradi lastnosti vektorskih prostorov je tudi linearna kombinacija vektorjev prostora V element tega prostora. V posebnem primeru, ko velja $\lambda_i = 0$ za $i = 1, \ldots, n$, pravimo, da je linearna kombinacija (ki je enaka vektorju $\mathbf{0}$) *trivialna*; če pa je **vsaj eno** od števil λ_i od 0 različno, je kombinacija *netrivialna.*

Primer 9.4. Naj bodo dani vektorji

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \text{in} \qquad \boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Zapišimo njihovi linearni kombinaciji:

$$3\boldsymbol{x}_1 - 2\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 11 \\ -4 \end{bmatrix} \qquad \text{in} \qquad -\boldsymbol{x}_1 + 3\boldsymbol{x}_2 - 4\boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -14 \\ -10 \end{bmatrix}.$$

Hitro se lahko prepričamo, da je množica vseh linearnih kombinacij vektorjev $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ podprostor prostora V. Ta podprostor označimo z $L(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$ in ga imenujemo *linearna lupina* vektorjev $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ oziroma podprostor *generiran z vektorji* $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$.

Primer 9.5. Naj bosta dana vektorja

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{in} \qquad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

v vektorskem prostoru trojic V_3. V linearni lupini $L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ so natanko vsi vektorji oblike

$$\alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix},$$

pri čemer sta α in β poljubni realni števili. Linearno lupino torej sestavljajo vsi vektorji, ki imajo tretjo komponento enako 0.

Pogosto moramo ugotoviti, ali je nek vektor $\boldsymbol{y}$ v linearni lupine vektorjev $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$. Z drugimi besedami, ugotoviti moramo, ali lahko vektor y zapišemo kot linearno kombinacijo danih vektorjev. Problem rešimo tako, da ga prevedemo na reševanje sistema linearnih enačb. Če je odgovor na vprašanje pritrdilen, morajo obstajati taka realna števila $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, da velja

$$\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{y}. \tag{14}$$

Če zapišemo enačbe pripadajoče posameznim komponentam, ugotovimo, da je osnovna matrika sistema matrika, ki ima po stolpcih vektorje $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$, stolpec desnih strani je vektor $\boldsymbol{y}$, stolpec neznank pa sestavljajo števila $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Vektor $\boldsymbol{y}$ je v mogoče izraziti kot linearno kombinacijo vektorjev $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ natanko tedaj, ko je dani sistem rešljiv.

Primer 9.6. Ugotoviti želimo, ali je vektor $\boldsymbol{y}$ v linearni lupini vektorjev $\boldsymbol{x}_1$ in $\boldsymbol{x}_2$, če so

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{in} \qquad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ugotoviti torej želimo, ali obstajata taki realni števili λ_1 in λ_2, da bo veljalo

$$\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{y}. \tag{15}$$

Zapišimo zgornjo vektorsko enačbo za vsako komponento posebej in dobimo sistem:

$$\begin{aligned} 1 \cdot \lambda_1 + 0 \cdot \lambda_2 &= 1 \\ 0 \cdot \lambda_1 + 1 \cdot \lambda_2 &= 2 \\ 1 \cdot \lambda_1 + 1 \cdot \lambda_2 &= 1 \end{aligned}$$

ki mu pripada razširjena matrika

$$B \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Po Gaussovem postopku prevedemo zgornjo razširjeno matriko v

$$\begin{aligned} E_3' = E_3 - E_1 &\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \\ E_3' = E_3 - E_2 &\sim \left[\begin{array}{cc|r} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{array}\right], \end{aligned}$$

od koder sklepamo, da sistem ni rešljiv. To pomeni, da ne obstaja tak par λ_1 in λ_2, da bi bila izpolnjena enačba (15). Vektorja $\boldsymbol{y}$ torej ne moremo izraziti kot linearno kombinacijo vektorjev $\boldsymbol{x}_1$ in $\boldsymbol{x}_2$, se pravi, da ni v njuni linearni lupini.

9.4 Linearna odvisnost

Za vektorje $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ pravimo, da so *linearno odvisni*, če obstaja njihova netrivialna linearna kombinacija, ki je enaka $\mathbf{0}$. To pomeni, da obstajajo taki koeficienti $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, od katerih je vsaj eden različen od 0, da velja

$$\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{x}_n = \mathbf{0}.$$

Če vektorji niso linearno odvisni, pravimo, da so *linearno neodvisni.* To pomeni, da za vsako njihovo linearno kombinacijo $\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{x}_n$, ki je enaka $\mathbf{0}$ velja $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Poglejmo, kako za dano množico vektorjev $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$ ugotovimo, ali je linearno (ne)odvisna. Najti skušamo vse take nabore koeficientov $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, za katere velja enačba

$$\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{x}_n = \mathbf{0}.$$

Ta enačba pa je le poseben primer enačbe (14). Ker je na desni vektor $\mathbf{0}$, imamo torej homogeni sistem enačb. Če je ta sistem rešljiv le trivialno, je edina linearna kombinacija, ki enačbo rešuje trivialna linearna kombinacija. Če pa ima sistem tudi kakšno netrivialno rešitev, je ta netrivialna linearna kombinacija, ki rešuje zgornjo enačbo. V prvem primeru so vektorji linearno neodvisni, v drugem pa linearno odvisni.

Primer 9.7.

1. Vektorji

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ in } \boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

so linearno odvisni, saj velja $\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_3 = \mathbf{0}$.

2. Pokažimo, da so vektorji

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ in } \boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

linearno neodvisni.

Obravnavamo enačbo

$$\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{x}_3 = \mathbf{0},$$

z neznankami $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Osnovna matrika sistema ima po stopcih ravno vektorje $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ in $\boldsymbol{x}_3$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinanta matrike A je enaka -2, od koder sledi, da je njen rang enak 3, kar je enako tudi številu neznank. To pa pomeni, da je sistem rešljiv enolično in je trivialna rešitev tudi edina. Linearna kombinacija vektorjev $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ je torej enaka $\mathbf{0}$ le, če so vsi koeficienti enaki 0. To pa pomeni, da so vektorji linearno neodvisni.

Zapišimo še nekaj pravil o linearni odvisnosti in neodvisnosti:

Trditev 9.2.

1. *Če je med vektorji $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ kateri enak $\mathbf{0}$, so vektorji linearno odvisni.*

2. *Vektorji so linearno odvisni natanko tedaj, ko je eden od njih linearna kombinacija ostalih.*

3. *Če so vektorji $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_m$ v linearni lupini vektorjev $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ in je $\boldsymbol{z}$ linearna kombinacija vektorjev $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_m$, je $\boldsymbol{z}$ tudi linearna kombinacija vektorjev $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$.*

4. *Rang matrike je enak maksimalnemu številu linearno neodvisnih stolpcev oziroma vrstic.*

Dokaz. Da velja pravilo 1. se hitro prepričamo na naslednji način. Naj bodo dani vektorji $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$, pri čemer je npr. $\boldsymbol{x}_1 = \mathbf{0}$. Tedaj je netrivialna linearna kombinacija $1 \cdot \boldsymbol{x}_1 + 0 \cdot \boldsymbol{x}_2 + \ldots + 0 \cdot \boldsymbol{x}_n$ enaka $\mathbf{0}$, kar pomeni, da so vektorji linearno odvisni.

Prepričajmo se še v veljavnost trditve 2. Najprej pokažimo, da so vektorji linearno odvisni, če je eden od njih enak linearni kombinaciji preostalih. Denimo, da velja $\boldsymbol{x}_n = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 + \ldots + \lambda_{n-1} \boldsymbol{x}_{n-1}$. Odštejmo na obeh straneh $\boldsymbol{x}_n$ in dobimo $\mathbf{0} = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 + \ldots + \lambda_{n-1} \boldsymbol{x}_{n-1} + (-1) \cdot \boldsymbol{x}_n$, kar pa je netrivialna linearna kombinacija, saj je koeficient pri $\boldsymbol{x}_n$ različen od 0.

Pokažimo, da velja tudi sklep v obratno smer. Denimo, da so vektorji $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ linearno odvisni. Tedaj obstaja netrivialna linearna kombinacija $\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{x}_n = \mathbf{0}$. Ker je kombinacija netrivialna, je vsaj eden od koeficientov različen od 0, denimo $\lambda_i \neq 0$. Sedaj pa lahko v zgornji enačbi na obeh straneh odštejemo $\lambda_i \boldsymbol{x}_i$ in dobimo $-\lambda_i \boldsymbol{x}_i = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \ldots + \lambda_{i-1} \boldsymbol{x}_{i-1} + \lambda_{i+1} \boldsymbol{x}_{i+1} + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{x}_n$. Če to enačbo še delimo z $-\lambda_i$, bomo izrazili $\boldsymbol{x}_i$ kot linearno kombinacijo preostalih vektorjev.

Trditev 3. sledi neposredno iz dejstva, da je množica vseh linearnih kombinacij danih vektorjev vektorski prostor. Zato je vsaka linearna kombinacija teh linearnih kombinacij spet linearna kombinacija danih vektorjev.

Trditev 4. sledi iz definicije ranga matrike. □

Iz točke 4. v zadnji trditvi sledi, da so stolpci matrike linearno neodvisni natanko tedaj, ko je njihovo število enako rangu matrike. S tem še dodatno poenostavimo postopek ugotavljanja linearne odvisnosti oziroma neodvisnosti vektorjev iz V_n.

9.5 Baza

V realni ravnini lahko opišemo pot do vsake točke tako, da podamo njeno razdaljo v smeri x in v smeri y. Če vzamemo vektorja $\vec{\imath}$ in $\vec{\jmath}$ kot usmerjeni daljici dolžine 1 v smeri koordinatnih osi x in y, je usmerjena daljica od izhodišča do točke s koordinatama (λ, μ) ravno linearna kombinacija $\lambda\vec{\imath} + \mu\vec{\jmath}$. To pomeni, da lahko vsak vektor $\boldsymbol{a}$ v ravnini izrazimo kot linearno kombinacijo vektorjev $\vec{\imath}$ in $\vec{\jmath}$, oziroma, da je trojica vektorjev $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ in $\vec{a}$ vselej linearno odvisna.

Toda tudi, če bi namesto zgornjih vektorjev vzeli katero koli trojico vektorjev v ravnini, bi ugotovili, da so ti linearno odvisni. V ravnini sta torej linearno neodvisna kvečjemu dva vektorja. Zato pravimo, da je ravnina dvorazsežni vektorski prostor. V splošnem pa imamo naslednjo definicijo.

Definicija 9.2. Vektorski prostor V je n-razsežen, če v njem obstaja n linearno neodvisnih vektorjev, vsak nadaljnji vektor pa je njihova linearna kombinacija. Tedaj zapišemo $\dim V = n$.

Primer 9.8.

1. V prostoru usmerjenih daljic, ne moremo najti več kot tri linearno neodvisne usmerjene daljice.

2. V ravnini sta linearno neodvisni lahko največ dve daljici.

V n-razsežnem prostoru V imamo torej tako n-terico vektorjev $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$, da je vsak vektor iz V njihova linearna kombinacija.

Definicija 9.3. V primeru, ko lahko vsak vektor prostora V zapišemo kot linearno kombinacijo vektorjev $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$, pravimo, da vektorji $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ *generirajo* ves vektorski prostor V. To pomeni, da je $L(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n) = V$.

Naj bo dana množica n linearno neodvisnih vektorjev $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$, ki generira ves vektorski prostor. Ker so vektorji linearno neodvisni, nobena njihova podmnožica ne generira celega prostora. Zato pravimo, da je to minimalna množica, ki še generira ves vektorski prostor. Taka množica pa ima v vektorskih prosotrih poseben pomen.

Definicija 9.4. Množica vektorjev $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$, za katero hkrati veljata lastnosti:

- vektorji $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ so linearno neodvisni;
- vektorji $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ generirajo ves prostor V;

se imenuje *baza* vektorskega prostora V.

Vektorski prostor, ki ga generira kaka končna množica vektorjev, imenujemo *končnorazsežni vektorski prostor*. V vsakem končnorazsežnem vektorskem prostoru lahko najdemo bazo.

Trditev 9.3. *Za končnorazsežne vektorske prostore veljajo naslednje trditve:*

1. *Iz vsake končne množice vektorjev, ki generirajo ves prostor, lahko izberemo bazo.*

2. *V vsakem končnorazsežnem prostoru obstaja baza.*

3. *Vsaka maksimalna linearno neodvisna množica je baza.*

4. *Vse baze imajo enako število vektorjev.*

5. *Poljuben vektor se izraža na enoličen način kot linearna kombinacija vektorjev baze.*

6. *Vsako linearno neodvisno množico lahko dopolnimo do baze.*

7. *Razsežnost vektorskega podprostora ne more biti večja od razsežnosti prostora. Če je $P \leq V$ vektorski podprostor in velja* $\dim P = \dim V$*, velja $P = V$.*

8. *V n-razsežnem prostoru obstajajo podprostori vseh manjših razsežnosti.*

Dokaz. 1. Naj množica $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m\}$ generira vektorski prostor V. Imamo dve možnosti. Če so vektorji linearno neodvisni, je množica baza prostora. Če pa vektorji niso linearno neodvisni, lahko po trditvi 9.2, tč. 2. enega od njih, denimo vektor $\boldsymbol{x}_m$, izrazimo kot linearno kombinacijo preostalih, od koder sledi, da že preostalih $m-1$ vektorjev generira ves prostor. Vektor $\boldsymbol{x}_m$ torej lahko odstranimo iz množice. Če je dobljena množica linearno neodvisna, sestavlja bazo, sicer pa lahko nadaljujemo s postopkom odstranjevanja, dokler ne dobimo linearno neodvisne množice, ki je potem baza prostora. Postopek se zagotovo konča, saj je začetna množica končna.

2. Ker je prostor končnorazsežen, ga generira končna množica vektorjev, iz katere pa lahko po prejšnji točki izberemo bazo.

3. Naj bo $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m\}$ maksimalna linearno neodvisna množica. Če ji dodamo kateri koli vektor $\boldsymbol{y}$, postane množica linearno odvisna, od koder s preprostim sklepom z uporabo trditve 9.2, tč. 2. ugotovimo, da je vektor $\boldsymbol{y}$ linearna kombinacija danih vektorjev. Ker je $\boldsymbol{y}$ poljuben vektor iz V, to pomeni, da je množica V generirana z danimi vektorji. Ker so ti vektorji po privzetku linearno neodvisni, zato sestavljajo bazo prostora V.

Dokaz točke 4. bomo tu izpustili.

5. Naj bo $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ baza vektorskega prostora V. Denimo, da bi lahko vektor $\boldsymbol{y}$ izrazili na dva načina kot linearno kombinacijo baznih vektorjev:

$$\boldsymbol{y} = \lambda_1 \boldsymbol{b}_1 + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{b}_n$$

in

$$\boldsymbol{y} = \mu_1 \boldsymbol{b}_1 + \ldots + \mu_n \boldsymbol{b}_n$$

Če odštejemo zgornji enačbi dobimo enačbo

$$\boldsymbol{0} = (\lambda_1 - \mu_1)\boldsymbol{b}_1 + \ldots + (\lambda_n - \mu_n)\boldsymbol{b}_n,$$

ki pa je zaradi linearne neodvisnoti baznih vektorjev lahko izpolnjena, le če je pripadajoča linearna kombinacija trivialna, ali drugače povedano, če za vsak $i = 1, \ldots, n$ velja $\lambda_i - \mu_i = 0$. To pa pomeni, da sta obe linearni kombinaciji, s katerima smo izrazili vektor $\boldsymbol{y}$ enaki.

6. Imejmo neko linearno neodvisno množico $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k\}$. Če je množica že baza, lahko končamo. Če pa množica še ni baza, lahko najdemo tak vektor $\boldsymbol{x}_{k+1}$, ki ni linearna kombinacija preostalih in so zato vektorji $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{k+1}\}$ še zmeraj linearno neodvisni. Če vektorji še ne sestavljajo baze, postopek nadaljujemo. Ker je prostor končno razsežen, bomo po končnem številu korakov prišli do baze prostora.

7. Naj bo P vektorski podprostor prostora V in $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ njegova baza. Po drugi strani pa jim zaradi razsežnosti prostora V ni mogoče dodati nobenega novega vektorja iz prostora V, ne da bi množica postala linearno odvisna. To pa pomeni, da so vsi vektorji iz prostora V že v linearni lupini vektorjev baze $\mathcal{B}$, kar pomeni, da je $\mathcal{B}$ tudi že baza prostora V in sta tako prostora P in V enaka, kar smo tudi trdili.

8. Naj bo V n-razsežen vektorski prostor in $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ njegova baza. Tedaj lahko definiramo vektorske prostore $V_k = L(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k)$, za $k = 1, \ldots, n$, ki so zaporedoma razsežnosti $1, 2, \ldots, n$. Poleg tega lahko vidimo, da je tudi vsak podprostor v naslenjem: $V_k \leq V_{k+1}$. □

V prostoru n-teric V_n obstaja odlikovana baza, ki jo imenujemo *standardna baza*. To je baza sestavljena iz vektorjev

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \boldsymbol{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vsak vektor

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

se izraža kot linearna kombinacija $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$.

Naj bo $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ baza vektorskega prostora V in $\boldsymbol{x}$ poljuben vektor iz tega prostora. Ta vektor lahko tedaj na en sam način izrazimo kot linearno kombinacijo baznih vektorjev:

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{b}_1 + x_2\boldsymbol{b}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{b}_n.$$

Koeficiente $x_1, \ldots, x_n$ imenujemo *koordinate* vektorja $\boldsymbol{x}$ v bazi $\mathcal{B}$.

Primer 9.9.

1. Koordinate stolpca
$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$
v standardni bazi prostora V_n so ravno njegove komponente x_i za $i = 1, \ldots, n$.

2. Naj bo dana baza $\mathcal{B}$ prostora V_3, ki jo sestavljajo vektorji
$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ in } \boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$
Naj bo dan še vektor
$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$
Vektor $\boldsymbol{x}$ lahko izrazimo kot $\boldsymbol{x} = 0\boldsymbol{b}_1 + 2\boldsymbol{b}_2 + 1\boldsymbol{b}_3$. Koordinate vektorja $\boldsymbol{x}$ v bazi $\mathcal{B}$ so torej (0, 2, 1).

9.6 Skalarni produkt v prostoru V_n, norma vektorja, ortogonalnost

Skalarni produkt je preslikava, ki dvema vektorjema priredi število. V prostoru V_n definiramo skalarni produkt za n-terici
$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \text{in} \qquad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$
s predpisom
$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n.$$

Skalarni produkt ima naslednje lastnosti:

komutativnost $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle$;

homogenost $\langle \alpha\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \alpha\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$;

aditivnost $\langle \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y} \rangle + \langle \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y} \rangle$;

pozitivna definitnost $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \geq 0$ in $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 0$ natanko tedaj, ko je $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

Vektorski prostor s skalarnim produktom imenujemo *evklidski prostor*.

S pomočjo skalarnega produkta definiramo *dolžino* ali *normo vektorja*:

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle}.$$

V prostoru V_n je norma vektorja

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

enaka

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

S pomočjo skalarnega produkta definiramo še *kot* φ med vektorjema $\boldsymbol{x}$ in $\boldsymbol{y}$ s predpisom

$$\cos\varphi = \frac{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle}{\|\boldsymbol{x}\| \|\boldsymbol{y}\|}$$

in *razdaljo*med vektorjema:

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$$

Kot med vektorjema v n-razsežnem prostoru V_n seveda nima geometrijskega pomena, pač pa ga lahko razumemo kot mero različnosti komponent vektorjev $\boldsymbol{x}$ in $\boldsymbol{y}$. Majhen kot, oziroma skalarni produkt, ki je blizu produktu dolžin vektorjev pomeni, da so komponente obeh vektorjev večinoma enakih predznakov; če je kot blizu 180°, oziroma je skalarni produkt blizu nasprotne vrednosti produkta dolžin, kaže na to, da so komponente vektorjev pretežno nasprotnih predznakov. Če pa je kot med vektorjema blizu 90° pomeni, da so komponente v približno enaki meri enakih kot nasprotnih predznakov.

Vektorja $\boldsymbol{x}$ in $\boldsymbol{y}$ sta *ortogonalna* ali *pravokotna*, če je njun skalarni produkt enak 0. Pišemo tudi $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$. Za množico neničelnih vektorjev $\{\boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_n\}$ pravimo, da tvori *ortogonalni sistem*, kadar so ti vektorji paroma ortogonalni. Če poleg tega velja, da imajo vsi vektorji ortogonalnega sistema dolžino 1, pravimo, da imamo *ortonormiran sistem*. Vektorji, ki sestavljajo ortogonalni sistem, so vselej linearno neodvisni. Če imamo ortogonalni sistem, ki je hkrati tudi baza prostora V, ga imenujemo *ortogonalna baza (OB)*. Če je OB ortonormiran sistem, jo imenujemo *ortonormirana baza (ONB)*.

Primer 9.10. Standardna baza prostora V_n je ONB.

Vsako množico paroma ortogonalnih vektorjev $\{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k\}$ lahko dopolnimo do ortogonalne baze. To lahko storimo po naslednjem postopku:

- Če vektorji $\{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k\}$ še ne tvorijo baze, dodamo nek vektor $\boldsymbol{b}_{k+1}$, ki je pravokoten na vse prejšnje vektorje; torej zadošča enačbam $\langle \boldsymbol{b}_{k+1}, \boldsymbol{b}_i \rangle = 0$ za vsak $i = 1, \ldots, k$.

- Zgornje enačbe predstavljajo homogen sistem linearnih enačb, vektor $\boldsymbol{b}_{k+1}$ pa je ena od rešitev tega sistema.

- Zgornji postopek nadaljujemo dokler dobljeni vektorji ne sestavljajo baze prostora.

Vsaki ortogonalni bazi lahko priredimo ortonormirano bazo tako, da njene elemente normiramo. Vektor $\boldsymbol{b}_i$ normiramo tako, da ga pomnožimo z $\frac{1}{\|\boldsymbol{b}_i\|}$.

Primer 9.11. Dopolnimo vektor

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

do ortogonalne baze in ji priredimo ortonormirano bazo: Najprej dodamo vektor $\boldsymbol{b}_2$, oblike

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

ki je na prvega ortogonalen:

$$\langle \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_1 \rangle = x_1 - x_2 + x_3 = 0.$$

Tej enačbi zadošča več vektorjev. Eden od njih je

$$\boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ortogonalnemu sistemu $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$ moramo dodati še en vektor, ki bo na oba ortogonalen. Vektor $\boldsymbol{b}_3$ spet iščemo v obliki

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

in mora zadoščati enačbama:

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_1 \rangle &= x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ \langle \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_2 \rangle &= x_1 + x_2 = 0 \end{aligned}$$

Zgornjemu homogenemu sistemu pa zadošča vektor

$$\boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Vektorji $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}$ sestavljajo ortogonalno bazo.

Končno vse tri vektorje še normiramo:

$$\boldsymbol{b}_1' = \frac{1}{\|\boldsymbol{b}_1\|}\boldsymbol{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{b}_2' = \frac{1}{\|\boldsymbol{b}_2\|}\boldsymbol{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{b}_3' = \frac{1}{\|\boldsymbol{b}_3\|}\boldsymbol{b}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

Vektorji $\{\boldsymbol{b}_1', \boldsymbol{b}_2', \boldsymbol{b}_3'\}$ sestavljajo ONB.

Vsaki množici vektorjev $M \subset V$ lahko priredimo *ortogonalni komplement*

$$M^\perp = \{\boldsymbol{x} \in V : \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 0, \forall \boldsymbol{y} \in M\} \tag{16}$$

Ortogonalni komplement množice je vedno podprostor V.

Primer 9.12.

1. V trirazsežnem prostoru usmerjenih daljic je ortogonalni komplement vektorja ravnina, ki je na ta vektor ortogonalna.

2. Naj bo $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_n\}$ ONB nekega v. p. Potem je ortogonalni komplement množice $\{\boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_k\}$ za $k \leq n$ vektorski podprostor generiran z vektorji $\boldsymbol{q}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{q}_n :\ L(\boldsymbol{q}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{q}_n)$.

Naloge

1. Dani so vektorji

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Zapiši naslednje njihove linearne kombinacije:

(a) $3\boldsymbol{x}_1 - 7\boldsymbol{x}_2 + 3\boldsymbol{x}_3$;

(b) $-12\boldsymbol{x}_1 + 7\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_3$.

2. Zapiši vektor $\boldsymbol{y}$ kot linearno kombinacijo vektorjev $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k$.

(a) $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

(b) $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$

(c) $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} -7 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

(d) $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

(e) $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

(f) $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(g) $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} -9 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

(h) $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \\ -22 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

(i) $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

(j) $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} -4 \\ 15 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

(k) $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} -3 \\ 11 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

3. Zapiši polinom $q(x) = 2x^2 - 10x + 5$ kot linearno kombinacijo polinomov $p_1(x) = x^2 + 2x - 3$, $p_2(x) = 2x^2 + 2x + 3$, $p_3(x) = 3x^2 - 2x + 1$.

4. Ugotovi, ali lahko vektor $\boldsymbol{y}$ izrazimo kot linearno kombinacijo vektorjev $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k$.

(a) $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$

(b) $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

5. Ugotovi, ali je vektor $\boldsymbol{y}$ v linearni lupini vektorjev $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k$.

(a) $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \end{bmatrix}$

(b) $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

6. Ugotovi, ali je polinom $q(x)$ v linearni lupini polinomov $p_1(x)$ in $p_2(x)$.

(a) $q(x) = 3x^2 + 4x - 6 \qquad p_1(x) = 2x^2 + x - 3,\ p_2(x) = x^2 + 2x + 3$

(b) $q(x) = -x^2 - 5x + 4 \qquad p_1(x) = 2x^2 + x - 2,\ p_2(x) = x^2 + 2x - 2$

7. Ali so polinomi $p_1(x) = x^2 - 3, p_2(x) = x^2 + 3x + 2$ in $p_3(x) = 2x^2 + 3x - 1$ linearno neodvisni?

8. Koliko je med naslednjimi vektorji linearno neodvisnih?

(a) $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$

(b) $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ -6 \end{bmatrix}$

(c) $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_4 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$

9. Ali sestavljajo naslednji vektorji bazo danega vektorskega prostora?

(a) $\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}; \qquad V_2$

(b) $\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}; \qquad V_3$

(c) $\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}; \qquad V_3$

(d) $\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix}3\\1\\-1\end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix}3\\-1\\2\end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix}3\\3\\-4\end{bmatrix}; \qquad V_3$

(e) $\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix}2\\0\\4\end{bmatrix}; \qquad V_3$

10. Dopolni naslednjo množico vektorjev do baze vektorskega prostora V_3.

(a) $\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}$

(b) $\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix}3\\1\\0\end{bmatrix}$

(c) $\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix}-2\\0\\2\end{bmatrix}$

11. Med naslednjimi vektorji izberi maksimalno linearno neodvisno množico in jo po potrebi dopolni do baze vektorskega prostora V_3.

(a) $\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix}-2\\-2\\-8\end{bmatrix}$

(b) $\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix}3\\1\\-1\end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix}2\\-2\\4\end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix}-18\\2\\-8\end{bmatrix}$

(c) $\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix}3\\-1\\4\end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix}-3\\1\\-4\end{bmatrix}$

12. Izračunaj dolžini naslednjih vektorjev, razdaljo in kot med njima:

(a) $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$ in $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix}$

(b) $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ in $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}$

(c) $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ in $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$

13. Določi ortogonalni komplement naslednje množice vektorjev:

(a) $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(b) $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

(c) $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

14. Pokaži, da so dani vektorji ortogonalni in jih dopolni do ortogonalne baze prostora V_3. Vse tri vektorje še normiraj, da dobiš ortonormirano bazo tega prostora.

(a) $\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(b) $\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

(c) $\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Rešitve nalog razdelka 1

1. (a) Da.
(b) Ne.
(c) Ne.
(d) Da.
(e) Da.
(f) Ne.
(g) Da.
(h) Da.
(i) Da.
(j) Da.

3. (a) Logično pravilna.
(b) Logično nepravilna.
(c) Faktična.
(d) Logično pravilna.
(e) Faktična.
(f) Logično nepravilna.
(g) Logično nepravilna.
(h) Faktična.
(i) Logično pravilna.
(j) Faktična.

5. (a) Izjava je logično pravilna.
(b) $A = n, B = p, C = p$.
(c) $A = p, B = n, C = p$
(d) $A = n, B = p$
(e) Izjava je logično pravilna.
(f) $A = p, B = n, C = p$ ali $A = p, B = p, C = n$

8. (a) $A \vee B \vee C$
(b) $\neg A \vee B$
(c) $(\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$

11. (a) Napačno.
(b) Pravilno.
(c) Napačno.
(d) Pravilno.
(e) Napačno.
(f) Pravilno.
(g) Napačno.
(h) Pravilno.
(i) Napačno.
(j) Pravilno.
(k) Napačno.

Rešitve nalog razdelka 2

1. (a) $B \subseteq A$
(b) $A \subseteq B$

2. (a) Prva je podmnožica druge.

(b) Prva je podmnožica druge.
(c) Druga je podmnožica prve.
(d) Druga je podmnožica prve.
(e) Prva je podmnožica druge.
(f) Množici sta enaki.
(g) Druga je podmnožica prve.
(h) Množici sta enaki.
(i) Druga je podmnožica prve.

3. (a) $A \wedge B$
(b) $A \wedge B$
(c) A
(d) B

4. (a) Izjavi sta enakovredni.
(b) Izjavi sta enakovredni.

5. (a) S prevedbo na izjavni račun dobimo $\neg A \wedge B \sim N$. Z zanikanjem obeh izjav dobimo $\neg(\neg A \wedge B) \sim P$ in od tod s poenostavitvijo leve strani $A \vee \neg B \sim P$. Izjava $A \vee \neg B$ je torej pravilna, po drugi strani pa je ta izjava enakovredna izjavi $B \Rightarrow A$. Ker je ta izjava pravilna, od tod sledi, da je pravilna relacija $A \subseteq B$ za pripadajoči množici.
(b) Relacijo prevedemo v izjavo $B \Rightarrow B \wedge \neg A$, ki je enakovredna izjavi $\neg(A \wedge B)$. Ker je ta izjava pravilna je izjava $A \wedge B$ nepravilna, kar je enakovredno temu, da je $A \cap B$ prazna množica. Množici A in B sta torej disjunktni.

Rešitve nalog razdelka 3

1. (a) 4, 5
(b) 1, 2
(c) $\mathcal{D}R = \{1, 2, 3, 4\}, \mathcal{Z}R = \{2, 3, 4, 5\}$
(d) Relacija '$<$'.

2. (a) $\mathcal{D}R$ je množica vseh ljudi, ki imajo roditelje. Torej množica vseh ljudi.
$\mathcal{Z}R$ je množica vseh roditeljev (ljudi, ki imajo otroke).
$\mathcal{D}S$ je množica vseh žensk, ki imajo sorojence.
$\mathcal{Z}R$ je množica vseh ljudi, ki imajo sestre.
(b) $xR^{-1}y \;\Leftrightarrow$ 'oseba x je otrok osebe y'
$xS^{-1}y \;\Leftrightarrow$ 'oseba x je sorojenec (brat ali sestra) osebe ženskega spola y'
(c) $x(S \circ R)y \;\Leftrightarrow$ 'oseba x je teta osebe y'.

3. (a) asimetrična, tranzitivna, sovisna
(b) refleksivna, antisimetrična, tranzitivna, strogo sovisna
(c) refleksivna, antisimetrična, tranzitivna
(d) refleksivna, simetrična
(e) refleksivna, simetrična, tranzitivna

4. (a) relacija šibke urejenosti
(b) ekvivalenčna relacija
(c) refleksivna, tranzitivna
(d) ekvivalenčna relacija
(e) refleksivna, simetrična
(f) Relacija je ekvivalenčna.
Dokaz.

Relacija je refleksivna, saj vedno velja $mn = mn$, od koder sledi, da je vsak ulomek v relaciji sam s seboj.
Relacija je simetrična: Naj bo $\frac{m}{n} R \frac{p}{q}$. Tedaj velja $mq = np$, kar je ekvivalentno ekvivalentno z $pn = qm$, od koder sledi $\frac{p}{q} R \frac{m}{n}$.
Relacija je tranzitivna. Naj bo $\frac{m}{n} R \frac{p}{q}$ in $\frac{p}{q} R \frac{r}{s}$, zato velja $mq = np$ in $ps = qr$. Z množenjem levih in desnih strani obeh enakosti dobimo: $msqp = nrqp$. Ker mora biti imenovalec nujno različen od 0, je $q \neq 0$. Če velja tudi $p \neq 0$, lahko enačbo krajšamo s pq, od koder sledi $ms = nr$. Če pa je $p = 0$, morata biti enaka 0 tudi p in r, od koder spet sledi $ms = nr$. V vsakem primeru torej velja $\frac{m}{n} R \frac{r}{s}$.
(g) Relacija šibke urejenosti.

5. (a) Relacija je ekvivalenčna. Ekvivalenčni razred sestavljajo vsa naselja, ki so povezana s cestami.
(b) Ni ekvivalenčna relacija, ker ni tranzitivna.
(c) Relacija je ekvivalenčna. Ekvivalenčni razred sestavljajo ljudje, ki živijo v posameznem kraju. Faktorsko množico pa lahko enačimo z množico vseh krajev.
(d) Ni ekvivalenčna relacija, ker ni tranzitivna.
(e) Relacija je ekvivalenčna. Ekvivalenčni razred sestavljajo števila z enakim celoštevilskim delom. Faktorsko množico pa lahko enačimo z množico vseh celih števil.
(f) Relacija je ekvivalenčna. Ekvivalenčni razred sestavljajo števila deljiva z dano množico praštevil. Faktorsko množico pa lahko enačimo s podmnožicami praštevil.

6. (a) Relacija ni tranzitivna, saj ima vsak človek dve babici. Če ima denimo oseba A skupno babico z osebama B in C, to ni nujno ista babica. B in C tako nimata nujno skupne babice.
(b) Relacija ni tranzitivna: velja na primer $1 \cdot 0 = 0$ in $0 \cdot (-1) = 0$, vendar $1 \cdot (-1) < 0$. Torej je $1R0$ in $0R(-1)$, vendar $\neg 1R(-1)$.
(c) Tudi ta relacija ni tranzitivna, saj je na primer $1R3$ in $3R5$, vendar $\neg 1R5$.

Rešitve nalog razdelka 4

1. Inverzna funkcija je podana s tabelo

x	a	b	c	d
$f^{-1}(x)$	4	2	1	3

2. (a) f ni niti injektivna niti surjektivna, g je bijektivna

x	a	b	c	d
$(f \circ g)(x)$	c	d	d	b

x	a	b	c	d
$(g \circ f)(x)$	b	a	d	a

nobena od funkcij $f \circ g$ in $g \circ f$ ni niti injektivna niti surjektivna
(b) f je bijektivna, g ni niti injektivna niti surjektivna

x	1	2	3	4
$(f \circ g)(x)$	1	2	1	4

x	1	2	3	4
$(g \circ f)(x)$	1	3	3	4

nobena od funkcij $f \circ g$ in $g \circ f$ ni niti injektivna niti surjektivna

3. (a)

$$\begin{aligned}(f\circ g)(x) &= 3((x+1)^2-1)+2 = 3(x+1)^2-1\\ (g\circ f)(x) &= ((3x+2)+1)^2-1 = 3(x+1)^2-1\\ \mathcal{Z}f &= \mathbb{R}\\ \mathcal{Z}g &= [-1,\infty)\\ \mathcal{Z}(f\circ g) &= [-1,\infty)\\ \mathcal{Z}(g\circ f) &= [-1,\infty)\end{aligned}$$

bijektivna je funkcija f, ostale pa niso niti injektivne niti surjektivne

(b)

$$\begin{aligned}(f\circ g)(x) &= (2x-1)^2-4(2x-1)+4 = ((2x-1)-2)^2 = (2x-3)^2\\ (g\circ f)(x) &= 2(x^2-4x+4) = 2(x-2)^2\\ \mathcal{Z}f &= [0,\infty)\\ \mathcal{Z}g &= \mathbb{R}\\ \mathcal{Z}(f\circ g) &= [0,\infty)\\ \mathcal{Z}(g\circ f) &= [0,\infty)\end{aligned}$$

bijektivna je funkcija g, ostale pa niso niti injektivne niti surjektivne

(c)

$$\begin{aligned}(f\circ g)(x) &= \sqrt{x+3+3} = \sqrt{x+6}\\ (g\circ f)(x) &= \sqrt{x+3}+3\\ \mathcal{Z}f &= [0,\infty)\\ \mathcal{Z}g &= \mathbb{R}\\ \mathcal{Z}(f\circ g) &= [0,\infty)\\ \mathcal{Z}(g\circ f) &= [3,\infty)\end{aligned}$$

funkcija f je injektivna in ni surjektivna, g je bijektivna, $f\circ g$ in $g\circ f$ sta injektivni in nista surjektivni

4. Definirajmo bijektivno funkcijo $f\colon \mathbb{Z}\to\mathbb{N}$ s predpisom

$$f(n) = \begin{cases} -2n+1 & n\le 0\\ 2n & n>0\end{cases}$$

Ker obstaja med obema množicama bijektivna funkcija, sta ekvipolentni.

Rešitve nalog razdelka 5

1. (b) 48
(c) 68
(d) 15

2. (b) 75
(c) 91

(d) 39

3. $3 \cdot 2 \cdot 6 = 36$

4. $4 \cdot 5 \cdot 3 = 60$

5. $5! = 120$

6. (a) $6! = 720$

(b) $5! = 120$

(c) $6! - 5! = 600$

7. $\frac{6!}{3! \cdot 2! \cdot 1!} = 60$

8. (a) $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$

(b) $3^1 0 = 59\,049$

9. $\frac{16!}{8! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!} = 64\,864\,800$

10. (a) $8! = 40\,320$

(b) $7! = 5040$

(c) $8! - 7! = 35\,280$

11. (a) $9! = 362\,880$

(b) $\frac{9!}{2!} = 181\,440$

(c) $\frac{11!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 4\,989\,600$

12. $\frac{6!}{2!} = 360$

13. (a) $10! = 3\,628\,800$

(b) $5! \cdot (2!)^5 = 3840$

(c) $2! \cdot (5!)^2 = 28\,800$

14. (a) $25^3 = 15\,625$

(b) $5 \cdot 25^2 = 3125$

(c) $25^3 - 2 \cdot 25^2 + 25 = 14\,400$

15. (a) $6! = 720$

(b)

$5! = 120$

(c)

$3! \cdot 3! = 36$

16. (a) $20^5 = 3\,200\,000$

(b) $\binom{20+5-1}{5} = 42\,504$

17. (a) $\frac{7!}{(7-4)!} = 840$

(b) $3 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 360$

(c) $4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 = 240$

18. (a) $\binom{30}{5} = 142\,506$

(b) $\binom{10}{2}\binom{20}{3} = 51\,300$

(c) $\binom{10}{3}\binom{20}{2} + \binom{10}{2}\binom{20}{3} + \binom{10}{1}\binom{20}{4} + \binom{10}{3}\binom{20}{3} = 138\,054$

19. $52^5 = 380\,204\,032$

20. $12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320$

21. (a) $3^5 = 243$

(b) $3^3 \cdot 2^2 = 108$

(c) $3^3 \cdot 2 \cdot 1 = 54$

22. $4^5 = 1024$

$\binom{20}{5} = 15\,504$

24. (a) $\binom{30}{3} = 4060$

(b) $\binom{20}{2} \cdot \binom{10}{1} = 1900$

Rešitve nalog razdelka 6

2. (a) Grafa sta izomorfna. Izomorfizem je na primer preslikava

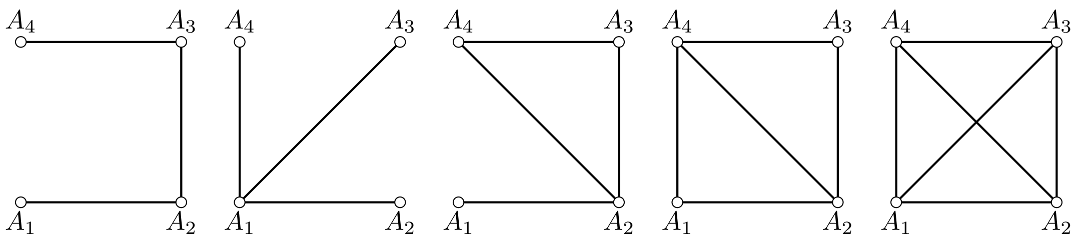
x	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8
$f(x)$	B_1	B_2	B_4	B_5	B_3	B_6	B_8	B_7

(b) Grafa nista izomorfna. Graf C_6 je regularen stopnje 2, prvi graf pa vsebuje točke stopnje 3, zato ne moreta biti izomorfna.

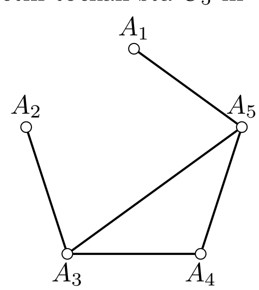
3. (a) Graf ni dvodelen, saj vsebuje lih cikel $A_2A_3A_5A_6A_4$; ni regularen, ker na primer točki A_2 in A_4 nista iste stopnje; vsebuje Eulerjev sprehod, npr. $A_2A_3A_5A_6A_4A_2A_1A_5$, ne vsebuje pa Eulerjevega obhoda.

(b) Graf je dvodelen in regularen, ne vsebuje pa niti Eulerjevega obhoda niti sprehoda, saj ima več kot dve točki lihe stopnje.

4.



5. Edina *sebi komplementarna* grafa na petih točkah sta C_5 in



Rešitve nalog razdelka 7

1. (a) $AB = \begin{bmatrix} 12 \\ 4 \end{bmatrix}$, BA ne obstaja.

(b) $AB = \begin{bmatrix} 20 & 13 \\ 60 & 34 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} -4 & 26 & 28 \\ 0 & 10 & 10 \\ -4 & 46 & 48 \end{bmatrix}$.

(c) $AB = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -50 & 7 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} -10 & -14 & 27 \\ 16 & 29 & -74 \\ 14 & 13 & -7 \end{bmatrix}$.

(d) $AB = \begin{bmatrix} -10 & 36 \\ 19 & -22 \\ 0 & 36 \end{bmatrix}$, BA ne obstaja.

(e) AB ne obstaja, $BA = \begin{bmatrix} 11 & -4 & 0 \\ 12 & 6 & 7 \end{bmatrix}$.

(f) $AB = \begin{bmatrix} 6 & 10 & 3 \\ 2 & 6 & -15 \\ 10 & 52 & -57 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} -7 & -16 & 10 \\ 6 & -10 & 1 \\ 52 & 40 & -28 \end{bmatrix}$.

(g) $AB = \begin{bmatrix} 33 & 41 & 40 \\ 29 & 13 & -43 \\ 10 & 32 & 71 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 21 & 13 & -3 & 16 \\ 28 & 13 & 0 & 22 \\ 45 & -38 & 67 & 42 \\ 19 & 5 & 1 & 16 \end{bmatrix}$.

2. (a) -7

(b) -62

(c) 16

(d) -27

(e) 380

(f) -18

(g) 15

(i) 0

(k) -1

(l) -2

(m) -28

3. (a) $r(A) = 2$

(b) $r(A) = 1$

(c) $r(A) = 2$

(d) $r(A) = 2$

(e) $r(A) = 3$

(f) $r(A) = 1$

Rešitve nalog razdelka 8

1. (a) $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$

(b) $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$

(c) $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -2t \\ t \\ t \end{bmatrix}; t \in \mathbb{R}$

(d) $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 19 - 5t \\ 10 - 2t \\ t \end{bmatrix}; t \in \mathbb{R}$

(e) $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 7-2t \\ t-2 \\ t \end{bmatrix}; t \in \mathbb{R}$

(f) $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

(g) $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \frac{49-4t}{11} \\ \frac{5t+24}{11} \\ t \end{bmatrix}; t \in \mathbb{R}$

(h) $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \frac{7-t}{12} \\ \frac{t+10}{4} \\ t \end{bmatrix}; t \in \mathbb{R}$

(i) Ni rešitve.

2. (a) $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2t \\ -t \\ t \end{bmatrix}; t \in \mathbb{R}$

(b) $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2t \\ -2t \\ t \end{bmatrix}; t \in \mathbb{R}$

(c) $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -2t \\ t \\ t \end{bmatrix}; t \in \mathbb{R}$

(d) $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -2t \\ -5t/2 \\ t \end{bmatrix}; t \in \mathbb{R}$

(e) $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 3t \\ -t \\ t \end{bmatrix}; t \in \mathbb{R}$

(f) $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2t \\ -2t \\ t \end{bmatrix}; t \in \mathbb{R}$

(g) $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(h) $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -4t/3 \\ 7t/3 \\ t \end{bmatrix}; t \in \mathbb{R}$

3. (c) Pogojem zadostimo na enoličen način, če kupimo 5 vozil tipa A, 3 vozila tipa B in 2 vozili tipa C.

4. Trgovec je nabavil 15 vreč sladkorja, 65 vreč soli in 20 vreč pralnega praška.

5. Dosegli so 5 zmag, 3 neodločene izide in 1 poraz.
6. Spekla je 10 piškotov A, 5 piškotov B in 6 piškotov C.

Rešitve nalog razdelka 9

1. (a) $\begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ 20 \end{bmatrix}$
(b) $\begin{bmatrix} -16 \\ 17 \\ 17 \end{bmatrix}$

2. (a) $\boldsymbol{y} = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}_1 + \frac{1}{4}\boldsymbol{x}_3$
(b) $\boldsymbol{y} = 2\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3$
(c) $\boldsymbol{y} = -\frac{23}{5}\boldsymbol{x}_1 - \frac{4}{5}\boldsymbol{x}_2$
(d) $\boldsymbol{y} = -2\boldsymbol{x}_1 + 3\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_3$
(e) $\boldsymbol{y} = 3\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 + 2\boldsymbol{x}_3$
(f) $\boldsymbol{y} = 5\boldsymbol{x}_1 + 2\boldsymbol{x}_2$
(g) $\boldsymbol{y} = 2\boldsymbol{x}_1 - 3\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3$
(h) $\boldsymbol{y} = -3\boldsymbol{x}_1 + 2\boldsymbol{x}_2 - 2\boldsymbol{x}_3$
(i) $\boldsymbol{y} = -2\boldsymbol{x}_1 - 3\boldsymbol{x}_2 + 5\boldsymbol{x}_3$
(j) $\boldsymbol{y} = 3\boldsymbol{x}_1 - 2\boldsymbol{x}_2 + 4\boldsymbol{x}_3$
(k) $\boldsymbol{y} = -2\boldsymbol{x}_1 + 3\boldsymbol{x}_2 + 2\boldsymbol{x}_3$

3. $q(x) = -2p_1(x) - p_2(x) + 2p_3(x)$

4. (a) Ne.
(b) Ne.

5. (a) Ne.
(b) Ne.

6. (a) Ne.
(b) Da, $q(x) = p_1(x) - 3p_2(x)$.

7. Ne.

8. (a) 1
(b) 2
(c) 3

9. (a) Da.
(b) Ne.
(c) Da.
(d) Ne.
(e) Ne.

10. (a) $\boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
(b) $\boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

(c) Npr. $\boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$

11. (a) Vektorja $\boldsymbol{b}_1$ in $\boldsymbol{b}_2$ sta linearno neodvisna, $\boldsymbol{b}_3$ pa lahko nadomestimo z vektorjem $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(b) Vektorja $\boldsymbol{b}_1$ in $\boldsymbol{b}_2$ sta linearno neodvisna, $\boldsymbol{b}_3$ pa lahko nadomestimo z vektorjem $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(c) Vektorja $\boldsymbol{b}_1$ in $\boldsymbol{b}_2$ sta linearno odvisna. Vektor $\boldsymbol{b}_1$ lahko dopolnimo do baze z vektorjema $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

12. (a) $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{6}, \|\boldsymbol{y}\| = \sqrt{5}, d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{17}, \varphi \approx 123^\circ$
(b) $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{2}, \|\boldsymbol{y}\| = \sqrt{5}, d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{3}, \varphi \approx 50^\circ$
(c) $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{14}, \|\boldsymbol{y}\| = \sqrt{41}, d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{91}, \varphi \approx 139^\circ$

13. (a) Ortogonalni komplement je enoparametrična družina vektorjev $\begin{bmatrix} 3t \\ 6t \\ t \end{bmatrix}; t \in \mathbb{R}$.

(b) Ortogonalni komplement je enoparametrična družina vektorjev $\begin{bmatrix} -t/19 \\ 8t/19 \\ t \end{bmatrix}; t \in \mathbb{R}$.

(c) Ortogonalni komplement je dvoparametrična družina vektorjev $\begin{bmatrix} (s-2t)/2 \\ s \\ t \end{bmatrix}; s, t \in \mathbb{R}$.

14. (a) Pripadajoča ortonormirana baza je

$$\boldsymbol{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_3 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(b) Pripadajoča ortonormirana baza je

$$\boldsymbol{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(c) Pripadajoča ortonormirana baza je na primer

$$\boldsymbol{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$