Anuška Ferligoj, Katja Lozar Manfreda, Aleš Žiberna:

OSNOVE STATISTIKE NA PROSOJNICAH

Študijsko gradivo pri predmetu Statistika. Fakulteta za družbene vede, Univerza v Ljubljani

Ljubljana, 2011

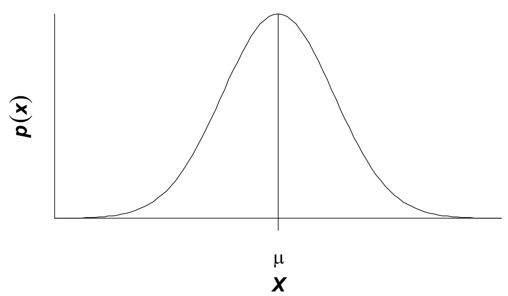
3 NORMALNA PORAZDELITEV

3 NORMALNA PORAZDELITEV 1
3.1 NORMALNA PORAZDELITEV - UVOD 1
3.2 RAČUNANJE VERJETNOSTI ZA NORMALNO PORAZDELJENO SPREMENLJIVKO 3
3.2.1 Računanje verjetnosti za standardizirano normalno porazdeljeno spremenljivko 4
3.3 VAJE 8

3.1 NORMALNA PORAZDELITEV - UVOD

Zakaj je normalna porazdelitev pomembna?

Normalna porazdelitev je osnova, na kateri temelji inferenčna statistika, torej področje sklepanja iz vzorca na populacijo. Izkaže se namreč, da če računamo neke statistične izračune (kasneje jih bomo imenovali statistike) na več vzorcih iz iste populacije, se te statistike v veliko primerih porazdeljujejo prav po normalni porazdelitvi. Poznavanje normalne porazdelitve nam tako olajša razumevanje postopkov sklepanja iz vzorca na populacijo.



Značilnosti normalne porazdelitve

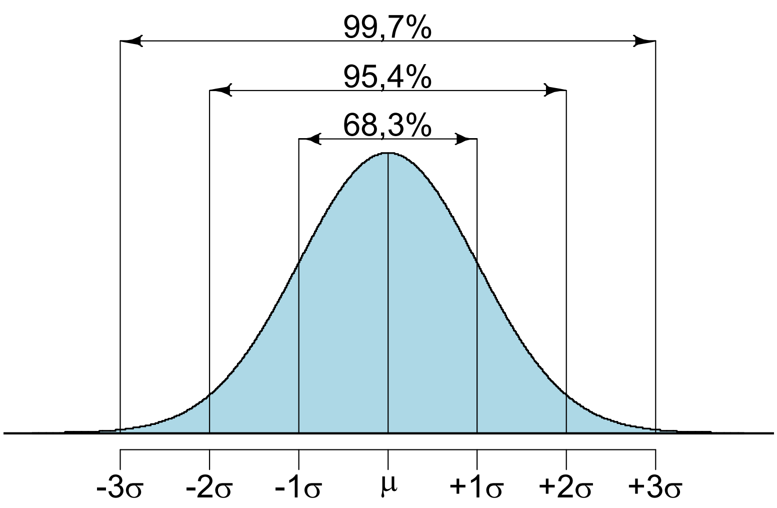
Gre za eno od oblik porazdelitve zvezne slučajne spremenljivke, t.j. spremenljivke, ki lahko zavzame vsako realno število znotraj določenega intervala, in vnaprej ne moremo napovedati, katero vrednost bo zavzela (zato jo imenujemo slučajna). Obliko porazdelitve določa Gaussova krivulja, ki je unimodalna, zvonasta, simetrična.

Značilnosti zvezne normalne porazdelitve:

- Slučajna spremenljivka lahko zavzame vsako realno število na intervalu ($-\infty$, $+\infty$) (rečemo, **zaloga vrednosti** so vsa realna števila).
- Obliko krivulje določa naslednja funkcija (imenujemo jo **verjetnostna gostota**, imenujemo tudi Gaussova krivulja):
$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$$
- S pomočjo verjetnostne gostote lahko izračunamo verjetnost, da slučajna spremenljivka zavzame vrednost na kateremkoli intervalu iz svoje zaloge vrednosti.
- Slučajna spremenljivka *X*, ki je normalno porazdeljena, je določena le z dvema parametroma $X : N(\mu, \sigma)$.

  μ je aritmetična sredina in σ standardni odklon normalno porazdeljene slučajne spremenljivke.

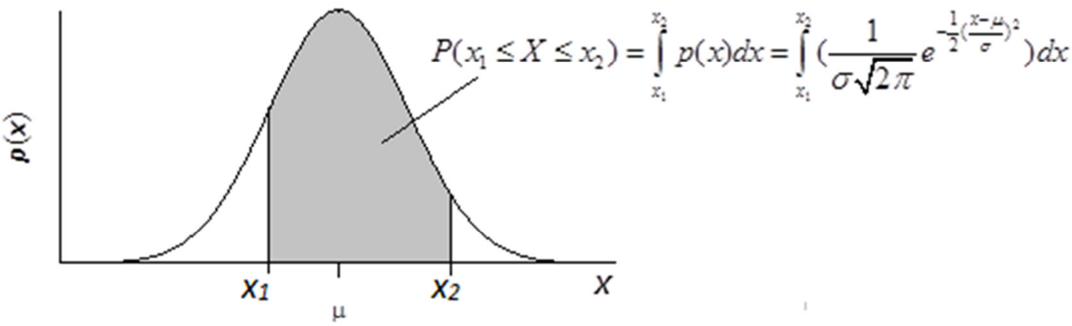
- Od prej že vemo naslednje: če se spremenljivka *X* porazdeljuje normalno z aritmetično sredino μ in standardnim odklonom σ, tedaj velja, da v razmiku:
  - $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$ leži 68.3% enot,
  - $[\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma]$ leži 95,4% enot,
  - $[\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma]$ leži 99,7% enot.



3.2 RAČUNANJE VERJETNOSTI ZA NORMALNO PORAZDELJENO SPREMENLJIVKO

Radi bi računali verjetnost intervalov vrednosti za normalno porazdeljeno slučajno spremenljivko. Gre za verjetnost dogodka, da spremenljivka X zavzame vrednosti v intervalu $[x_1,x_2]$:

$$P(x_1 \le X \le x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\right)dx$$



Verjetnost takega dogodka izračunamo tako, da si pomagamo s standardizacijo. Če slučajno spremenljivko X standardiziramo, dobimo:

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \qquad \left(x_i \to z_i = \frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)$$

Slučajna spremenljivka Z še vedno normalno porazdeljena s parametroma $Z: N(0,1)$ ($\mu_Z=0$ in $\sigma_Z=1$), ima pa preprostejšo verjetnostno verjetnostno gostoto:

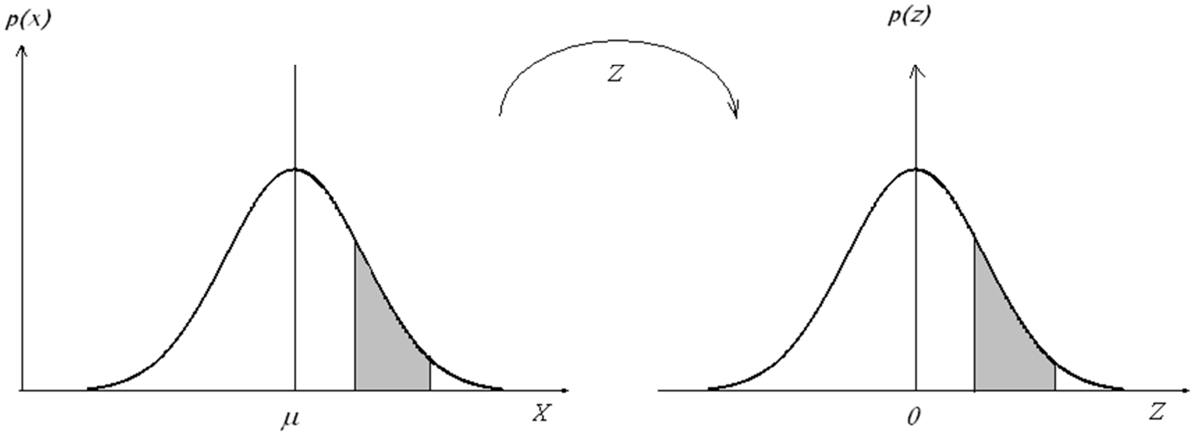
$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

Verjetnost dogodka, da slučajna spremenljivka X zavzame vrednosti v intervalu $[x_1,x_2]$, tedaj lahko zapišemo:

$$P(x_1 < X < x_2) = P\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{x_2-\mu}{\sigma}\right) = P(z_1 < Z < z_2)$$

Dovolj torej je, da znamo poiskati poljubne verjetnosti dogodkov standardizirane normalno porazdeljene slučajne spremenljivke Z.

Grafično si zgornjo lastnost lahko ponazorimo takole:



V nadaljevanju si bomo pogledali, kako praktično izračunamo verjetnost nekega intervala vrednosti normalno porazdeljene slučajne spremenljivke *X* s pomočjo standardizirane normalno porazdeljene slučajne spremenljivke *Z*.

3.2.1 Računanje verjetnosti za standardizirano normalno porazdeljeno spremenljivko

Standardizirano normalno porazdeljena slučajna spremenljivka *Z* ima $\mu_Z=0$ in $\sigma_Z=1$. Verjetnosti intervala vrednosti za to porazdelitev bi lahko računali s pomočjo določenega integrala na naslednji način:

$$P(z_1 \leq Z \leq z_2) = \int_{z_1}^{z_2} p(z)dz = \int_{z_1}^{z_2} (\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}})dz$$

Ta način bi bil za vsakodnevno uporabo še vedno preveč kompliciran. Zato so bile izdelane tabele oz. obstajajo funkcije v različnih statističnih orodjih (npr. tudi v Excelu), kjer so že zapisane verjetnosti določenih intervalov vrednosti standardizirane slučajne spremenljivke Z. S pomočjo le-teh lahko z nekoliko manipulacije izračunamo verjetnost kateregakoli intervala vrednosti.

V nadaljevanju si bomo pogledali uporabo ene od takih tabel (glej str. 6 in 7). Na podoben način deluje izračun tudi v Excelu.

V tabeli standardizirane normalne porazdelitve, ki jo bomo uporabljali, so že izračunane naslednje verjetnosti, ki jih bomo označevali z $H(z_i)$:

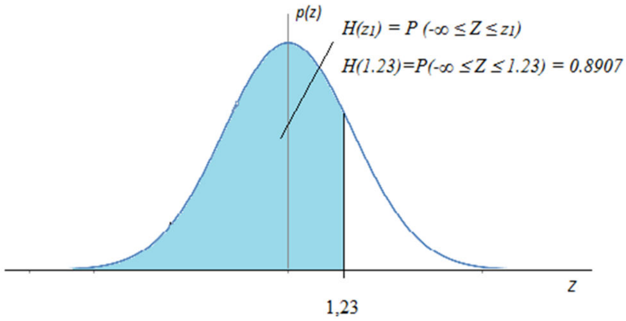
$$P(-\infty \leq Z \leq z_1) = \int_{-\infty}^{z_1} p(z)dz = \int_{-\infty}^{z_1} (\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}})dz = H(z_1)$$
$$P(-\infty \leq Z \leq z_1) = H(z_1)$$

Npr. iz tabele lahko razberemo, da je verjetnost, da standardizirana normalno porazdeljena spremenljivka zavzame katerokoli vrednosti, ki je manjša ali enaka 1.23, enaka 0,8907.

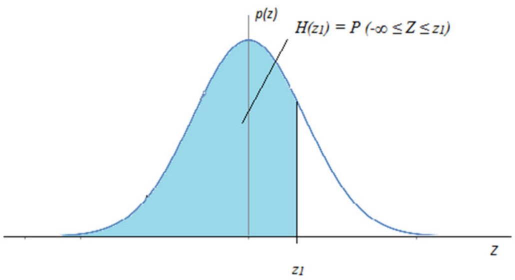
$$P(-\infty \leq Z \leq 1.23) = H(1.23)=0.8907$$

Z večanjem z_1 od $-\infty$ do 0 se verjetnosti $H(z_1)$ večajo od 0 do 0,5, in z večanjem z_1 od 0 do $+\infty$ se verjetnosti $H(z_1)$ večajo od 0,5 do 1. V celoti torej, z večanjem z_1 od $-\infty$ do $+\infty$ se verjetnosti $H(z_1)$ večajo od 0 do 1(glej oba dela tabele na str. 6, 7).

To si lahko ponazorimo tudi grafično. Vrednost $H(z_1)$ je enaka ploščini lika, ki ga omejujeta krivulja funkcije standardizirane normalne porazdelitve in abscisna os v mejah od $-\infty$ do z_1.



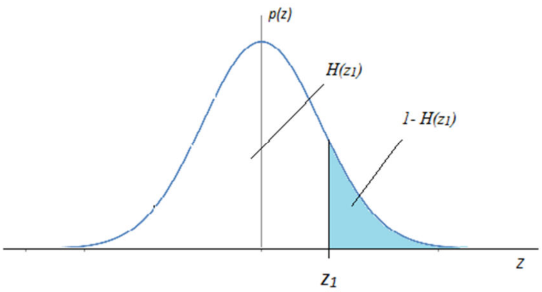
S temi tabeliranimi verjetnostmi si lahko pomagamo pri izračunu poljubnih verjetnostih dogodkov. Iz tabele tako lahko neposredno razberemo:

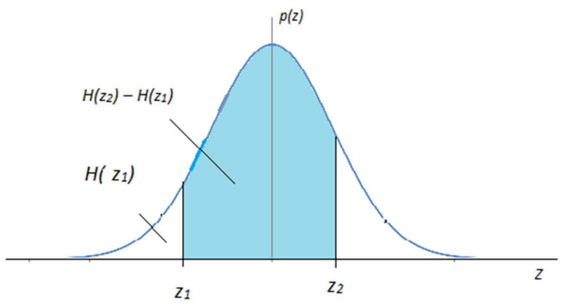


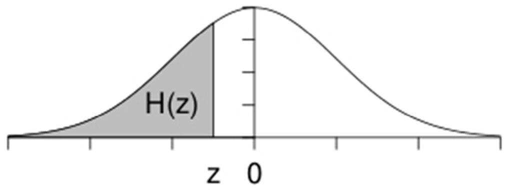
- $P(Z \leq z_1) = H(z_1)$

Z nekoliko računanja pa lahko razberemo tudi:

- $P(Z \geq z_1) = 1 - H(z_1)$
- $P(z_1 < Z < z_2) = H(z_2) - H(z_1)$

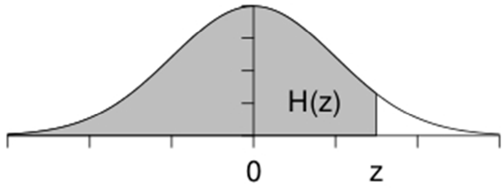






z	-0.09	-0.08	-0.07	-0.06	-0.05	-0.04	-0.03	-0.02	-0.01	-0.00
-3.9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-3.8	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
-3.7	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
-3.6	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002
-3.5	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002
-3.4	0.0002	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003
-3.3	0.0003	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0005	0.0005	0.0005
-3.2	0.0005	0.0005	0.0005	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0007	0.0007
-3.1	0.0007	0.0007	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0009	0.0009	0.0009	0.0010
-3.0	0.0010	0.0010	0.0011	0.0011	0.0011	0.0012	0.0012	0.0013	0.0013	0.0013
-2.9	0.0014	0.0014	0.0015	0.0015	0.0016	0.0016	0.0017	0.0018	0.0018	0.0019
-2.8	0.0019	0.0020	0.0021	0.0021	0.0022	0.0023	0.0023	0.0024	0.0025	0.0026
-2.7	0.0026	0.0027	0.0028	0.0029	0.0030	0.0031	0.0032	0.0033	0.0034	0.0035
-2.6	0.0036	0.0037	0.0038	0.0039	0.0040	0.0041	0.0043	0.0044	0.0045	0.0047
-2.5	0.0048	0.0049	0.0051	0.0052	0.0054	0.0055	0.0057	0.0059	0.0060	0.0062
-2.4	0.0064	0.0066	0.0068	0.0069	0.0071	0.0073	0.0075	0.0078	0.0080	0.0082
-2.3	0.0084	0.0087	0.0089	0.0091	0.0094	0.0096	0.0099	0.0102	0.0104	0.0107
-2.2	0.0110	0.0113	0.0116	0.0119	0.0122	0.0125	0.0129	0.0132	0.0136	0.0139
-2.1	0.0143	0.0146	0.0150	0.0154	0.0158	0.0162	0.0166	0.0170	0.0174	0.0179
-2.0	0.0183	0.0188	0.0192	0.0197	0.0202	0.0207	0.0212	0.0217	0.0222	0.0228
-1.9	0.0233	0.0239	0.0244	0.0250	0.0256	0.0262	0.0268	0.0274	0.0281	0.0287
-1.8	0.0294	0.0301	0.0307	0.0314	0.0322	0.0329	0.0336	0.0344	0.0351	0.0359
-1.7	0.0367	0.0375	0.0384	0.0392	0.0401	0.0409	0.0418	0.0427	0.0436	0.0446
-1.6	0.0455	0.0465	0.0475	0.0485	0.0495	0.0505	0.0516	0.0526	0.0537	0.0548
-1.5	0.0559	0.0571	0.0582	0.0594	0.0606	0.0618	0.0630	0.0643	0.0655	0.0668
-1.4	0.0681	0.0694	0.0708	0.0721	0.0735	0.0749	0.0764	0.0778	0.0793	0.0808
-1.3	0.0823	0.0838	0.0853	0.0869	0.0885	0.0901	0.0918	0.0934	0.0951	0.0968
-1.2	0.0985	0.1003	0.1020	0.1038	0.1056	0.1075	0.1093	0.1112	0.1131	0.1151
-1.1	0.1170	0.1190	0.1210	0.1230	0.1251	0.1271	0.1292	0.1314	0.1335	0.1357
-1.0	0.1379	0.1401	0.1423	0.1446	0.1469	0.1492	0.1515	0.1539	0.1562	0.1587
-0.9	0.1611	0.1635	0.1660	0.1685	0.1711	0.1736	0.1762	0.1788	0.1814	0.1841
-0.8	0.1867	0.1894	0.1922	0.1949	0.1977	0.2005	0.2033	0.2061	0.2090	0.2119
-0.7	0.2148	0.2177	0.2206	0.2236	0.2266	0.2296	0.2327	0.2358	0.2389	0.2420
-0.6	0.2451	0.2483	0.2514	0.2546	0.2578	0.2611	0.2643	0.2676	0.2709	0.2743
-0.5	0.2776	0.2810	0.2843	0.2877	0.2912	0.2946	0.2981	0.3015	0.3050	0.3085
-0.4	0.3121	0.3156	0.3192	0.3228	0.3264	0.3300	0.3336	0.3372	0.3409	0.3446
-0.3	0.3483	0.3520	0.3557	0.3594	0.3632	0.3669	0.3707	0.3745	0.3783	0.3821
-0.2	0.3859	0.3897	0.3936	0.3974	0.4013	0.4052	0.4090	0.4129	0.4168	0.4207
-0.1	0.4247	0.4286	0.4325	0.4364	0.4404	0.4443	0.4483	0.4522	0.4562	0.4602
-0.0	0.4641	0.4681	0.4721	0.4761	0.4801	0.4840	0.4880	0.4920	0.4960	0.5000

Tabela 1: Standardizirana normalna porazdelitev, $H(z) = P(-\infty \leq Z \leq z)$.



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabela 2: Standardizirana normalna porazdelitev, $H(z) = P(-\infty \leq Z \leq z)$.

Primeri

1. $P(Z \geq -2.34) = 1 - H(-2.34) = 1 - 0{,}0096 = 0.9904$
2. $P(-1 \leq Z < +1) = H(1) - H(-1) = 0{,}8413 - 0{,}1587 = 0.6826$
3. Poiščimo tak z, da bo veljalo $P(Z \leq -z_1)=0.1$. (Poiščimo torej, na katerem intervalu leži 10% najmanjših vrednosti – 1. decil.)

   $P(Z \leq -z_1) = 0.10$

   $H(-z_1) = 0{,}10 \Rightarrow -z_1 = -1.28$
4. Poiščimo tak z, da bo veljalo $P(Z \geq z_1)=0{,}25$. (Poiščimo torej, na katerem intervalu leži 25% največjih vrednosti – 3. kvartil.)

   $P(Z \geq z_1) = 0.25$

   $H(z_1) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75 \Rightarrow z_1 = 0{,}67$
5. Predpostavimo, da je spremenljivka inteligenčni kvocient (IQ) porazdeljena normalno z aritmetično sredino $\mu = 100$ in standardnim odklonom $\sigma = 15$.

   a) Kolikšna je verjetnost, da ima slučajno izbrana oseba IQ večji ali enak od 135?

   $$P(X \geq 135) = P(Z \geq \frac{135-100}{15}) = P(Z \geq 2.33) = 1 - H(2.33) = 1 - 0{,}9901 = 0{,}0099$$

   Verjetnost, da bo imela slučajno izbrana oseba IQ večji od 135, je približno 0.01 ali 1%.

   b) Kolikšen IQ ima 10% najinteligentnejših oseb?

   $$P(X \geq x_1) = 0.10 \Rightarrow P(Z \geq z_1) = 0.10$$
   $$H(z_1) = 1 - 0.10 = 0{,}90 \Rightarrow z_1 = 1.28$$
   $$x_1 = \mu + z_1 \cdot \sigma = 100 + 1.28 \cdot 15 = 119.2$$

   10% najinteligentnejših oseb ima IQ večji ali enak 119.2.

3.3 VAJE

1. Ferligoj (1994): Naloge iz statistike: 6.26 – 6.32.
2. Naj bo slučajna spremenljivka Z porazdeljena normalno po zakonu $Z: N(0,1)$. Izračunaj verjetnosti naslednjih dogodkov:
   a) $(0 < Z < 1.53)$
   b) $(Z < 2.11)$
   c) $(1.24 < Z < 2.33)$
   d) $(-1.13 < Z < 0.9)$
   e) $(Z < -1.65)$
3. Določi število z, če velja
   a) $P(0 < Z < z_1) = 0.3888$
   b) $P(z_2 < Z) = 0.2266$
   c) $P(Z < z_3) = 0.7673$
   d) $P(-z_4 < Z < z_4) = 0.8502$

e) $P(Z > z_5) = 0.35$

f) $P(Z < z_6) = 0.4$

4. Predpostavimo, da se na neki populaciji telefonskih naročnikov število mesečno porabljenih impluzov porazdeljuje normalno po zakonu X: $N(1000, 200)$. Populacija šteje 10 000 naročnikov.

a) Koliko naročnikov porabi mesečno

- manj kot 800 impulzov;
- med 1100 in 1300 impulzov;
- več kot 900 impulzov;
- manj kot 1200 impulzov;
- med 800 in 1300 impulzov?

b) V katerih mejah se nahaja mesečna poraba impulzov

- za 3000 naročnikov, ki mesečno porabijo največ impulzov;
- za 1000 naročnikov, ki porabijo najmanj impulzov;
- za 6000 naročnikov, katerih mesečna poraba telefonskih impulzov je najbližja povprečju?

5. Primeri izpitnih vprašanj:

Slučajna spremenljivka, ki lahko zavzame le vrednosti 1, 2, 3 in 4, je

a) normalna

b) zvezna

c) neodvisna

d) diskretna

Pri kateri vrednosti z_i standardizirane normalne spremenljivke Z velja, da je $P(Z > z_i) = 0.4$?

a) -0.25

b) 1.28

c) 0.0398

d) 0.25