Statistika II z računalniško analizo podatkov

Preverjanje domnev o aritmetičnih sredinah: *t* testi

VII Preverjanje domnev o aritmetičnih sredinah

1. Ponovitev iz predmeta Statistika in nadgradnja.

Preverjanje domnev o aritmetični sredini in o razliki dveh aritmetičnih sredin v SPSS-ju: *t* testi

2. Preverjanje domneve o aritmetični sredini
3. Preverjanje domneve o razliki dveh aritmetičnih sredin za neodvisna vzorca
4. Preverjanje domneve o razliki dveh aritmetičnih sredin za odvisna vzorca

Preverjanje domnev o razliki aritmetičnih sredin v treh ali več skupinah v SPSS-ju

5. Analiza variance

VII. 1 Ponovitev

1. **Domneva o populacijski aritmetičnih sredini**

H_0: $\mu = \mu_H$
H_1: $\mu \neq \mu_H$ (ali H_1: $\mu < \mu_H$ ali H_1: $\mu > \mu_H$)

Velik vzorec ($n \geq 30$): $z = \dfrac{\overline{X} - \mu_H}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$ Mali vzorec ($n < 30$): $t = \dfrac{\overline{X} - \mu_H}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$; $t(n-1)$

VII. 1 Ponovitev

2. **Domneva o razliki (dveh) aritmetičnih sredin (neodvisna vzorca)**

H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$
H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$ (ali H_1: H_1: $\mu_1 - \mu_2 < 0$ ali H_1: $\mu_1 - \mu_2 > 0$)

Velika vzorca (n_1, $n_2 \geq 30$): $z = \dfrac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)_H}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}}$

Mala vzorca (n_1, $n_2 < 30$), le če sta $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$: $t = \dfrac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)_H}{s\sqrt{\dfrac{n_1 + n_2}{n_1 \cdot n_2}}}$; $t(n_1 + n_2 - 2)$, kjer je

$$s^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

VII. 1 Ponovitev: nadgradnja

Procedure v SPSS – *Compare Means*

1. **Domneva o populacijski aritmetičnih sredini – t test za en vzorec**
   SPSS procedura *Analyze – Compare Means – One-Sample T Test*
   Preverjamo domnevo o razliki med populacijsko aritmetično sredino ter neko konstanto.
2. **Domneva o razliki dveh aritmetičnih sredin (neodvisna vzorca) – t test za dva neodvisna vzorca**
   SPSS procedura *Analyze – Compare Means – Independent-Samples T Test*
   Preverjamo domnevo o razliki dveh aritmetičnih sredin iz (dveh) različnih (pod)populacij pri isti spremenljivki.

Nadgradimo …

3. **Domneva o razliki dveh aritmetičnih sredin (odvisna vzorca) – t test za dva odvisna vzorca**
   SPSS procedura *Analyze – Compare Means – Paired -Samples T Test*
   Preverjamo domnevo o razliki aritmetičnih sredin dveh spremenljivk na isti populaciji.
4. **Domneva o razliki treh ali več aritmetičnih sredin (neodvisni vzorci) – enofaktorska analiza variance**
   SPSS procedura *Analyze – Compare Means – One-Way Anova*
   Preverjamo domnevo o razliki treh ali večih aritmetičnih sredin iz (treh ali večih) različnih (pod)populacij pri isti spremenljivki.

VII. 1 Ponovitev in nadgradnja

Od kod poimenovanje „t test“?

- Ker se vzorčne statistike ($\bar{X}$ in $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$) porazdeljujejo po Studentovi *t* porazdelitvi. Pri zadosti velikih vzorcih (n ≥) Studentova *t* porazdelitev postane enaka standardizirani normalni porazdelitvi *Z*.
- Če za preverjanje domnev uporabljamo Studentovo *t* porazdelitev, to lahko uporabljamo tako za male kot za velike vzorca – teorija malih vzorcev oz. natančna teorija vzorcev (angl. *exact sampling theory)*.
- Kadar za preverjanje domnev o aritmetičnih sredinah za en ali dva vzorca uporabljamo Studentovo *t* porazdelitev, to imenujemo t testi.

VII. 2 Preverjanje domneve o aritmetični sredini: *t* test za en vzorec (*One-Sample T Test)*

Preverjanje domneve o vrednosti populacijske aritmetične sredine oz. preverjanje domneve o razliki populacijske aritmetične sredine in neke konstante.

Npr.: Preverjanje domneve o tem, ali je povprečna bruto plača manjša od 1.500 EUR.

Enota: ena oseba
Obravnavana spremenljivka: bruto plača
Konstanta, s katero primerjamo vzorčno povprečje: 1.500 EUR

Podatki iz vzorca: $\bar{x} = 1.424$

Preverjamo domnevi: $H_0\!: \mu = 1.500$ oz. $\mu - 1.500 = 0$

$H_1\!: \mu < 1.500$ oz. $\mu - 1.500 < 0$

VII. 2 Preverjanje domneve o aritmetični sredini: *t* test za en vzorec (*One-Sample T Test)*

Predpostavke *t* testa za en vzorec:

1. Spremenljivka je merjena z intervalno ali razmernostno lestvico (le v tem primeru je smiselno računati aritmetično sredino).
2. Normalnost (angl. *normality*): Porazdelitev spremenljivke na populaciji je približno normalna. (Pri velikih vzorcih je predpostavka lahko kršena.)

VII. 2 Preverjanje domneve o aritmetični sredini: *t* test za en vzorec (*One-Sample T Test)*

POSTOPEK

1. Postavimo ničelno in alternativno domnevo: $H_o : \mu = \mu_H \quad oz. \quad \mu - \mu_H = 0$

   $H_1 : \mu \neq \mu_H \quad oz. \quad \mu - \mu_H \neq 0$

   Lahko tudi: $H_1 : \mu < \mu_H$ oz. $\mu - \mu_H < 0$ *ali* $H_1 : \mu > \mu_H$ oz. $\mu - \mu_H > 0$

2. Če še nismo, pogledamo vzorčno porazdelitev spremenljivke in ocenimo, ali so (oz. v kakšni meri so) izpolnjene predpostavke o normalnosti porazdelitve.
3. Izberemo za nas sprejemljivo stopnjo tveganja α, torej stopnjo značilnosti npr. 5% ali 10%.
4. Poiščemo ustrezno testno statistiko in izračunamo njeno eksperimentalno vrednost:

   $$t_e = \frac{\bar{X} - \mu_H}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \qquad : t(m = n - 1)$$

   Uporabimo Studentovo *t* porazdelitev, ker ne poznamo populacijske variance σ^2 in jo ocenimo z vzorčno varianco s^2 (kar povečuje variabilnost statistike). Pri velikih vzorcih bi lahko namesto *t* vzeli tudi *Z* porazdelitev, ker *t* porazdelitev z naraščanjem prostostnih stopenj (ki so v tem primeru $m=n-1$) postaja podobna normalni porazdelitvi.

5. Ugotovimo stopnjo značilnost oz. natančno stopnjo tveganja (*p*) za napako prve vrste.

   Stopnja značilnosti (*p*) je verjetnost, da bi na vzorcu dobili vsaj tako veliko vrednost eksperimentalne testne statistike, kot smo jo dobili, ob pravilni ničelni domnevi. To im. tudi natančna stopnja tveganja, ker gre za tveganje, da se zmotimo, če zavrnemo ničelno domnevo (tveganje za napako prve vrste, torej da zavrnemo pravilno domnevo).
6. Oblikujemo sklep.
   - $p \leq \alpha$ (npr. $p \leq 0.05$) : Zavrnemo ničelno domnevo (H_0) in trdimo, da je populacijsko povprečje statistično značilno različno od hipotetične vrednosti pri stopnji značilnosti *p*. Verjetnost napake ob zavrnitvi ničelne domneve bi bila majhna.
   - $p > \alpha$ (npr. $p > 0.05$) : Ničelne domneve (H_0) ne moremo zavrniti pri stopnji značilnosti α; torej nimamo dokazov oz. ne moremo trditi, da bi bilo populacijsko povprečje statistično značilno različno od hipotetične vrednosti.

PRIMER: Preverjanje domneve o populacijski aritmetični sredini

Preverjanje domneve o tem, ali je povprečna bruto plača na populaciji (leta 2010) manjša od 1.500 EUR.

Obravnavana spremenljivka: neto plača

Konstanta, s katero primerjamo vzorčno povprečje: 1.500 EUR

Vzorec anketirancev iz ESS SL 5. val

Preverjamo domnevi: $H_0{:}\mu = 1.500 \text{ oz. } \mu - 1.500 = 0$

$H_1{:}\mu < 1.500 \text{ oz. } \mu - 1.500 < 0$

Metoda: t test za en vzorec (angl. *One-Sample T Test*) – domneva o populacijski aritmetični sredini

PRIMER: Preverjanje domneve o populacijski aritmetični sredini

1. Postavimo ničelno in alternativno domnevo: $H_0{:}\mu = 1.500 \text{ oz. } \mu - 1.500 = 0$

   $H_1{:}\mu < 1.500 \text{ oz. } \mu - 1.500 < 0$
2. Preverimo predpostavke – Ogledamo si porazdelitev spremenljivke bruto plača.

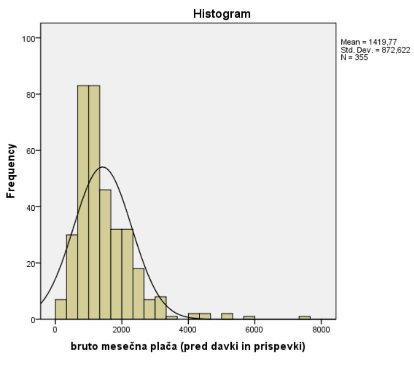
   Npr. s proceduro *Descriptive statistics - Frequencies*

   Pogledamo obliko porazdelitve (histogram) ter opisne statistike (minimum in maksimum, mere srednjih vrednosti, mere variabilnosti ter mere asimetrije in sploščenosti). Po potrebi "popravimo" spremenljivko (manjkajoče vrednosti,…).

Statistics

brutoplaca bruto mesečna plača (pred davki in prispevki)

N	Valid	355
	Missing	1048
Mean		1419,77
Std. Deviation		872,622
Skewness		2,302
Std. Error of Skewness		,129
Kurtosis		9,448
Std. Error of Kurtosis		,258
Minimum		0
Maximum		7500



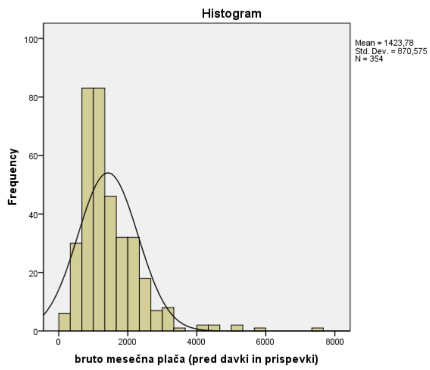
PRIMER: Preverjanje domneve o populacijski aritmetični sredini

Po popravkih (v tem primeru definiranje vrednosti 0 – ni dohodka – kot manjkajoče vrednosti) ponovno pregledamo porazdelitev spremenljivke. Posebej smo pozorni na predpostavko o normalnosti porazdelitve.

Statistics

brutoplaca bruto mesečna plača (pred davki in prispevki)

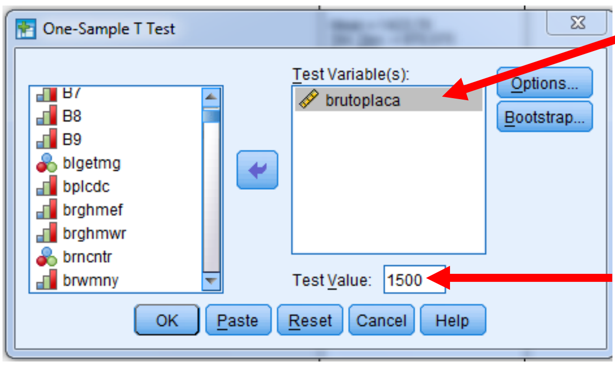
N	Valid	354
	Missing	1049
Mean		1423,78
Std. Deviation		870,575
Skewness		2,323
Std. Error of Skewness		,130
Kurtosis		9,538
Std. Error of Kurtosis		,259
Minimum		60
Maximum		7500



Porazdelitev spremenljivke bruto plača je izrazito koničasta ter asimetrična v desno. Porazdelitev torej ni približno normalna, a ker imamo razmeroma velik vzorec (354 enot), ta kršitev predpostavke ni posebej huda – rezultati testa bodo kljub temu pravilni.

PRIMER: Preverjanje domneve o populacijski aritmetični sredini

3. Izberemo za nas sprejemljivo stopnjo tveganja α = 5%.
4. Izvedemo test: *Analyze – Compare Means – One-Sample T Test*



Spremenljivka, za katero računamo aritmetično sredino.

Hipotetična vrednost populacijske aritmetične sredine.

PRIMER: Preverjanje domneve o populacijski aritmetični sredini

5. Pregledamo rezultate.

Tabela z opisnimi statistikami (za en vzorec).

One-Sample Statistics

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
brutoplaca bruto mesečna plača (pred davki in prispevki)	354	1423,78	870,575	46,271

Povprečna bruto plača, izračunana na vzorcu, je 1424 EUR, standardni odklon pa 871 EUR.

Standardna napaka pri porazdelitvi vzorčnih aritmetičnih sredin na vseh možnih vzorcih velikost 354 enot je 46 EUR.

PRIMER: Preverjanje domneve o populacijski aritmetični sredini

Tabela z rezultati t testa za en vzorec.

One-Sample Test

	Test Value = 1500					
					95% Confidence Interval of the Difference	
	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Lower	Upper
brutoplaca bruto mesečna plača (pred davki in prispevki)	-1,647	353	,100	-76,220	-167,22	14,78

Domnevi: $H_0: \mu = 1.500$ oz. $\mu - 1.500 = 0$

$H_1: \mu < 1.500$ oz. $\mu - 1.500 < 0$

Eksperimentalna v rednost testne statistike *t je -1,647.* Negativna vrednost pomeni, da je vzorčna aritmetična sredina (1.424 EUR) manjša od hipotetične populacijske aritmetične sredine (μ_H = 1.500) (razlika je točno -76,220 EUR). Verjetnost, da na vzorcu velikosti 354 enot (torej pri prostostnih stopnjah *m = n-1 = 353*) dobimo takšno ali po absolutni vrednosti večjo eksperimentalno vrednost testne statistike *t* ob pravilni ničelni domnevi je 0,100 (statistična značilnost za dvostranski test). Statistična značilnost za enostranski test (kakršnega imamo v našem primeru) je potem 0.050 (0.100/2) – verjetnost, da bi dobili takšno ali manjšo (v negativno smer) eksperimentalno vrednost testne statistike.

SPSS vedno izpiše statistično značilnost za dvo-stranski test. V primeru eno-stranskega testa izračunano statistično značilnost razpolovimo.

PRIMER: Preverjanje domneve o populacijski aritmetični sredini

Tabela z rezultati t testa za en vzorec.

One-Sample Test

	Test Value = 1500					
					95% Confidence Interval of the Difference	
	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Lower	Upper
brutoplaca bruto mesečna plača (pred davki in prispevki)	-1,647	353	,100	-76,220	-167,22	14,78

95% interval zaupanja za razliko med populacijsko in hipotetično aritmetično sredino je [-167, 15]. S 95% gotovostjo ocenjujemo, da je populacijska povprečna bruto plača od 1.500 EUR manjša za od 167 EUR do večja za 15 EUR.

PRIMER: Preverjanje domneve o populacijski aritmetični sredini

6. Oblikujemo sklep

$p = 0.05$, torej $p \leq \alpha$ $(p \leq 0.05)$

Ker je verjetnost, da smo dobili takšno vrednost testne statistike ob pravilni ničelni domnevi, manjša od 0,05, ničelno domnevo lahko zavrnemo. Verjetnost, da smo se s takšnim zaključkom zmotili (da smo zavrnili pravilno domnevo), je namreč le 5%.

S 5% stopnjo značilnosti torej trdimo, da je povprečna bruto plača statistično značilno manjša od 1.500 EUR.

VII. 3 Preverjanje domneve o razliki aritmetičnih sredin dveh neodvisnih (pod)populacij: t test za neodvisna vzorca (*Independent-Samples T Test)*

Preverjanje domneve o razliki aritmetične sredine neke spremenljivke na dveh populacijah na osnovi podatkov iz dveh neodvisnih vzorcev. Torej, primerjamo povprečje iste spremenljivke v dveh vzorcih.

Primer: Analiza razlike v povprečni bruto plači moških in žensk
Enota: oseba
Odvisna spremenljivka: bruto plača (razmernostna)
Neodvisna spremenljivka: spol (nominalna), z 2 vrednostima, torej 2 skupini (vzorca): moški, ženske
Podatki iz vzorca: $\bar{x}_m = 168.987,\ \bar{x}_ž = 147.252$
Preverjamo domnevi: $H_0{:}\mu_m = \mu_ž \text{ oz. } \mu_m - \mu_ž = 0$

$H_1{:}\mu_m \neq \mu_ž \text{ oz. } \mu_m - \mu_ž \neq 0$

VII. 3 Preverjanje domneve o razliki aritmetičnih sredin dveh neodvisnih (pod)populacij: t test za neodvisna vzorca (*Independent-Samples T Test)*

Predpostavke *t* testa za neodvisna vzorca (kdaj lahko izvedemo tak *t* test):

1. Odvisna spremenljivka je merjena z intervalno ali razmernostno lestvico (le v tem primeru je smiselno računati aritmetično sredino).
2. Neodvisna spremenljivka je lahko nominalna ali ordinalna, pomembno je, da ima le dve vrednosti (lahko tudi kakšno spremenljivko z več vrednostmi preoblikujemo (rekodiramo) tako, da ima samo 2 vrednosti ali izberemo le dve vrednosti izmed vseh možnih vrednosti).
3. Predpostavka o normalnosti (angl. *normality*): Porazdelitev odvisne spremenljivke je v vsaki populaciji približno enaka normalni. (Pri velikih vzorcih je predpostavka lahko kršena, pomembno je, da je porazdelitev približno enaka v obeh populacijah.)
4. Predpostavka o enakosti varianc (angl. *homogeneity of variances*): Variabilnost enot v vsaki populaciji mora biti enaka. Če varianci nista enaki, obstaja popravek za neupoštevanje te predpostavke.

5. Predpostavke o velikosti vzorca.

- Ni zahteve o minimalni velikosti vzorca: najmanj ena enota v vsakem vzorcu in najmanj en vzorec z dvema ali več enotami. Vendar, če sta vzorca premajhna, je težko zaznati razlike, ki v populacijah lahko dejansko obstajajo. Večja kot sta vzorca, večja je zmožnost zaznavanja populacijskih razlik (večja je moč testa). Manjša je tudi napaka zaradi neupoštevanja predpostavke o normalnosti.
- Ni nujno, da bi bila oba vzorca enako velika. Vendar, pri enako velikih vzorcih je manjša napaka zaradi neveljavnosti predpostavke o enakosti varianc.

VII. 3 Preverjanje domneve o razliki aritmetičnih sredin dveh neodvisnih (pod)populacij: t test za neodvisna vzorca (*Independent-Samples T Test)*

POSTOPEK

1. Postavimo ničelno in alternativno domnevo:

$$H_o : \mu_1 - \mu_2 = 0 \quad oz. \;\; \mu_1 = \mu_2$$
$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \quad oz. \;\; \mu_1 \neq \mu_2$$

Lahko tudi: $H_1 : \mu_1 - \mu_2 < 0 \quad ali \quad H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0$

2. Če še nismo, pogledamo porazdelitev odvisne spremenljivke na obeh vzorcih in velikosti vzorcev ter ocenimo, ali so (oz. v kakšni meri so) izpolnjene predpostavke.
3. Izberemo za nas sprejemljivo stopnjo tveganja α, torej stopnjo značilnosti npr. 5% ali 10%.

4. Poiščemo ustrezno testno statistiko in izračunamo njeno eksperimentalno vrednost

Uporabimo Studentovo t porazdelitev, ker ne poznamo populacijske variance σ^2 (kar povečuje variabilnost statistike).

Obstajata dva testa (dve testni statistiki), ki sta odvisna od tega, ali predpostavljamo, da sta populacijski varianci (ali pa standardna odklona) pri obeh populacijah različni ali ne. To ugotavljamo s pregledom porazdelitve spremenljivke v obeh skupinah in/ali s ustreznim testom (npr. Levenovim testom v SPSS-u – bomo obravnavali kasneje).

- Predpostavimo enake variance:

$$t_e = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)_H}{s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \qquad : t(m = n_1 + n_2 - 2), \qquad s = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

- Predpostavimo različne variance:

$$t_e = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)_H}{s_{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}} \qquad : t\left(m = \frac{\left(s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2\right)^2}{\left(s_1^2/n_1\right)^2/(n_1 - 1) + \left(s_2^2/n_2\right)^2/(n_2 - 1)}\right),$$

$$s_{\overline{X}_1 - \overline{X}_2} = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

5. Ugotovimo stopnjo značilnost oz. natančno stopnjo tveganja (p) za napako prve vrste.
6. Oblikujemo sklep.
   - $p \leq \alpha$ (npr. $p \leq 0.05$) : Zavrnemo ničelno domnevo (H_0) in trdimo, da sta populacijski aritmetični sredini statistično značilno različni v obravanih dveh skupinam pri stopnji značilnosti p (oz. da je razlika med aritmetičnima sredinama obravnavanih dveh skupin statistično značilno različna od 0). Verjetnost napake ob zavrnitvi ničelne domneve bi bila majhna.
   - $p > \alpha$ (npr. $p > 0.05$) : Ničelne domneve (H_0) ne moremo zavrniti pri stopnji značilnosti α; torej nimamo dokazov oz. ne moremo trditi, da bi bilo populacijski aritmetični sredini v obravnavanih dveh skupinah statistično značilno različni.

PRIMER: Preverjanje domneve o razliki aritmetičnih sredin iz dveh (pod)populacij pri isti spremenljivki

Preverjanje domneve, ali sta populacijski povprečni bruto plači moških in žensk različni.

Obravnavana spremenljivka (odvisna): bruto plača v EUR
Spremenljivka, po kateri sta narejeni skupini: spol – spremenljivka z vrednostnima 1 = "moški" (1. skupina), 2 = "ženski" (2. skupina) – neodvisna spremenljivka

Preverjamo domnevi: $H_0: \mu_m = \mu_ž$ oz. $\mu_m - \mu_ž = 0$

$H_1: \mu_m \neq \mu_ž$ oz. $\mu_m - \mu_ž \neq 0$

Metoda: t test za neodvisna vzorca (angl. *Independent-Samples T Test*) – domneva o razliki populacijskih aritmetičnih sredin

PRIMER: Preverjanje domneve o razliki aritmetičnih sredin iz dveh (pod)populacij pri isti spremenljivki

1. Postavimo ničelno in alternativno domnevo:
   $H_0: \mu_m = \mu_ž$ oz. $\mu_m - \mu_ž = 0$
   $H_1: \mu_m \neq \mu_ž$ oz. $\mu_m - \mu_ž \neq 0$
2. Preverimo predpostavke – Ogledamo si porazdelitev spremenljivke bruto plača v obeh vzorcih (med moškimi in med ženskami)
   - Npr. s proceduro D*escriptive statistics - Explore*
   - Pogledamo obliko porazdelitev (histogram) ter opisne statistike (minimum in maksimum, mere srednjih vrednosti, mere variabilnosti ter mere asimetrije in sploščenosti) po vzorcih in jih primerjamo. Po potrebi "popravimo" spremenljivko (manjkajoče vrednosti,…).
   - Posebej smo pozorni na:
     - ali sta varianci (standardna odklona) približno enaka;
     - ali sta obliki porazdelitve (histogram, mere sploščenosti in asimetrije) približno normalni;
     - ali sta obliki porazdelitve (histogram, mere sploščenosti in asimetrije) približno enaki;
     - ali sta vzorca približno enako velika.

PRIMER: Preverjanje domneve o razliki aritmetičnih sredin iz dveh (pod)populacij pri isti spremenljivki

Case Processing Summary

	spol Spol	Cases					
		Valid		Missing		Total	
		N	Percent	N	Percent	N	Percent
brutoplaca bruto mesečna plača (pred davki in prispevki)	1 Moški	181	27,8%	470	72,2%	651	100,0%
	2 Ženske	173	23,1%	577	76,9%	750	100,0%

Descriptives

			spol Spol			
			1 Moški		2 Ženske	
			Statistic	Std. Error	Statistic	Std. Error
bruto mesečna plača (pred davki in prispevki)	Mean		1516,88	73,158	1326,38	54,983
	95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	1372,52		1217,85	
		Upper Bound	1661,24		1434,90	
	5% Trimmed Mean		1400,88		1281,37	
	Median		1200,00		1100,00	
	Variance		968729,818		523007,852	
	Std. Deviation		984,241		723,193	
	Minimum		300		60	
	Maximum		7500		5000	
	Range		7200		4940	
	Interquartile Range		900		1000	
	Skewness		2,553	,181	1,281	,185
	Kurtosis		9,770	,359	2,809	,367

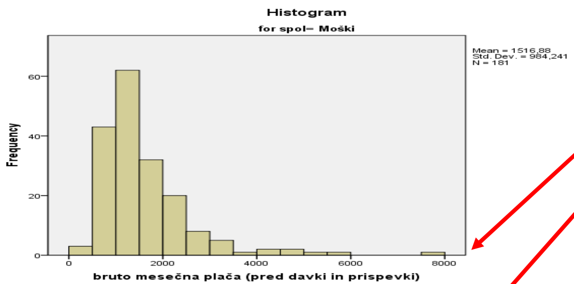
Vzorca sta približno enako velika.

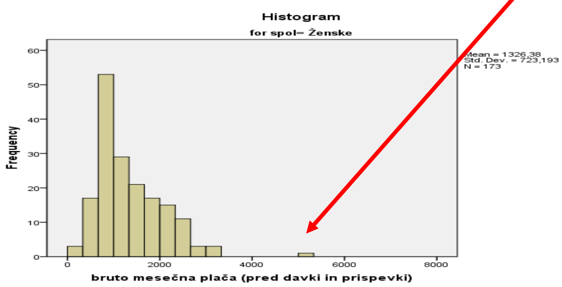
Varianci/ standardna odklona nista zelo različna.

Porazdelitev je pri moških zelo asimetrična in koničasta.

Pri ženskah je porazdelitev manj asimetrična in koničasta.

PRIMER: Preverjanje domneve o razliki aritmetičnih sredin iz dveh (pod)populacij pri isti spremenljivki



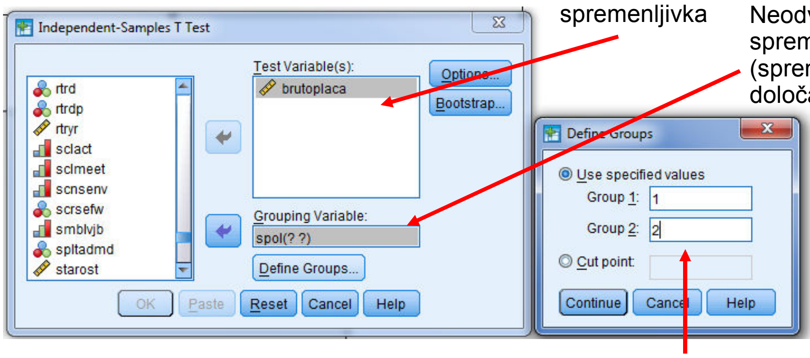


Rep porazdelitve je bistveno daljši pri moških (torej bolj asimetrična porazdelitev).

V našem primeru je torej kršena predpostavka o normalni porazdelitvi v obeh skupinah, vendar ker gre za zadosti velika vzorca, bodo rezultati testa vseeno pravilni.

PRIMER: Preverjanje domneve o razliki aritmetičnih sredin iz dveh (pod)populacij pri isti spremenljivki

3. Izberemo za nas sprejemljivo stopnjo tveganja α = 5%
4. Izvedemo test: *Analyze – Compare Means – Independent-Samples T Test*



Odvisna spremenljivka

Neodvisna spremenljivka (spremenljivka, ki določa skupini)

Določitev skupin po neodvisni spremenljivki

PRIMER: Preverjanje domneve o razliki aritmetičnih sredin iz dveh (pod)populacij pri isti spremenljivki

5. Pregledamo rezultate in oblikujemo sklep.

Tabela z opisnimi statistikami za dva vzorca (dve skupini).

Group Statistics

	spol Spol	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
brutoplaca bruto mesečna plača (pred davki in prispevki)	1 Moški	181	1516,88	984,241	73,158
	2 Ženske	173	1326,38	723,193	54,983

Vzorčni aritmetični sredini: Povprečna bruto plača, izračunana na vzorcu, je 1.517 EUR za moške in 1.326 EUR za ženske. Na vzorcih je torej vzorčna aritmetična sredina za moške večja od vzorčne aritmetične sredine za ženske.

Vzorčna standardna odklona: Bruto plača posameznikov se od povprečja standardno odklanja za 984 EUR na vzorcu moških in za 723 EUR na vzorcu žensk. Variabilnost na vzorcu moških je torej večja od variabilnosti na vzorcu žensk.

Velikost vzorcev: Vzorec moških šteje 181 enot, vzorec žensk pa 173 enot.

Vzorčni standardni napaki za porazdelitev vzorčnih aritmetičnih sredin za moške in za ženske.

Tabela z rezultati testa o enakosti varianc in rezultati dveh testov o enakosti povprečij v dveh skupinah.

Independent Samples Test

		Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
									95% Confidence Interval of the Difference	
		F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	Lower	Upper
brutoplaca bruto mesečna plača (pred davki in prispevki)	Equal variances assumed	1,978	,160	2,068	352	,039	190,503	92,138	9,292	371,714
	Equal variances not assumed			2,082	330,444	,038	190,503	91,516	10,474	370,531

SPSS izpiše rezultate dveh t testov. Pravi test izberemo na osnovi rezultata testa o enakosti varianc.

Test o enakosti varianc (Levenev test):

Domnevi: $H_o : \sigma_1 - \sigma_2 = 0 \quad oz. \ \sigma_1 = \sigma_2$ Variabilnost je v obeh populacijah enaka.

$H_1 : \sigma_1 - \sigma_2 \neq 0 \quad oz. \ \sigma_1 \neq \sigma_2$ Variabilnost ni enaka.

Sklep: Statistična značilnost je 0.160, zato ničelne domneve ne moremo zavrniti. Sklepamo, da je variabilnost v obeh populacijah enaka. Predpostavka o enakosti varianc je izpolnjena, zato lahko upoštevamo rezultate običajnega t testa (v vrstici *Equal variances assumed*). Če predpostavka ne bi bila izpolnjena, bi morali upoštevati rezultate popravljenega t testa (v vrstici *Equal variances not assumed*).

Tabela z rezultati testa o enakosti varianc in rezultati dveh testov o enakosti povprečij v dveh skupinah.

Independent Samples Test

		Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
									95% Confidence Interval of the Difference	
		F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	Lower	Upper
brutoplaca bruto mesečna plača (pred davki in prispevki)	Equal variances assumed	1,978	,160	2,068	352	,039	190,503	92,138	9,292	371,714
	Equal variances not assumed			2,082	330,444	,038	190,503	91,516	10,474	370,531

Test o enakosti povprečij (*t* test za neodvisna vzorca)

Domnevi:. $H_o : \mu_1 - \mu_2 = 0 \quad oz. \ \mu_1 = \mu_2$ Populacijski aritmetični sredini sta v obeh skupinah enaki (povprečna bruto plača je na populaciji moških enaka tisti na populaciji žensk.

$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \quad oz. \ \mu_1 \neq \mu_2$ Populacijski aritmetični sredini sta v obeh skupinah različni (povprečna bruto plača je na populaciji moških različna od tiste na populaciji žensk.

Testna statistika t ima vrednost 2,068, njena statistična značilnost pa je 0,039 (dvostranski test). Ničelno domnevo lahko zavrnemo pri stopnji značilnosti, manjši od 5%. S stopnjo značilnosti 3.9% lahko sprejmemo sklep, da je povprečna bruto plača na populaciji moških statistično značilno različna od povprečne bruto plače na populaciji žensk. (Tveganje, da smo zavrnili pravilno domnevo, je le 3.9%).

Tabela z rezultati testa o enakosti varianc in rezultati dveh testov o enakosti povprečij v dveh skupinah.

Independent Samples Test

		Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
									95% Confidence Interval of the Difference	
		F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	Lower	Upper
brutoplaca bruto mesečna plača (pred davki in prispevki)	Equal variances assumed	1,978	,160	2,068	352	,039	190,503	92,138	9,292	371,714
	Equal variances not assumed			2,082	330,444	,038	190,503	91,516	10,474	370,531

V tabeli se izpiše tudi:

Razlika med povprečno bruto plačo moških in žensk na vzorcih je 190,503 EUR, standardna napaka te razlike pa je 92,139 EUR.

Interval zaupanja za razliko aritmetičnih sredin: S 95% gotovostjo ocenjujemo, da je razlika v povprečni bruto plači moških in žensk na populaciji med 9 in 372 EUR.

Prostostne stopnje pri *t* testu so 352 (181+173-2).

VII. 4 Preverjanje domneve o razliki aritmetičnih sredin dveh spremenljivk na isti populaciji: t test za odvisna vzorca (*Paired-Samples T Test)*

Preverjanje domneve o razliki aritmetičnih sredin dveh spremenljivk na isti populaciji na osnovi podatkov iz vzorca. Primerjamo povprečje dveh spremenljivk na istem vzorcu, torej iste enote prispevajo k obema povprečjema, zato govorimo o *t* testu za dva odvisna vzorca (za razliko od *t* testa za neodvisna vzorca, kjer vsaka enota spada v eno izmed dveh skupin, torej prispeva k enemu izmed povprečij).

Primeri:

- Analiza razlike v bruto plači v prvem letu zaposlitve in 10 let po prvi zaposlitvi
  Enote: Osebe
  Prva spremenljivka: bruto plača v prvem letu zaposlitve (razmernostna)
  Drugo spremenljivka: bruto plača 10 let po prvi zaposlitvi (razmernostna)

- Analiza razlike v starosti moškega in ženske v paru/zvezi
  Enote: Par (partnerja)
  Prva spremenljivka: starost moškega (razmernostna)
  Drugo spremenljivka: starost ženske (razmernostna)

VII. 4 Preverjanje domneve o razliki aritmetičnih sredin dveh spremenljivk na isti populaciji: t test za odvisna vzorca (*Paired-Samples T Test)*

Predpostavke *t* testa za odvisna vzorca (kdaj lahko izvedemo tak *t* test):

1. Obe spremenljivki sta merjeni z intervalno ali razmernostno lestvico (le v tem primeru je smiselno računati aritmetično sredino).
2. Predpostavka o normalnosti (angl. *normality*): Razlike v vrednostih obeh spremenljivk se na populaciji približno normalno porazdeljujejo (pri velikih vzorcih predpostavka ni zelo pomembna).

VII. 4 Preverjanje domneve o razliki aritmetičnih sredin dveh spremenljivk na isti populaciji: t test za odvisna vzorca (*Paired-Samples T Test)*

POSTOPEK

1. Domnevi: $H_0 : \mu_{X_1} = \mu_{X_2}$ oz. $\mu_{X_1} - \mu_{X_2} = 0$ oz. $\mu_D = 0$

   $H_1 : \mu_{X_1} \neq \mu_{X_2}$ oz. $\mu_{X_1} - \mu_{X_2} \neq 0$ oz. $\mu_D \neq 0$

   Lahko tudi: $H_1 : \mu_{X_1} - \mu_{X_2} < 0$ oz. $\mu_{X_1} - \mu_{X_2} > 0$
2. Izračunamo razliko med obema spremenljivkama kot novo spremenljivko *D* (razlika za *i*-to enoto: $d_i = x_{1i} - x_{2i}$). Pogledamo porazdelitev spremenljivke *D* in ocenimo, ali je (oz. v kakšni meri je) izpolnjena predpostavka o normalnosti porazdelitve razlik.
3. Razliko med obema spremenljivkama obravnavamo kot novo spremenljivko *D* ($d_i = x_{1i}$-x_{2i}) in preverjamo domnevo o aritmetični sredini spremenljivke *D* (isto kot domneva o populacijski aritmetični sredini na enem vzorcu).
4. Izberemo za nas sprejemljivo stopnjo tveganja α, torej stopnjo značilnosti npr. 5% ali 10%.

POSTOPEK

5. Testna statistika (standardizirana razlika vzorčnih aritmetičnih sredin dveh spremenljivk; standardizirana na osnovi porazdelitve razlik vzorčnih aritmetičnih sredin oz. porazdelitve vzorčnih aritmetičnih sredin spremenljivke *D*):

$$t_e = \frac{\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) - \left(\mu_{X_1} - \mu_{X_2}\right)_H}{s_{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}} \quad : t(n-1) \qquad \text{oz.} \qquad t_e = \frac{\overline{D} - \mu_{D_H}}{\frac{s_D}{\sqrt{n}}} \quad : t(n-1)$$

Uporabimo Studentovo *t* porazdelitev, ker ne poznamo populacijske variance. Pri velikih vzorcih bi lahko namesto *t* vzeli tudi *Z* porazdelitev, ker *t* porazdelitev z naraščanjem prostostnih stopenj (ki so v tem primeru $m=n-1$) postaja podobna normalni porazdelitvi.

6. Ugotovimo stopnjo značilnost oz. natančno stopnjo tveganja (*p*) za napako prve vrste.

POSTOPEK

7. Oblikujemo sklep.
   - $p \leq \alpha$ (npr. $p \leq 0.05$) : Zavrnemo ničelno domnevo (H_0) in trdimo, da sta populacijski aritmetični sredini dveh spremenljivk statistično značilno različni (oz. da je razlika med aritmetičnima sredinama obravnavanih dveh spremenljivk statistično značilno različna od 0). Verjetnost napake ob zavrnitvi ničelne domneve bi bila majhna.
   - $p > \alpha$ (npr. $p > 0.05$) : Ničelne domneve (H_0) ne moremo zavrniti pri stopnji značilnosti α; torej nimamo dokazov oz. ne moremo trditi, da bi bilo populacijski aritmetični sredini obravnavanih dveh spremenljivk statistično značilno različni.

PRIMER: Preverjanje domneve o razliki aritmetičnih sredin dveh spremenljivk na isti populaciji

Preverjanje domneve o razliki med starostjo partnerjev (moškega in ženske): moški so starejši od svojih ženskih partneric

Enota: en par (moški in ženska) (upoštevani le tisti anketiranci, ki imajo partnerja)

Obravnavani spremenljivki:

- starostmoski: starost moškega (partnerja)
- starostzenske: starost ženske (partnerke)

Preverjamo domnevo: $H_0: \mu_{x_m} = \mu_{x_ž}$ oz. $\mu_{x_m} - \mu_{x_ž} = 0$

$H_1: \mu_{x_m} > \mu_{x_ž}$ oz. $\mu_{x_m} - \mu_{x_ž} > 0$

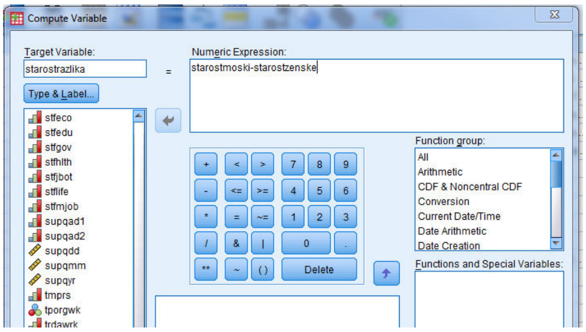
Metoda: *t* test za odvisna vzorca (angl. *Paired-Samples T Test*)

PRIMER: Preverjanje domneve o razliki aritmetičnih sredin dveh spremenljivk na isti populaciji

1. Postavimo ničelno in osnovno domnevo: $H_0: \mu_{x_m} = \mu_{x_ž}$ oz. $\mu_{x_m} - \mu_{x_ž} = 0$

   $H_1: \mu_{x_m} > \mu_{x_ž}$ oz. $\mu_{x_m} - \mu_{x_ž} > 0$
2. Če želimo preveriti predpostavko o normalnosti razlik, moramo najprej izračunati novo spremenljivko *D*, ki je razlika med starostjo partnerjev ($d_i = x_{1i} - x_{2i}$).

   Uporabimo proceduro *Transpose – Compute*.



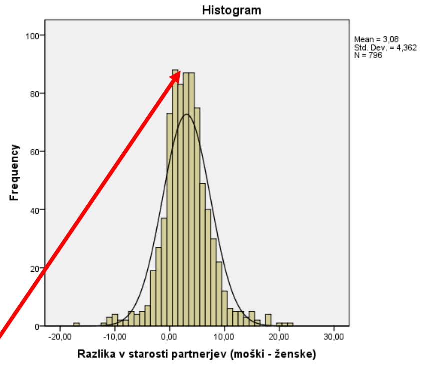
3. Preverimo predpostavko o normalnosti razlik dveh spremenljivk (na osnovi vzorca).

Pregledamo porazdelitev nove spremenljivke (razlike), npr. s proceduro *Descriptive statistics – Frequences.*

Statistics

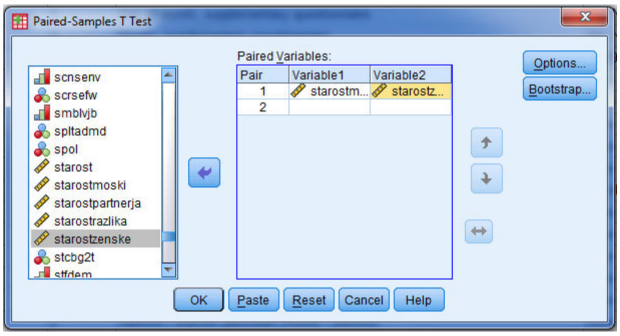
starostrazlika Razlika v starosti partnerjev (moški - ženske)

N	Valid	796
	Missing	607
Mean		3,0766
Std. Deviation		4,36197
Skewness		,206
Std. Error of Skewness		,087
Kurtosis		2,601
Std. Error of Kurtosis		,173
Minimum		-17,00
Maximum		22,00



Porazdelitev razlik je simetrična, vendar nekoliko koničasta. Predpostavka torej ni huje kršena.

4. Izberemo za nas sprejemljivo stopnjo tveganja α = 5%
5. Izvedemo test: *Analysis – Compare Means – Paired-Samples T Test*



Par spremenljivk, za katerega izvedemo test.

OPOMBA: Enakovreden test je, če preverimo, ali je povprečje razlike (nove spremenljivke, v našem primeru *starostrazlika*) različno od 0, kot smo to že naredili pri preverjanju domneve o vrednosti aritmetične sredine (*t* test za en vzorec).

6. Pregledamo rezultate.

Tabela z opisnimi statistikami za dve obravnavani spremenljivki na istem vzorcu.

Paired Samples Statistics

		Mean	N	Std. Deviation	Std. Error Mean
Pair 1	starostmoski Starost moških partnerjev	53,7111	796	14,36600	,50919
	starostzenske Starost ženskih parnerjev	50,6344	796	14,01520	,49676

Obe spremenljivki sta merjeni na vzorcu 796 enot (toliko je anketirancev, ki ima partnerja, torej toliko je parov).

Povprečna starost moških partnerjev na tem vzorcu je 53.7 let in standardni odklon 14.4 let. Povprečna starost ženskih partnerk je 50.6 let in standardni odklon 14.0 let.

Standardni napaki za porazdelitev vzorčnih aritmetičnih sredin za starost moških partnerjev je 0.509 in za starost ženskih partnerk 0.497.

Na vzorcu je razlika med povprečno starostjo moških in žensk (v paru) 3,08 let (53,7-50,6), torej so moški v povprečju za 3,08 let starejši. Sedaj bomo preverili, ali razlika obstaja tudi na populaciji oz. ali so tudi na populaciji moški starejši od svojih partneric.

SPSS izpiše tudi rezultate za preverjanje domneve o linearni povezanosti med obravnavanima spremenljivkama (Pearsonov koeficient korelacije in njegovo statistično značilnost).

Paired Samples Correlations

		N	Correlation	Sig.
Pair 1	starostmoski Starost moških partnerjev & starostzenske Starost ženskih parnerjev	796	,953	,000

Pearsonov koeficient korelacije je pozitiven ($r = 0,953$) in statistično značilen ($p<0,0005$). Na populaciji obstaja pozitivna linearna povezanost med starostjo moškega in ženske v paru: starejši moški so v zvezi z starejšimi ženskami.

Ta informacija je relevantna, ker večja korelacija med spremenljivkama pomeni, da bo standardna napaka razlike manjša, torej da je razlika merjena bolj natančno.

Tabela z rezultati *t* testa za odvisna vzorca – testa za razliko aritmetičnih sredin dveh spremenljivk na istem vzorcu.

Paired Samples Test

		Paired Differences					t	df	Sig. (2-tailed)
					95% Confidence Interval of the Difference				
		Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	Lower	Upper			
Pair 1	starostmoski Starost moških partnerjev - starostzenske Starost ženskih parnerjev	3,07663	4,36197	,15461	2,77315	3,38012	19,900	795	,000

Na vzorcu je razlika med povprečnost starostjo moških in žensk (v paru) 3,08 let (moški so v povprečju 3,08 let starejši kot njihove partnerke), standardni odklon za razliko pa je 4,36 let.

Standardna napaka razlike (meri variabilnost za porazdelitev razlik na vseh možnih vzorcih) je 0,155 let.

95% interval zaupanja za razliko je med 2,773 in 3,380 let. S 95% gotovostjo ocenjujemo, da so na populaciji moški starejši od svojih partneric za od 2,8 do 3,4 leta.

7. Oblikujemo sklep.

Paired Samples Test

		Paired Differences					t	df	Sig. (2-tailed)
					95% Confidence Interval of the Difference				
		Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	Lower	Upper			
Pair 1	starostmoski Starost moških partnerjev - starostzenske Starost ženskih parnerjev	3,07663	4,36197	,15461	2,77315	3,38012	19,900	795	,000

Test o enakosti povprečij

Eksperimentalna vrednost testne statistike *t* je 19,900, njena statistična značilnost *p* (za dvostranski test) pa je manjša od 0,0005 oz. manjša od 0,05%. Statistična značilnost *p* za enostranski test pa je manjša od 0,0005/2, torej manjša od 0,00025 (oz. od 0,025%).

Domnevi:

$$H_0 : \mu_{x_m} = \mu_{x_ž} \text{ oz. } \mu_{x_m} - \mu_{x_ž} = 0$$

Povprečni starosti moških in žensk (v paru) na populaciji sta enaki.

$$H_1 : \mu_{x_m} > \mu_{x_ž} \text{ oz. } \mu_{x_m} - \mu_{x_ž} > 0$$

Povprečna starost moških je na populaciji večja od povprečne starosti ženskih partneric.

Tveganje ob zavračanju ničelne domneve je manjše od 0,025%, zato ničelno domnevo zavrnemo. Pri stopnji značilnosti, manjši od 0,025% torej lahko trdimo, da so moški tudi na populaciji v povprečju starejši od svojih partneric.