TEORIJA OBDELAVE SIGNALOV

Odgovori na izpitna vprašanja:

UVOD:

1. **Definicija signala**
   Signal je fizikalna tvorba s pomočjo katere prenašamo sporočila preko medija (vzdolž okolja).

2. **Lastnosti fizikalno realnih signalov**
   Fizikalno realni signali imajo omejeno energijo, frekvenčni spekter in amplitudo, ki pa je zvezna funkcija časa.

3. **Delitve signalov**
   Signale delimo na deterministične in naključne. Deterministični signali so tisti, katerih amplitudo lahko zapišemo kot matematično funkcijo časa in se še naprej delijo na periodične (sinusni, ostali) ter neperiodične (kvaziperiodični, prehodni). Naključni signali so tisti, za katere ne moremo predvideti, kakšno amplitudo bodo imeli v naslednjem trenutku. Delijo se na nestacionarne in stacionarne, ki so lahko ergodični ali pa neergodični.

4. **Energijski in močnostni signali**
   Energijski signali so signali, katerih energija je omejena (manjša od neskončno)

$$E_{ff} = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} |f(t)|^2 \, dt < \infty$$

   Signal je močnosten, če je njegova moč omejena ter pozitivna

$$0 < P_{ff} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(t)|^2 \, dt < \infty$$

5. **Moč in energija periodičnih signalov**
   Če je energija signala na eni periodi večja od nič, je taka tudi na vseh ostalih periodah tega signala od -∞ do ∞, kar pomeni da tak signal ni energijski.
   Moč periodičnega signala je enaka moči na eni periodi

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |f(t)|^2 \, dt$$

6. **Potreben pogoj, da je signal energijski**
   Potreben pogoj, da je signal energijski je, da je v ∞ vrednost njegove amplitude 0.

$$\lim_{t\to\pm\infty} |f(t)| = 0$$

7. **Primeri periodičnih in naključnih signalov z neomejeno močjo**
   Periodična funkcija delta, beli šum, $e^{\alpha t}; \alpha \in C; \Re[\alpha] \neq 0$.

8. **Definicije diskretnih, kvantificiranih in numeričnih (digitalnih) signalov**
   Diskretni signali so signali, katerih časovna skala je nezvezna (zavzame le določene vrednosti); definicijsko območje je diskretna množica.
   Kvantificirani signali so tisti, katerih amplituda je nezvezna; zaloga vrednosti je diskretna množica.
   Numerični ali digitalni signali so signali, ki so tako diskretni ter kvantificirani.

PONAZARJANJE SIGNALOV S TEMELJNIMI FUNKCIJAMI

1. **Razlogi za ponazarjanje**
   Signale ponazarjamo s temeljnimi funkcijami zato, ker so kot taki primerni za nadaljnjo obdelavo ter računalniško predstavitev.

2. **Način tvorjenja približka**
   Približek tvorimo tako, da je napaka med približkom in signalom čim manjša. To minimiziramo tako, da primerno izberemo koeficient C, ki predstavlja multiplikator temeljne funkcije Φ(t).

$\widetilde{x}(t) = C \cdot \phi(t)$, **za več temeljnih funkcij** $\overline{x}(t) = \sum_{i=-\infty}^{n} C_i \phi_i(t)$

3. **Kriterij za ocenjevanje kvalitete ponazoritve**
   Napaka približka je razlika med vrednostjo dejanskega signala ter funkcije približka. Kriterij za ocenjevanje kvalitete ponazoritve je srednja kvadratna napaka.
   $$\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} (x(t) - C \cdot \phi(t))^2 \, dt$$

4. **Skalarni produkt**
   Za skalarni produkt veljajo naslednje lastnosti:
   $$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \in \mathbb{C}$$
   $$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \overline{\langle \vec{y}, \vec{x} \rangle}$$
   $$\langle \alpha \cdot \vec{x}, \vec{y} \rangle = \alpha \cdot \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$$
   $$\langle \vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}_1, \vec{y} \rangle + \langle \vec{x}_2, \vec{y} \rangle$$
   $$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle > 0; \quad \vec{x} \neq 0$$

5. **Definicija skalarnega produkta v vektorskem prostoru energijskih signalov definiranih na končnem časovnem intervalu.**
   Končni časovni interval [t_1,t_2] predstavlja vektorski prostor. Skalarni produkt je v le tem definiran kot
   $$\langle x(f), y(f) \rangle = \int_{t_1}^{t_2} x(t) \cdot \overline{y(t)} \, dt \, .$$

6. **Pogoji, ki jih izpolnjuje optimalno izbran približek pri upoštevanju kriterija srednje kvadratne napake**
   Napaka približka je razlika med vrednostjo dejanskega signala ter funkcije približka. Če signale predstavimo v vektorskem prostoru, bo srednja kvadratna napaka najmanjša takrat, kadar bo le ta pravokotna na približek, to je kadar bo skalarni produkt med približkom in napako enak 0. To pomeni, da je signal napake pravokoten na temeljne funkcije, ki tvorijo približek.
   Pri optimalno izbranem približku je odvod srednje kvadratne napake po C-ju enak nič.
   $$\frac{d}{dC} \overline{\varepsilon^2(t)} = 0$$

7. **Pogoj za eksistenco rešitve in postopek določanja parametrov rešitve**
   Pogoj?? Signal mora biti determinističen, K>0.
   Če za temeljne funkcije $\{\phi_1, \phi_2, \ldots\}$ **velja, da so ortogonalne, potem lahko določimo koeficiente K_i, tako da i-to temeljno funkcijo skalarno zmnožimo samo s seboj, nato pa koeficiente C_i po enačbi**
   $$C_i = \frac{1}{K_i} \int_{t_1}^{t_2} f(t) \cdot \overline{\phi_i(t)}$$
   Približek je nato $\widetilde{x}(t) = C_1 \phi_1(t) + C_2 \phi_2(t) + \ldots$. **Več temeljnih funkcij vzamemo, boljši je približek. Če jih vzamemo ∞, bo približek enak signalu katerega približek iščemo.**

8. **Definicija ortogonalnosti in ortonormalnosti temeljnih funkcij**
   Temeljne funkcije so ortogonalne, kadar velja:
   $$\langle \phi_i, \phi_j \rangle = \begin{cases} 0; & i \neq j \\ K_i; & i = j \end{cases}$$
   Če so vsi koeficienti K_i enaki 1, pravimo da so temeljne funkcije ortonormalne.

9. Pomen izbire ortogonalnih funkcij

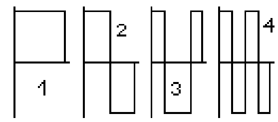
Pomen tega, da so funkcije druga na drugo ortogonalne, je ta, da se vrednosti koeficientov C_i, ki smo jih že določili ne spremenijo, če v približek vključimo več členov. Koeficienti so med seboj neodvisni.

10. Polnost zaporedja temeljnih funkcij

Za zaporedje temeljnih funkcij pravimo, da je polno, če z dodajanjem členov spravimo srednjo kvadratno napako na poljubno majhno vrednost, pri čemer je le ta pri neskončno členih enaka 0.

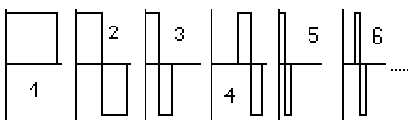
11. Primeri temeljnih funkcij

Primer ortonormalnih temeljnih funkcij so Walsheve temeljne funkcije, ki jih določamo s pomočjo Hadamandrove matrike.



$$H(m)=\begin{bmatrix} H(m-1) & H(m-1) \\ H(m-1) & -H(m-1) \end{bmatrix} \quad H(0)=[1]$$

Primeri temeljnih funkcij ki so ortogonalne, a ne tudi ortonormalne pa so Haarove temeljne funkcije

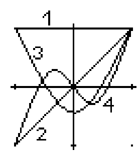


,

trigonometrične temeljne funkcije.

$\{1, \sin\omega t, \cos\omega t, \sin 2\omega t, \cos 2\omega t, \sin 3\omega t, ...\}$,

Legendrovi polinomi kot temeljne funkcije



$$P_n = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}\left[t^2+1\right]^n$$

Kompleksne trigonometrijske temeljne funkcije

$$\phi_n(t)=e^{jn\omega_0 t} = \cos n\omega_0 t + j\cdot \sin n\omega_0 t$$

Harmonična analiza periodičnih signalov

1. Izražava signalov s temeljnimi funkcijami v primeru periodičnih signalov

Periodične signale izražamo s pomočjo sinusnih nihanj. Približek iščemo le na eni periodi ter ga s tem določimo preko celotne časovne osi, saj so tudi temeljne funkcije periodične.

2. Kompleksna Fouriereva vrsta

Kompleksno Fourierevo vrsto sestavljajo temeljne funkcije $\phi_n(t)=e^{jn\omega_0 t}$, približek pa $\tilde{f}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n\phi_n(t)$. Pri Fourierevi vrsti koeficiente C_n označimo ponavadi z F(n), ki jih določimo po formuli

$$F(n)=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cdot e^{-jn\omega_0 t}\,dt \qquad \omega_0=\frac{2\pi}{T}$$

3. Dirichletovi pogoji

Dirichletovi pogoji so pogoji za obstoj Fouriereve vrste. Da obstaja Fouriereva vrsta funkcije f(t), mora le ta biti absolutno integrabilna, ima pa lahko le končno število nezveznosti ter lokalnih ekstremov na končnem intervalu $[t_0, t_0+T]$.

$$\int_{t_0}^{t_0+T} |f(t)|\,dt < \infty$$

4. Realna Fouriereva vrsta

Pri realnih signalih velja, da je $F(-n)=\overline{F(n)}$, zaradi česa lahko tako vrsto izrazimo le s pozitivnimi členi. Realno Fourierevo vrsto določimo kot

$$\widetilde{f}(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin \omega_0 t$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos(n\omega_0 t)\, dt \qquad b_n=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\sin(n\omega_0 t)\, dt$$

5. **Povezava med kompleksno in realno Fourierevo vrsto**
   Ker so koeficienti a_n, b_n določeni na podlagi dejstva, da za realne funkcije velja naslednja zveza: $F(-n)=\overline{F(n)}$, sta kompleksna in realna F-vrsta povezani.

$$a_n=F(n)+\overline{F(n)}$$
$$b_n=j\cdot\left(F(n)-\overline{F(n)}\right)$$
$$F(n)=\frac{a_n-jb_n}{2}$$

6. **Kompleksni spekter periodičnih signalov**
   Koeficientom $F(n)$ pravimo kompleksni spekter signala $f(t)$.

7. **Realni, imaginarni, amplitudni in fazni spekter**
   Kompleksni spekter lahko zapišemo na naslednja načina:

$$F(n)=P(n)+j\cdot Q(n)$$
$$F(n)=|F(n)|\cdot e^{j\cdot\Theta(n)}$$

   V zgornjih enačbah poimenujemo

   $P(n)$ **- realni spekter signala**

   $Q(n)$ **- imaginarni spekter signala**

   $|F(n)|$ **- amplitudni spekter signala**

   $\Theta(n)$ **- fazni spekter signala**

8. **Lastnosti spektrov realnih periodičnih signalov**
   Če je signal realen, veljajo naslednje zveze:

$$|F(n)|=|F(-n)|$$
$$\Theta(-n)=-\Theta(n)$$
$$F(-n)=\overline{F(n)}\rightarrow P(-n)+j\cdot Q(-n)=P(n)-j\cdot Q(n)\Rightarrow$$
$$P(-n)=P(n)\quad\text{(soda funkcija)}$$
$$Q(-n)=-Q(n)\quad\text{(liha funkcija)}$$

9. **Fizikalna interpretacija izražave signala s Fourierevo vrsto**
   Koeficient Fouriereve vrste z indeksom n predstavlja amplitudo sinusnega nihanja z $n\cdot\omega_0$-to frekvenco. Če lahko določimo več koeficientov F(n), lahko dani signal izrazimo s poljubno natančnostjo. Koeficient pri n=0 predstavlja nekakšen offset ali, če govorimo o električnih signalih, nekakšno prednapetost. Koeficient pri n=1 predstavlja amplitudo osnovne harmonske komponente.

10. **Pomen amplitudnega in faznega spektra**

   $|F(n)|$ **- predstavlja največjo amplitudo sinusnega nihanja s frekvenco** $n\cdot\omega_0$

   $\Theta(n)$ **- predstavlja fazni zamik sinusnega nihanja v signalu s frekvenco** $n\cdot\omega_0$

Korelacija periodičnih signalov

1. **Avtokorelacija periodičnih signalov (definicija, lastnosti)**
   Avtokorelacija periodičnih signalov je definirana z enačbo

$$\varphi_{ii}(\tau)=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\overline{f_i(t)}\cdot f_i(t+\tau)\, d\tau$$

Lastnosti avtokorelacije:

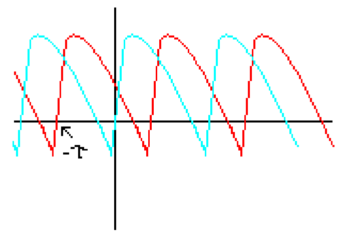
- **je največja v izhodišču:** $\varphi_{ii}(0) \geq \varphi_{ii}(\tau)$
- **je periodična z enako periodo kot signal:** $f_i(t) = f_i(t+T) \Leftrightarrow \varphi_{ii}(\tau) = \varphi_{ii}(\tau + T)$
- **je zvezna če je signal vsaj odsekoma zvezen**
- **je neodvisna od premika signala** $f_j(t) = f_i(t - t_0) \Rightarrow \varphi_{jj}(\tau) = \varphi_{ii}(\tau)$

  Avtokorelacija ni povratno enolična preslikava!
- **je simetrična, če je signal realen tudi soda** $\varphi_{ii}(\tau) = \overline{\varphi_{ii}(-\tau)}$, $\varphi_{ii}(\tau) \in \mathbb{R} \Rightarrow \varphi_{ii}(\tau) = \varphi_{ii}(-\tau)$
- **avtokorelacija v izhodišču je enaka moči signala** $\varphi_{ii}(0) = P_{ff}$
- **koeficienti Fouriereve vrste avtokorelacije predstavlja močnostni spekter signala**

  $$\phi_{ii} = |F(n)|^2 \qquad \varphi_{ii}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_{ii}(n) e^{jn\omega_1\tau}$$

2. Preslikava periodičnega signala v njegovo avtokorelacijo

Pri računanju avtokorelacije signala si pomagamo z grafično predstavitvijo, pri čemer narišemo signal v graf, nato pa ga narišemo v isti graf še enkrat, le da je tokrat zamaknjen za majhen τ. Iz grafa nato razberemo meje integriranja pri določenih vrednostih τ.



3. Močnostni spekter periodičnih signalov

Močnostni spekter periodičnih signalov predstavljajo koeficienti Fouriereve vrste avtokorelacije.

$$\phi_{ii}(n) = \overline{F_i(n)} \cdot F_i(n) = |F(n)|^2$$

4. Parcevalova enačba (definicija, lastnosti)

$$\varphi_{ii}(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_{ii}(n)$$

Moč signala $f_i(t)$ je enaka avtokorelaciji v izhodišču, ta pa je enak vsoti vseh koeficientov Fouriereve transformacije te avtokorelacije.

5. Križna korelacija periodičnih signalov

Definirana je kot

$$\varphi_{ij}(\tau) = \int_{t_0}^{t_0+T} \overline{f_i(t)} \cdot f_j(t+\tau)\, d\tau$$

Križna korelacija je neodvisna od premika, periodična z enako periodo kot signala katerih križno korelacijo računamo. Če imata signala različno periodo, je perioda križne korelacije najmanjši skupni večkratnik period signalov. Križna korelacija je tudi antisimetrična, kar pomeni da je $\varphi_{ij}(\tau) = \overline{\varphi_{ji}(-\tau)}$. Če sta funkciji realni, potem ta križno korelacijo velja $\varphi_{ij}(\tau) = \varphi_{ji}(-\tau)$. Je zvezna, če sta funkciji vsaj odsekoma zvezni.

6. Konvolucija periodičnih signalov

Konvolucija periodičnih signalov je definirana podobno kot korelacija in sicer z enačbo

$$\rho_{ij} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f_i(t) \cdot f_j(\tau - t)\, dt$$

Konvolucija je neodvisna od premika funkcije in je periodična s periodo T, ki je najmanjši skupni večkratnik period signalov f_i ter f_j. Je simetrična, kar pomeni, da je $\rho_{ij}(\tau) = \rho_{ji}(\tau)$ ter je zvezna. Če je $f_i(t) = \overline{f_i(-t)}$, (kar pomeni $\mathrm{Re}[f_i(t)]$-soda funkcija in $\mathrm{Im}[f_i(t)]$-liha) sta si konvolucija in korelacija enaki: $\rho_{ij}(\tau) = \varphi_{ij}(\tau) = \rho_{ji}(\tau)$.

Dobra stran konvolucije je tudi ta, da se zelo enostavno izračunajo koeficienti Fouriereve vrste konvolucije in sicer kar tako, da zmnožimo koeficiente F_i ter F_j

$P_{ij}(n) = F_i(n) \cdot F_j(n) = P_{ji}(n)$.

7. **Povezava med korelacijo in konvolucijo periodičnih signalov**
   Če je $f_i(t) = \overline{f_i(-t)}$, sta si konvolucija in korelacija enaki: $\rho_{ij}(\tau) = \varphi_{ij}(\tau) = \rho_{ji}(\tau)$.

   $f_i(t) = \overline{f_i(-t)} \Rightarrow \mathrm{Re}[f_i(t)] - soda, \quad \mathrm{Im}[f_i(t)] - liha$

8. **Periodična funkcija delta**
   Periodična funkcija delta je definirana s pomočjo njene Fouriereve transformacije

   $\delta_{T_1}(t) = \dfrac{1}{T_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_1 t}$ **. Je enota za konvolucijo in ima konstanten spekter.**

   Njena moč je ∞, kar pomeni, da to ni močnostni signal.

   $\frac{1}{T} f(t) = f(t) * \delta_{T1}(t)$

Harmonična analiza neperiodičnih signalov

1. **Vpliv postopka daljšanja periode na spekter signala**
   Če se signalu perioda podaljša za 2x, 3x, 4x,... se spekter tega signala zgosti za ravno tolikokrat. Amplitude spektra pa padajo in v limiti, ko je perioda neskončno dolga, padejo na nič, spekter pa iz diskretnega preide v zveznega.
   $n\cdot\omega_1$ à ω ω_1 à $d\omega$ $1/T_1$ à $d\omega/(2\pi)$

2. **Fourierev integral**
   Fourierev integral je infinitizimirana različica Fouriereve vrste, pri kateri perioda preseže vse meje, ω postane zvezen, torej sestavljen iz infinitezimalno majhnih delčkov.

   $f(t) = \dfrac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega \qquad F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$

3. **Fizikalna interpretacija izražave signala s Fourierevo vrsto**

   V Fourierevim integralu $f(t) = \dfrac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$ predstavlja $F(\omega) \cdot d\omega$ utež, ki pomeni kakšna amplituda je pri frekvenci ω.

   $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \mathcal{F}\,[f(t)]$ **imenujemo Fouriereva transformacija signala $f(t)$ in $F(\omega)$ je kompleksni spekter tega signala.**

   $|F(\omega)| = \left| \dfrac{F(\omega) \cdot d\omega}{d\omega} \right| \equiv$ **gostota amplitude**

4. **Fouriereva transformacija in inverzna Fouriereva transformacija**

   $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \mathcal{F}\,[f(t)]$ **imenujemo Fouriereva transformacija signala $f(t)$, $\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = f(t) = \dfrac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$ njena inverzna transformacija.**

5. **Dirichletovi pogoji**
   Dirichletovi pogoji so zadostni pogoji, ki jim mora ustrezati signal *f(t)*, da obstaja njegova Fouriereva transformacija.
   Signal mora biti absolutno integrabilen, kar pomeni, da mora biti tak, da s časom izzveni. $\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|\, d\omega < \infty$

   Signal ima lahko na poljubnem končnem intervalu le končno število nezveznosti in lokalnih ekstremov.

6. Posplošena Fouriereva transformacija

Kadar funkcija $f(t)$ ni absolutno integrabilna, torej da je $\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|\, d\omega = \infty$. Če želimo izračunati Fourierevo transformacijo take funkcije, si moramo pomagati z okensko funkcijo, ki jo zmnožimo s signalom da dobimo novo funkcijo, ki pa je absolutno integrabilna. Okenska funkcija tako rekoč obreže signal.

$$g(t) = w_\alpha(t) \cdot f(t)$$

$$\lim_{t\to\infty} w_\alpha(t) = 0 \qquad \lim_{\alpha\to\alpha_0} w_\alpha(t) = 1 \qquad \lim_{\alpha\to\alpha_0} g(t) = f(t) \qquad \lim_{\alpha\to\alpha_0} G(\omega) = F(\omega)$$

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

7. Kompleksni spekter neperiodičnih signalov

Kompleksni spekter neperiodičnih signalov imenujemo $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$, ki je kompleksna funkcija realne spremenljivke.

8. Realni, imaginarni, amplitudni in fazni spekter neperiodičnega signala

$$F(\omega) = P(\omega) + j \cdot Q(\omega)$$

$$F(\omega) = |F(\omega)| \cdot e^{j\cdot\Theta(\omega)}$$

V zgornjih enačbah poimenujemo

$P(\omega)$ - realni spekter signala

$Q(\omega)$ - imaginarni spekter signala

$|F(\omega)|$ - amplitudni spekter signala

$\Theta(\omega)$ - fazni spekter signala

9. Pomen amplitudnega in faznega spektra neperiodičnih signalov

$|F(\omega)|$ - amplitudni spekter nam meri gostoto amplitude sinusnega nihanja s frekvenco ω v signalu $f(t)$.

$\Theta(\omega)$ - fazni spekter nam meri fazni zamik sinusnega nihanja s frekvenco ω v signalu $f(t)$.

10. Lastnosti spektrov realnih neperiodičnih signalov

Če je signal $f(t)$ realen, lahko Fourierovo transformacijo zapišemo kot

$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \cos\omega t\, dt - j \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \sin\omega t\, dt$, kar sta realen oz imaginaren spekter

$P(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \cos\omega t\, dt \qquad P(-\omega) = P(\omega)$ - soda funkcija frekvence

$Q(\omega) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \sin\omega t\, dt \qquad Q(-\omega) = -Q(\omega)$ - liha funkcija frekvence

$$|F(\omega)| = |F(-\omega)|$$

$$\Theta(-\omega) = -\Theta(\omega)$$

Če je signal poleg tega, da je realen, še sod, je tudi $F(\omega) = P(\omega)$ soda funkcija,

Če pa je signal poleg tega, da je realen, še lih, je tudi $F(\omega) = -j \cdot Q(\omega)$ liha funkcija.

11. Lastnosti Fouriereve transformacije

Fouriereva transformacija $F(\omega)$ je enolično določena s pomočjo signala $f(t)$, skupaj pa tvorita tako imenovan Fourierev par.

Je linearna transformacija:

$$\mathcal{F}\left[f_1(t)+f_2(t)\right]=\mathcal{F}\left[f_1(t)\right]+\mathcal{F}\left[f_2(t)\right]$$

$$\mathcal{F}\left[\alpha\cdot f_1(t)\right]=\alpha\cdot\mathcal{F}\left[f_1(t)\right]$$

Ima lastnost podobnosti:

$$f(t)\leftrightarrow F(\omega);\quad g(t)=f(at);\,a\neq 0\Rightarrow G(\omega)=\frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Časovni premik transformira v frekvenčno dušenje:

$$f(t)\leftrightarrow F(\omega);\quad g(t)=f(t-t_0)\Rightarrow G(\omega)=e^{-j\omega t_0}F(\omega)$$

Frekvenčni premik transformira v časovno dušenje

$$f(t)\leftrightarrow F(\omega);\quad g(t)=f(t)\cdot e^{j\omega_0 t}\Rightarrow G(\omega)=F(\omega-\omega_0)$$

Amplitudna modulacija signala $f(t)$

$$f(t)\leftrightarrow F(\omega);\quad g(t)=f(t)\cdot\cos\omega_0 t\Rightarrow G(\omega)=\frac{1}{2}\left(F(\omega-\omega_0)+F(\omega+\omega_0)\right)$$

$$f(t)\leftrightarrow F(\omega);\quad g(t)=f(t)\cdot\sin\omega_0 t\Rightarrow G(\omega)=j\left(F(\omega+\omega_0)-F(\omega-\omega_0)\right)$$

Časovno odvajanje preslika v množenje z $j\omega$ **v frekvenčnem prostoru:**

$\mathcal{F}\left[\frac{df(t)}{dt}\right]=j\omega\cdot F(\omega)$**. To pomeni, da ojača visoke frekvence, kakršen je ponavadi šum, torej poslabša razmerje signal-šum.**

Časovno integriranje je ravno nasprotno od odvajanja in v frekvenčnem prostoru povzroči deljenje z $j\omega$**. To oslabi visoke frekvence, kar izboljša razmerje signal-šum**

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau\right]=\frac{1}{j\omega}\cdot F(\omega).$$

Obstaja inverzna Fouriereva transformacija

$$\mathcal{F}^{-1}\left[F(\omega)\right]=f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega$$

Če bi želeli izračunati spekter spektra, bi dobili

$$\mathcal{F}\left[F(t)\right]=2\pi\cdot f(-\omega)$$

12. Funkcija delta (eksplicitna in implicitna definicija, lastnosti)

Do eksplicitne definicije funkcije delta pridemo s pomočjo njene Fouriereve transformacije, ki je konstantna ter enaka 1 na celotnem frekvenčnem območju.

$$\delta(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\omega t}\,d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\cos\omega t\;d\omega$$

?!?

mogoče je podana s konvolucijo

f(t)=f(t)*δ(t)

Pomembna lastnost funkcije delta je tipalna lastnost, kar pomeni da je

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cdot\delta(t-t_0)\,dt=f(t_0)$$

13. Fouriereva transformacija periodičnih signalov

Če izračunamo Fourierevo transformacijo periodične funkcije, moramo najprej izračunati njeno Fourierevo vrsto, nato pa transformacijo določimo po enačbi

$$f_p(t)=f_p(t+T_0);\quad \omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$$

$$f_p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_p(n)\,e^{jn\omega_0 t}$$

$$\left[f_p(t)\right] = F(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_p(n)\delta(\omega - n\omega_0)$$

14.Primeri signalov, ki so invariantni na Fourierevo transformacijo

Primera invariantnega signala na Fourierevo transformacijo sta $e^{-\alpha t^2}$ in periodična funkcija $\delta_{T0}(t)$.

Korelacija in konvolucija neperiodičnih signalov

1. **Avtokorelacija neperiodičnih signalov (definicija, lastnosti)**
Avtokorelacija neperiodičnih signalov je definirana z enačbo

$\varphi_{ii}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f_i(t)} \cdot f_i(t+\tau)\, dt = \langle f_i(t+\tau), f_i(t) \rangle$**, kar pa je skalarni produkt funkcij pod integralom. Da skalarni produkt obstaja, mora obstajati vektorski prostor, kakršnega pa tvorijo energijski signali. Pogoj za obstoj avtokorelacije neperiodičnega signala je, da je signal energijski.**

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_i(t)|^2\, dt < \infty$$

Za avtokorelacijo velja Hermitska enakost, če pa je signal $f_i(t)$ realen, pa celo sodost

$\varphi_{ii}(-\tau) = \overline{\varphi_{ii}(\tau)}; \quad f_i(t) \in \mathbb{R} \Rightarrow \varphi_{ii}(-\tau) = \varphi_{ii}(\tau)$.

Velja tudi, da je avtokorelacija v izhodišču enaka energiji signala $f_i(t)$

$$\varphi_{ii}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f_i(t)} \cdot f_i(t)\, dt = E_{ff}$$

Fourierreva transformacija avtokorelacije predstavlja spekter energijske gostote signala

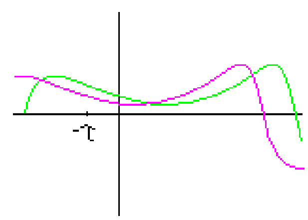
$$\mathcal{F}\left[\varphi_{ii}(\tau)\right] = \phi_{ii}(\omega) = |F_i(\omega)|^2$$

Avtokorelacija v izhodišču je vedno večje ali kvečjemu enako avtokorelaciji za ostale vrednosti spremenljivke τ .

$$\varphi_{ii}(0) \geq \varphi_{ii}(\tau)$$

Je zvezna funkcija spremenljivke τ , če je funkcija $f_i(t)$, katere avtokorelacijo računamo vsaj odsekoma zvezna, torej če ima na poljubnem končnem intervalu končno število nezveznosti.

2. **Preslikava neperiodični signal, avtokorelacija**
Pri računanju avtokorelacije signala si pomagamo z grafično predstavitvijo, pri čemer narišemo signal v graf, nato pa ga narišemo v isti graf še enkrat, le da je tokrat zamaknjen za majhen τ . Iz grafa nato razberemo meje integriranja pri določenih vrednostih τ .



3. **Energijski spekter neperiodičnih signalov**
Fourierreva transformacija avtokorelacije predstavlja spekter energijske gostote signala

$$\mathcal{F}\left[\varphi_{ii}(\tau)\right] = \phi_{ii}(\omega) = F_i(\omega) \cdot \overline{F_i(\omega)}; \quad F_i(\omega) \in \mathbb{R} \Rightarrow \phi_{ii}(\omega) = |F_i(\omega)|^2$$

4. **Parcevalova enačba**

$$\varphi_{ii}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{ii}(\omega) \cdot e^{j\omega\tau}\, d\omega\, ; \phi_{ii}(\omega) \geq 0$$

5. **Križna korelacija neperiodičnih signalov (definicija, lastnosti)**
Križna korelacija neperiodičnega signala je definirana z integralom

$$\varphi_{ij}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f_i(t)} \cdot f_j(t+\tau)\, dt$$

Je antisimetrična funkcija, kar pomeni, da je $\varphi_{ji}(\tau)=\overline{\varphi_{ij}(-\tau)}$. Če sta funkciji $f_i(t)$ in $f_j(t)$ realni, pa ima križna korelacija zrcalno obliko $\varphi_{ji}(\tau)=\varphi_{ij}(-\tau)$

Fouriereva transformacija križne korelacije je enaka

$$\phi_{ij}(\omega)=\overline{F_i(\omega)}\cdot F_j(\omega)$$

Križna korelacija je zvezna funkcija, če sta $f_i(t)$ in $f_j(t)$ vsaj odsekoma zvezni.

6. Križna korelacija kot mera za podobnost

Je mera za podobnost dveh signalov, saj je namreč križna korelacija definirana kot skalarni produkt med signaloma $f_i(t)$ in $f_j(t+\tau)$, ta pa je največji, kadar sta si signala vzporedna in enaka nič, kadar sta pravokotna drug na drugega.

$$\langle x(t), y(t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot\overline{y(t)}\,dt \qquad \varphi_{ij}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\overline{f_i(t)}\cdot f_j(t+\tau)\,dt$$

7. Povezava med razdaljo in korelacijo med signaloma

Podobnost lahko povežemo tudi z razdaljo. Razdalja med signaloma bo tem manjša, čim večja bo korelacija $\varphi_{ij}(\tau)$. Majhna razdalja med signaloma pomeni veliko podobnost.

8. Konvolucija neperiodičnih signalov (definicija, lastnosti)

Konvolucija neperiodičnih signalov je definirana z enačbo

$$\rho_{ij}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} f_i(t)\cdot f_j(\tau-t)\,dt = f_i(\tau)*f_j(\tau)$$

Kot pri korelaciji je tudi pri konvoluciji pogoj za obstoj to, da je signal energijski. Konvolucija je odvisna od premika in sicer tako, da je tudi sama premaknjena za enak t_0, kot funkcija $f_i(t)$.

$$f_i(t)\to f_i(t-t_0)\Rightarrow \rho_{ij}(\tau)\to\rho_{ij}(\tau-t_0)$$

Fouriereva transformacija konvolucije neperiodičnih signalov je enaka produktu Fourierevih transformacij signalov $f_i(t)$ in $f_j(t)$

$$\mathcal{F}\left[\rho_{ij}(\tau)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\rho_{ij}(\tau)\,e^{-j\omega\tau}\,d\tau = F_i(\omega)\cdot F_j(\omega)$$

Konvolucija je simetrična oziroma komutativna funkcija

$$\rho_{ij}(\tau)=\rho_{ji}(\tau) \qquad f_i(t)*f_j(t)=f_j(t)*f_i(t)$$

Fouriereva transformacija produkta dveh signalov je enaka konvoluciji Fourierevih transformacij posameznih signalov.

$$\left[f_i(t)\cdot f_j(t)\right]=F_i(\tau)*F_j(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F_i(\omega)\cdot F_j(\omega-u)\,du$$

Konvolucija je zvezna preslikava, če sta $f_i(t)$ in $f_j(t)$ vsaj odsekoma zvezni.

9. Povezava med korelacijo in konvolucijo neperiodičnih signalov

Če je signal $f_i(t)$ soda realna funkcija, oziroma če velja $\overline{f_i(-t)}=f_i(t)$, sta korelacija in konvolucija enaki. $\varphi_{ij}=\bar{f}_i * f_i$

$$f_i(t)\in\mathbb{R}\ \&\ f_i(t)=f_i(-t)\Rightarrow\varphi_{ij}(\tau)=\rho_{ij}(\tau)$$

10. Vpliv oknenja na spekter signalov

Oknenje je operacija, ki signalu $f(t)$ priredi signal $g(t)=f(t)\cdot w(t)$, pri čemer je $w(t)$ okenska funkcija, katere spekter je funkcija delta. Ker ima funkcija delta konstanten spekter, sta spektra $G(\omega)=F(\omega)$ enaka.

Namen oknenja je, da pri obdelavi signala upoštevamo le določen odsek le tega, kakršnega smo sposobni v končnem času izračunati.

Pri pravokotnem oknu se na robovih pojavljajo višje harmonske frekvence.

11.**Želene karakteristike okenskih funkcij**

Pomembna lastnost okenskih funkcij je, da ne spremenijo spektra signala. Definirane so na način, da so različne od nič le na intervalu od $\left(-\frac{b}{2},\frac{b}{2}\right)$**. Drugod so enake nič. V praksi se ponavadi pojavljajo okna zvonaste oblike, lahko pa uporabimo tudi trikotno ali kvadratno.**

Primera takih oken sta kvadratno okno ter Hammingovo okno

$$w_K(t)=\begin{cases} E & -\frac{b}{2}<t<\frac{b}{2} \\ 0 & drugod \end{cases} \quad \Rightarrow \quad W(\omega)=Eb\cdot\frac{\sin\frac{\omega b}{2}}{\frac{\omega b}{2}}$$

$$w_H(t)=a-\cos\omega t$$

Naključni signali

1. **Definicija naključnega signala**
   Naključni signal je signal, katerega obnašanje v prihodnosti ne moremo natanko napovedati.
2. **Nekatere posplošitve pri obdelavi naključnih signalov**
   - **Naključni signal obravnavamo kot signal z neskončnim časom trajanja (-∞<t<+∞)**
   - **Opazujemo obnašanje skupine (množice) naključnih signalov, ki jih oddajajo podobni viri.**
   - **Množica opazovanih signalov je po svoji moči (številu elementov) neomejena.**
3. **Fazni prostor naključnih signalov**
   DEF.: Fazni prostor imenujemo množico vseh možnih amplitud (vrednosti), ki jih naključni signal lahko zavzame.
   Ker poznamo samo preteklost signala, lahko njegov spekter le ocenimo.
4. **Deterministične karakteristike naključnih signalov**
   - **srednja vrednost**
   - **varianca**
   - **standardna deviacija**
   - **verjetnostna porazdelitev amplitud signala**
5. **Stacionarnost vira, ki oddaja naključni signal**
   Deterministične karakteristike signala, ki ga oddaja tak vir, so časovno neodvisne.
6. **So naključni signali, ki jih oddaja stacionaren naključni vir, lahko energijski?**
   Ne, ker ni izpolnjen pogoj, da je signal energijski. Če bi veljala lastnost $\lim_{T\to\infty}|f(t)|=0$**, bi veljalo** $P(f(\pm\infty)=0)=1$**, zaradi stacionarnosti zato velja** $P(f(t)=0)=1$ **za vsak t. Temu pogoju pa ustreza samo signal, ki je povsod enak nič.**
7. **Avtokorelacija stacionarnih naključnih signalov**

$$\varphi_{ii}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\overline{f_i(t)}\cdot f_i(t+\tau)\,dt$$

   Avtokorelacija stacionarnega naključnega signala s končno močjo je deterministični energijski signal, definiran na celi časovni osi.
   Lastnosti avtokorelacije (podobno kot pri determinističnih signalih)
   - **Hermitova simetrija**
   - **Moč**
   - **Maksimalnost**
   - **Limitna vrednost pri τ = ±∞** $\lim_{\tau\to\pm\infty}\varphi_{ii}(\tau)=0$
   - **Wienerjev izrek (Eksistenca F in F^{-1} transformacije avtokorelacije)**

$$\phi_{ii}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_{ii}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$\varphi_{ii}(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\phi_{ii}(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega$$

- **Spekter močnostne gostote**
- $\varphi_{ii}(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\phi_{ii}(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega = \text{moč signala } \mathrm{f_i}(\mathrm{t})$**, zato je** $\phi_{ii}(\omega)$ **spekter močnostne gostote.** $\phi_{ii}(\omega)\geq 0$**, fazni spekter avtokorelacije je enak 0.**
- **Zveznost: Avtokorelacija je zvezna, če je zvezna v izhodišču.**

Statistično opazovanje naključnih procesov

1. Vzorčno povprečje

$$\mathrm{E}[\mathrm{X}(\mathrm{t}_1)]=\sum_{k=1}^{n}x_k p_k$$

2. Izražava vzorčnega povprečja z matematičnim upanjem

zvezna porazdelitev amplitud: $\mathrm{E}[\mathrm{X}(\mathrm{t}_1)]=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot p(x,t_1)dx$ **;** $p(x,t_1)=P(x\leq x(t_1)<x+dx)$

diskretna porazdelitev: $\mathrm{E}[\mathrm{X}(\mathrm{t}_1)]=\sum_{i=1}^{l}x_i P(x(t_1)=x_i)$

3. Korelacija in kovarianca

$$R_{xy}(t_1,\tau)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k(t_1)\cdot y_k(t_1+\tau)=E[x(t_1)\cdot y(t_1+\tau)]$$

$$C_{xy}(t_1,\tau)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x(t_1)-E(x(t_1))(y(t_2)-E(y(t_2))))=R_{xy}(t,\tau)-E(x(t_1))\cdot E(y(t_1+\tau))$$

Če je časovno povprečje vsaj enega signala enako 0, je $C_{xy}=R_{xy}$

4. Stroga stacionarnost in stacionarnost v širšem smislu
stroga stacionarnost: $p(x_1,x_2,\dots,x_n;t_1,t_2,\dots,t_n)= p(x_1,x_2,\dots,x_n;t_1+\tau,t_2+\tau,\dots,t_n+\tau)$ za poljuben τ, poljubno n-terico amplitud x in časovnih trenutkov t, za vsak n
stacionarnost v širšem smislu: za n= 1, 2
$p(x;t_1)= p(x;t_1+\tau)=p(x)$
$p(x,y;t_1,t_2)= p(x,y,;t_1+\tau,t_2+\tau)=p(x,y;\tau)$

5. Časovno povprečje

$$\bar{x}_t=\bar{x}_k(t)=\lim_{\substack{\Delta t\to 0\\ T\to\infty}}\frac{1}{n}\sum_{i=-n}^{0}x_k(i\cdot\Delta t);\ \ \mathrm{n}=\frac{\mathrm{T}}{\Delta \mathrm{t}}$$

6. Enakost med vzorčnim in časovnim povprečjem
Povprečja sta enaka, če je signal ergodičen. To pomeni, da je stacionaren in da za vsako realizacijo velja, da zavzame vse možne vrednosti (ena realizacija se ne 'izogne' nobeni amplitudi).

7. Definicija avtokorelacije s časovnim in vzorčnim povprečjem

$$\varphi_{xx}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1\cdot x_2\cdot p(x_1,x_2;\tau)dx_1dx_2=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t)\cdot x(t+\tau)dt$$

$p(x_1,x_2;\tau)$...gostota verjetnosti, da je $\mathrm{x(t)=x_1}$ in $\mathrm{x(t+\tau)=x_2}$

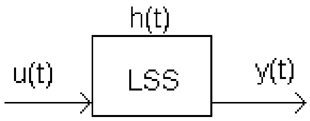
8. Poissonov naključni proces
- **ponavljanje enega in istega dogodka (prehod skozi ničlo)**
- **dogodki so med seboj neodvisni in imajo vsi isto verjetnost**
- **lahko se zgodi samo en dogodek hkrati**
- **povprečno število dogodkov v enoti časa je konstantno (k)**

- **Poissonova porazdelitev verjetnosti** $P_n(t)=\frac{(k\cdot t)^n}{n!}e^{-kt}$

9. Primeri stacionarnih naključnih signalov
beli šum, naključno spreminjanje predznaka amplitude, pozitivni impulzi,...
(slike: glej LSS, 5.vprašanje)

Linearni stacionarni sistemi (LSS) in uporaba korelacije

1. Definicija linearnega stacionarnega sistema
Linearni stacionarni sistem je tak sistem, za katerega velja, da je izhod linearno odvisen od vhoda, proporcionalen ter stacionaren.



$$\left.\begin{array}{l} u_1(t)\rightarrow y_1(t) \\ u_2(t)\rightarrow y_2(t)\end{array}\right\} u_1(t)+u_2(t)\rightarrow y_1(t)+y_2(t)$$ **linearnost**

$$\begin{array}{c} u(t)\rightarrow y(t) \\ \alpha\cdot u(t)\rightarrow \alpha\cdot y(t)\end{array}$$ **proporcionalnost**

$$\begin{array}{c} u(t)\rightarrow y(t) \\ u(t-t_0)\rightarrow y(t-t_0)\end{array}$$ **stacionarnost**

2. Kaj je to impulzni odziv LSS in kakšne so njegove lastnosti?
Impulzni odziv linearnega stacionarnega sistema je energijski signal. Je odziv, ki ga povzroči Diracov impulz oziroma funkcija delta v točki 0. Impulzni odziv je tako za čase manjše od 0 enaka nič.
Impulzni odziv LSS je enak tudi inverzni Fourierevi transformaciji prevajalne funkcije.

$$\delta(t)\rightarrow h(t)$$

$$h(t)=\mathcal{F}^{-1}\left[H(\omega)\right]$$ **impulzni odziv**

$$H(\omega)=\frac{Y(\omega)}{U(\omega)}$$ **prevajalna funkcija**

3. Kako je avtokorelacija izhodnega signala in križna korelacija med vhodnim in izhodnim signalom povezana z vzbujanjem LSS in njegovim impulznim odzivom?
Avtokorelacija izhodnega signala je enaka konvoluciji avtokorelacije impulznega odziva ter avtokorelacije vzbujanja LSS.

$$\varphi_{yy}(\tau)=\varphi_{hh}(\tau)*\varphi_{uu}(\tau)\Rightarrow \phi_{yy}(\omega)=\phi_{hh}(\omega)\cdot\phi_{uu}(\omega)\Rightarrow |H(\omega)|^2=\frac{\phi_{yy}(\omega)}{\phi_{uu}(\omega)}$$

Križna korelacija vhoda in izhoda je enaka konvoluciji impulznega odziva ter avtokorelacije vzbujanja.

$$\varphi_{uy}(\tau)=h(\tau)*\varphi_{uu}(\tau)\Rightarrow \phi_{uy}(\omega)=H(\omega)\cdot\phi_{uu}(\omega)$$

Prevajalna funkcija sistema je torej enaka kvocientu Fouriereve transformacije križne korelacije vhoda in izhoda ter Fouriereve transformacije avtokorelacije izhoda.

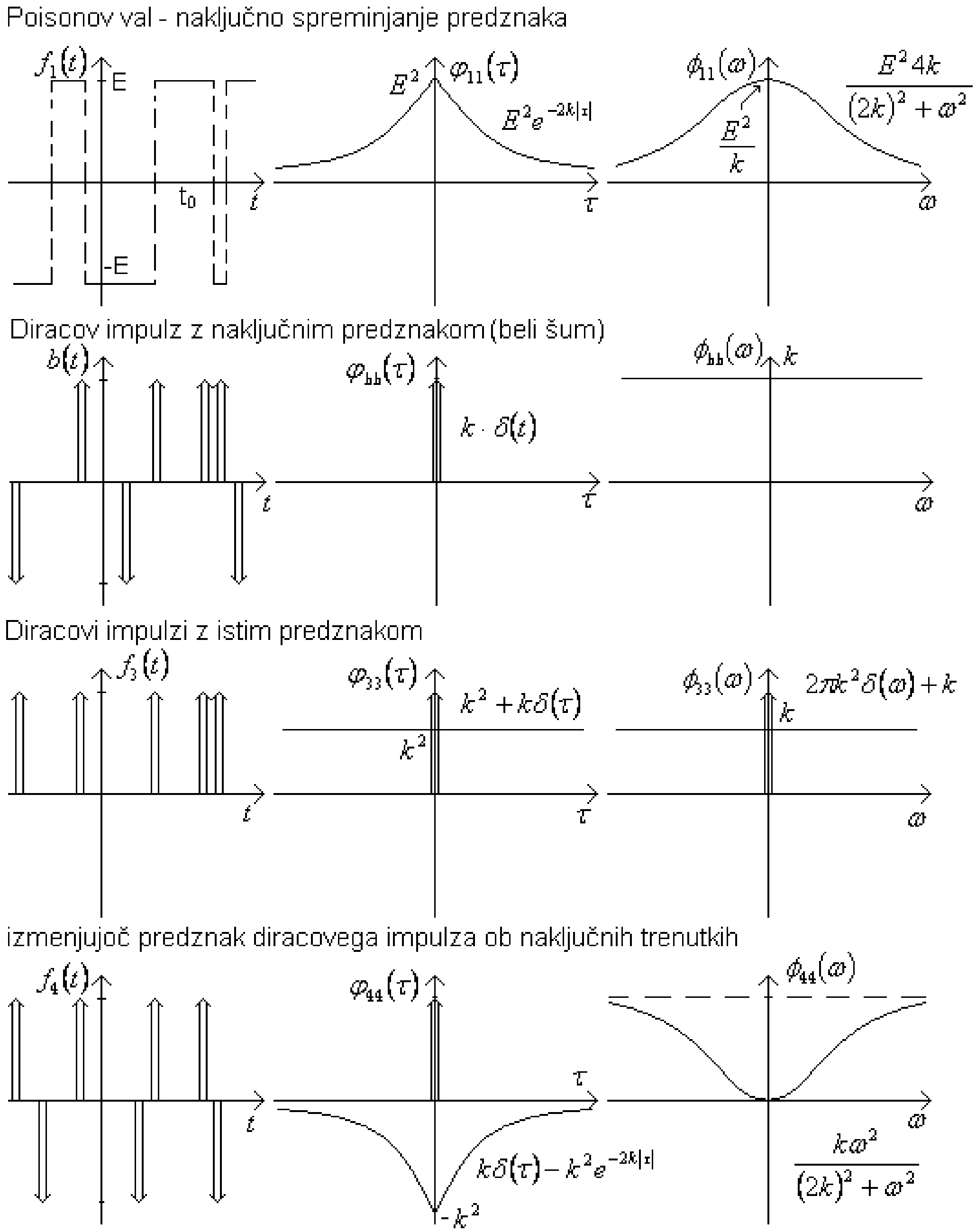
$$H(\omega)=\frac{\phi_{uy}(\omega)}{\phi_{uu}(\omega)}$$

4. Določanje impulznega odziva LSS in njegove prevajalne funkcije v primeru, ko je vhod v LSS naključni signal, ki ga oddaja stacionarni naključni vir
Če je vhod v LSS stacionaren naključni signal, ne moremo določiti njegove ter izhodne Fouriereve transformacije, zato je za določitev prevajalne funkcije ter s tem impulznega odziva potrebna drugačna pot.

Pomagamo si z avtokorelacijama vhoda ter izhoda, ki ju povezuje avtokorelacija impulznega odziva

$$\varphi_{yy}(\tau)=\varphi_{hh}(\tau)*\varphi_{uu}(\tau)\Rightarrow \phi_{yy}(\omega)=\phi_{hh}(\omega)\cdot\phi_{uu}(\omega)\Rightarrow |H(\omega)|^2=\frac{\phi_{yy}(\omega)}{\phi_{uu}(\omega)}$$

5. **Modeli LSS pri določanju avtokorelacije nekaterih stacionarnih naključnih signalov**



Primerjave med postopki obdelave in lastnostmi različnih skupin signalov

1. **Opisovanje spektralnih karakteristik signalov**
   Če je signal periodičen, je njegov spekter diskreten. Daljša kot je perioda signala, bolj gost je njegov frekvenčni spekter. Če je njegova perioda neskončna, oziroma če je signal neperiodičen, bo njegov spekter postal zvezna funkcija frekvence.
   Če je signal rezultat nekega naključnega procesa, mu ne moremo določiti spektra, zato si pri le teh pomagamo z avtokorelacijo. Spekter avtokorelacije naključnega signala je tudi zvezna funkcija.

2. **Skupne lastnosti avtokorelacije signalov**
Za vse vrste signalov velja, da je avtokorelacija Hermitsko enaka funkcija, ki je v izhodišču največja. Če je avtokorelacija realna funkcija, to pomeni, da je tudi soda. Avtokorelacija je neodvisna od premika funkcije, torej ni bijektivna preslikava.

$$\varphi_{ii}(\tau) = \overline{\varphi_{ii}(-\tau)}$$

$$\varphi_{ii}(0) \geq \varphi_{ii}(\tau)$$

3. **Razlike v lastnostih avtokorelacije**
Avtokorelacija periodičnih signalov je periodična funkcija s periodo enako periodi signala, medtem ko je avtokorelacija aperiodičnega signala tudi aperiodična.
Pri periodičnih signalih avtokorelacija v izhodišču pomeni moč signala, medtem ko je pri neperiodičnih avtokorelacija v izhodišču energija signala.

$\varphi_{ii}(0) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} |f_i(t)|^2\, dt \qquad f_i(t)$ **- periodična funkcija**

$\varphi_{ii}(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f_i(t)|^2\, dt \qquad f_i(t)$ **- neperiodična funkcija**

Detekcija in določanje periodične komponente iz ozadja šuma

1. **Postopek z avtokorelacijo**
Signal $f(t)$ naj bo naključni signal sestavljen iz močnostnega periodičnega signala ter močnostnega naključnega signala.

$$f(t) = S(t) + N(t)$$

Avtokorelacijo signala določimo z enačbo

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t) \cdot f(t+\tau)\, dt$$

Vanjo vstavimo izraz za $f(t)$ in dobimo

$$\varphi(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} (S(t) + N(t)) \cdot (S(t+\tau) + N(t+\tau))\, dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} S(t) \cdot S(t+\tau)\, dt + \int_{-T}^{T} S(t) \cdot N(t+\tau)\, dt + \int_{-T}^{T} N(t) \cdot S(t+\tau)\, dt + \int_{-T}^{T} N(t) \cdot N(t+\tau)\, dt$$

$$\varphi(\tau) = \varphi_{SS}(\tau) + \varphi_{SN}(\tau) + \varphi_{NS}(\tau) + \varphi_{NN}(\tau)$$

Pri analiziranju križne korelacije smo ugotovili, da je to funkcija, ki ocenjuje podobnost dveh funkcij. Sklepamo lahko, da si periodičen signal ter naključni signal nista podobna, torej da je njuna križna korelacija enaka nič. Če to upoštevamo pri postopku z avtokorelacijo naključnega signala, dobimo kot rezultat

$$\varphi(\tau) = \varphi_{SS}(\tau) + \varphi_{NN}(\tau)$$

Ker je signal $S(t)$ periodičen, zanj velja da je $S(t) = S(t+T)$, kar velja od negativne do pozitivne neskončnosti. Ker naključni signal $N(t)$ ni periodičen, njegova avtokorelacija tudi ni periodična, tako da s časom izzveni. Od nekega določenega τ_0 dalje velja, da bo avtokorelacija naključnega signala enaka avtokorelaciji signala $S(t)$, kar pomeni, da smo šum v signalu izničili.

$$\varphi_{SS}(\tau + T) = \varphi_{SS}(\tau);\ \forall\tau,$$

$$\lim_{\tau\to\infty} \varphi_{NN}(\tau) = 0$$

$$\tau > \tau_0: \quad S(t) \neq 0 \Rightarrow \varphi(\tau) \approx \varphi_{SS}(\tau)$$

$$\qquad\qquad S(t) = 0 \Rightarrow \varphi(\tau) \approx 0$$

2. Postopek s križno korelacijo

Signal $f(t)$ naj bo naključni signal sestavljen iz močnostnega signala $S(t)$ ter močnostnega naključnega signala $N(t)$. Imejmo še periodični signal $C(t)$.

$$f(t) = S(t) + N(t)$$
$$C(t) = C(t + T)$$

Križna korelacija $\varphi_{Cf}(\tau)$ je podana z enačbo

$$\varphi_{Cf}(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} C(t) \cdot f(t + \tau)\, dt$$

Vstavimo izraz za $f(t)$ v integral ter upoštevamo, da si signala $C(t)$, ki je periodičen, ter $N(t)$, ki je naključen, nista podobna. To pomeni, da je njuna križna korelacija enaka nič.

$$\varphi_{Cf}(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} C(t) \cdot \left(S(t+\tau) + N(t+\tau)\right) dt =$$
$$= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \left[\int_{-T}^{T} C(t) \cdot S(t+\tau)\, dt + \int_{-T}^{T} C(t) \cdot N(t+\tau)\, dt \right]$$
$$\varphi_{Cf}(\tau) = \varphi_{CS}(\tau) + \varphi_{CN}(\tau)$$
$$\varphi_{CN}(\tau) = 0 \Rightarrow \varphi_{Cf}(\tau) = \varphi_{CS}(\tau)$$

Tudi če je $S(t)$ neperiodičen signal, bo križna korelacija med $C(t)$ in $S(t)$ periodična, saj je prva periodična funkcija.

$$\varphi_{CS}(\tau) = \varphi_{CS}(\tau + T)$$

Če bo signal $S(t)$ različen od nič, torej če bo obstajal, bo obstajala tudi križna korelacija $\varphi_{Cf}(\tau)$, ki bo periodična s periodo funkcije $C(t)$. Če pa prvotnega signala ne bo oziroma bo enak nič, bo takšna tudi križna korelacija.

$$S(t) \neq 0 \Rightarrow \varphi_{Cf}(\tau) \approx \varphi_{Cf}(\tau + T)$$
$$S(t) = 0 \Rightarrow \varphi_{Cf}(\tau) \approx 0$$

Če namesto funkcije $C(t)$ vzamemo periodično funkcijo delta, se bo križna korelacija le te in funkcije $f(t)$ od $S(t)$ razlikovala le za faktor $\frac{1}{T}$.

$$C(t) \approx \delta_T(t) \Rightarrow \varphi_{Cf}(\tau) = \frac{1}{T} S(t).$$

3. Izbira postopka

Za določanje signala iz ozadja šuma lahko izbiramo med postopkom z avtokorelacijo ter postopkom s križno korelacijo. Pri postopku z avtokorelacijo lahko iz šuma izluščimo le signale, ki so periodični. Če signal ni periodičen, pa smo prisiljeni uporabiti metodo s križno korelacijo. Za tak postopek pa potrebujemo generator Diracovih impulzov, katerih frekvenca bo vplivala na razpoznavnost signala.

4. Določanje višine govornega signala

?!? Določanje višine govornega signala je iskanje osnovne periode signala.?

Vzorčenje in kvantizacija

1. Definicija vzorčenja.

Vzorčenje je postopek izbire vrednosti signala. Predstavimo ga lahko s preslikavo:

S : x(t) $\rightarrow$ {..., $x(t_1)$, $x(t_2)$,...}

Vzorčenje s stalnim časovnim razmakom je preslikava

S : x(t) $\rightarrow$ {$x(n \cdot t_0)$}; n $\in Z$

2. **Shannonov izrek o vzorčenju.**
Naj bo x(t) zvezen frekvenčno omejen signal s frekvencami med 0 in F. Signal je popolnoma določen, če poznamo njegov vrednosti (vzorce), ki si sledijo v stalnih časovnih razmikih širine t0, kjer je $t_0 = \frac{1}{2F}$ **;** $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nt_0) \frac{\sin 2\pi F(t - nt_0)}{2\pi F(t - nt_0)}$
Frekvenca 2F=1/t_0 **je Shannon-ova frekvenca vzorčenja.**

3. **Vzorčenje z različnimi frekvencami vzorčenja in posledice.**
   - **Naj bo** $t_0 > \frac{1}{2F}$**, zato je** $W > \frac{\pi}{t_0}$ $\rightarrow$ **rekonstrukcija ni možna, na ω osi se vzorci prekrivajo, s filtri se napake ne da odpraviti**
   - **Naj bo** $t_0 < \frac{1}{2F}$**, zato je** $W < \frac{\pi}{t_0}$ $\rightarrow$ **rekonstrukcija je še vedno možna (nič ne pridobimo)**

4. **Frekvenčna in časovna omejitev signala.**
Signal, ki bi bil frekvenčno in časovno omejen ne obstaja. Lahko je časovno omejen in frekvenčno neomejen in obratno.

5. **Definicija kvantizacije.**
Kvantizacija je preslikava Q oblike:
Q: x(t) $\rightarrow$ $x_Q(t)$ **ali** $x_Q(t) = Q(x(t))$

6. **Kaj je kvantizacijska napaka?**
Def.: Kvantizacijska napaka je signal: $e_Q(t) = x_Q(t) - x(t)$

7. **Lastnosti signala kvantizacijske napake v časovnem prostoru.**
$$|e_Q(t)| < \frac{\Delta x}{2}$$

8. **Ocena za srednjo moč signala kvantizacijske napake (q = ?).**
naredimo približek $e_Q(t) \approx kt$ **za |t|<**t_1 **,** $\frac{\Delta x}{2} = kt_1$
$$P_Q \approx \frac{k}{\Delta x} \int_{-\frac{\Delta x}{2k}}^{+\frac{\Delta x}{2k}} k^2 t^2 dt = \frac{\Delta x^2}{12}$$
Ocena moči je uporabna za q > 128 oziroma n > 7 (n je število bitov kvantizatorja).

9. **Spekter signala kvantizacijske napake**
Spekter močnostne gostote signala $e_Q(t)$**:**
$$\phi_{QQ}\left(\frac{\omega}{W}\right) \approx \frac{k}{4\pi^3} \sqrt{\frac{3k}{2\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} e^{-\frac{3k\omega^2}{8n^2\pi W^2}},$$
kjer je W=2πF, F je mejna frekvenca signala in k=1/q.
Za q>128 je spekter približno konstanten za |ω/W|<40. Ob tem pogoju ima signal napake lastnosti belega šuma.

10. **Razmerje med močjo koristnega signala in močjo kvantizacijske napake (predpostavke, odvisnost od q).**
Ko je $t_0 = \frac{1}{2F}$ **je situacija najbolj neugodna.** $\xi_Q^2\big|_{\min} = \frac{P_S}{P_Q} \approx \frac{12 P_S}{(\Delta x)^2}$; $\xi_Q^2\big|_{\max} = \frac{P_S}{\int_{-1}^{1} \phi_{QQ}(\gamma) d\gamma}$
Za n > 6 lahko uporabimo oceno $10 \log \xi_Q^2\big|_{\min} \approx 6n - 7.2$ **[dB]; kjer je q=**2^n**.**

Diskretna Fourierjeva transformacija (DFT)

1. **Kakšen postopek je DFT?**
DFT je preslikava iz časovnega v frekvenčni prostor. Uporablja se takrat, ko je funkcija vzorčena v periodičnih razmikih ali pa so signali izhodni signali digitalnih procesorjev.

Diskretni signali so definirani le ob časih vzorčenja ali pa je to diskretno zaporedje števil, ki ustreza vzorcem. Zvezna FT nima smisla, ker diskretni časovni vzorci nimajo ploščine in so zato njihovi transformi enaki 0. Zato obravnavamo vzorce kot da so prirejeni izvirni funkciji.

2. **Razlika med DFT in FFT (Fast Fourier Transform)**
   Razlika med DFT in FFT je poseben numeričen postopek pri FFT. Rezultat je enak.

3. **Definicija DFT. Lastnosti DFT.**

$$F_D(k\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} f(nT) e^{-jnTk\Omega}\text{; k} = 0,1,\ldots,\text{N - 1; N} \equiv \text{število vzorcev; T} \equiv \text{interval vzorcenja}$$

Lastnosti:

- **linearnost**
- **če so vzorci realni, je realni del spektra soda funkcija, imaginarni pa liha**
- **periodičnost s periodo NΩ, če Ω=2π/NT ; opomba: FT v splošnem NI periodična**
- **obstaja inverzna DFT, če Ω=2π/NT**

  $$f'(nT) = \frac{1}{N}\sum F_D(k\Omega)\cdot e^{jnTk\Omega}$$ **Ta funkcija je periodična s periodo NT. Iz neperiodičnega signala f(t) z DFT dobimo periodičen F_D(nT), iz tega pa periodično funkcijo f'(t).**

- **Množenje DFT**

$$\{f_1(nT)\} \xrightarrow{DFT} \{F_{D1}(k\Omega)\}$$
$$\{f_2(nT)\} \xrightarrow{DFT} \{F_{D2}(k\Omega)\}$$
$$\{f_3(nT)\} \xleftarrow{IDFT} \{F_{D1}(k\Omega)\cdot F_{D2}(k\Omega)\}$$
$$f_3(nT) = \{f_1(nT)\} * \{f_2(nT)\}$$
$$f_3(nT) = \sum_{i=0}^{N-1} f_i(iT)\cdot f_2((n-i)T) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} F_{D1}(k\Omega)\cdot F_{D2}(k\Omega) e^{jnkT\Omega}$$

To je periodična konvolucija. Če želimo neperiodično konvolucijo, vzorcem dodamo ničle ('zero padding')

4. **DFT in linearni stacionarni sistemi.**

$$y(t) = h(t) * u(t)$$
$$y(nT) \doteq T\sum_{i=0}^{n} u(iT)\cdot h((n-i)T)$$
$$Y_D(k\Omega) \doteq H_D(k\Omega)\cdot U_D(k\Omega)$$
$$Y(\omega)\big|_{\omega=k\Omega} \doteq T\cdot H_D(k\Omega)\cdot U_D(k\Omega)$$

5. **Povezava med FT in DFT.**

$$F(\omega)\big|_{\omega=k\Omega} \doteq T\cdot F_D(k\Omega)$$

6. **Lastnosti približka k FT dobljenega s postopkom DFT.**
   Točnost približka je odvisna od intervala vzorčenja T. Če je T manjši, je približek boljši. Poleg manjšanja T je za izboljšanje približka potrebno tudi povečanje števila vzorcev. Največja napaka je na robovih intervala, ker pride do prekrivanja zaradi periodičnosti.