2.1 Ponazoritev s Fourierjevimi vrstami

Periodične signale opisujemo s Fourierjevimi vrstami. Signal $f(t)$ je mogoče izraziti z njegovo Fourierjevo vrsto, če izpolnjuje tako imenovane Dirichletove pogoje:

- Integral $\int_{t_0}^{t_0+T} |f(t)|\, dt$ preko ene periode T signala $f(t)$ mora biti končen,
- signal $f(t)$ sme imeti na območju ene periode le končno število maksimumov in minimumov,
- na območju ene periode sme signal imeti le končno število končnih nezveznosti.

Če so ti pogoji izpolnjeni, tedaj Fourierjeva vrsta $\widetilde{f(t)}$ konvergira v vsaki točki $t = t_0$ k vrednosti $\widetilde{f}(t_0) = \frac{1}{2}[f(t_0^+) + f(t_0^-)]$.

Realna Fourierjeva vrsta

$$\widetilde{f}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t \tag{2.1}$$

kjer velja,

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos n\omega t\, dt\ , \tag{2.2}$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin n\omega t\, dt\ , \tag{2.3}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}\ . \tag{2.4}$$

Kompleksna Fourierjeva vrsta

S kompleksno Fourierjevo vrsto ponazarjamo tako realne kot kompleksne signale. Če je signal $f(t)$ realen, ima vrsta realno vrednost.

$$\widetilde{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n)\, e^{jn\omega t} \tag{2.5}$$

$$F(n) = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\, e^{-jn\omega t}\, dt \tag{2.6}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{2.7}$$

Koeficienti $F(n)$ so v splošnem kompleksni, tudi če je $f(t)$ realen. Imenujemo jih *kompleksni spekter* periodičnega signala $f(t)$.

Predstavitev kompleksnega spektra

$$F(n) = P(n) + jQ(n) \qquad \begin{array}{ll} P(n) & \text{realni spekter} \\ Q(n) & \text{imaginarni spekter} \end{array}$$

Kompleksni spekter $F(n)$ lahko izrazimo z realnimi Fourierjevimi koeficienti

$$F(n) = \frac{a_n - jb_n}{2}\,, \tag{2.8}$$

$$a_n = F(n) + \overline{F(n)}\,, \tag{2.9}$$

$$b_n = j(F(n) - \overline{F(n)})\,. \tag{2.10}$$

Pri kompleksnem spektru ločimo vrednost amplitude in faze

$$F(n) = |F(n)|e^{j\Theta(n)}\,.$$

Amplitudni spekter

$$|F(n)| = \sqrt{F(n)\,\overline{F(n)}} = \sqrt{P^2(n) + Q^2(n)} \tag{2.11}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2} \tag{2.12}$$

Fazni spekter

$$\Theta(n) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{Q(n)}{P(n)} & P(n) > 0 \\ \pm\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{Q(n)}{P(n)} & P(n) < 0 \end{cases} \tag{2.13}$$

$$= \begin{cases} -\operatorname{arctg}\dfrac{b_n}{a_n} & a_n > 0 \\ \pm\pi - \operatorname{arctg}\dfrac{b_n}{a_n} & a_n < 0 \end{cases} \tag{2.14}$$

Če je signal $f(t)$ realen, potem veljajo naslednje lastnosti:

1. $F(-n) = \overline{F(n)}$
2. $P(n) = P(-n)$,
3. $Q(n) = -Q(-n)$,
4. $|F(n)| = |F(-n)|$,
5. $\Theta(-n) = -\Theta(n)$.

Posebnosti pri lihih in sodih realnih signalih

Sodi signali $(f(-t) = f(t)) \quad \forall t$**:**

$$\begin{aligned} F(n) &= P(n) + jQ(n) \ , \\ P(n) = F(n) &= \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega t \, dt \ , \\ Q(n) &= 0 \ . \end{aligned} \tag{2.15}$$

Lihi signali $(f(-t) = -f(t)) \quad \forall t$**:**

$$\begin{aligned} F(n) &= P(n) + jQ(n) \ , \\ jQ(n) = F(n) &= -j\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin n\omega t \, dt \ , \\ P(n) &= 0 \ . \end{aligned} \tag{2.16}$$