4. Opisi in analiza sistemov vodenja

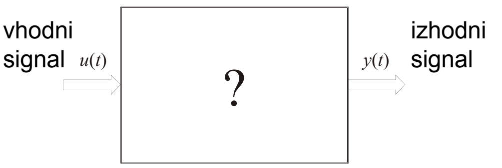
- Matematično modeliranje
- Simulacija
- Lastnosti dinamičnih sistemov
- Laplace-ova transformacija
- Blokovni diagrami
- Uvod v analizo sistemov v časovnem prostoru

4.1 Matematično modeliranje

- Zahtevnost načrtovanja vodenja
  - logično in sekvenčno vodenje
    - logične zveze med vhodnimi in izhodnimi signali
    - enostavno načrtovanje
  - zaprto-zančno vodenje oz. regulacija
    - zveza med vhodnimi in izhodnimi signali je bolj zapletena
    - bolj zahtevno načrtovanje
    - podprto z matematično analizo
- Sistemi vodenja so dinamični sistemi
  - v njih potekajo procesi
  - stanje se spreminja s časom
  - potrebujemo univerzalen opis tega spreminjanja

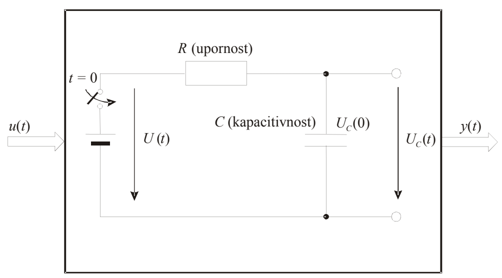
Matematični opis dinamičnega sistema

- Univerzalen opis spreminjanja stanja sistema



  - iščemo matematično relacijo med vhodom sistema $u(t)$ in izhodom sistema $y(t)$

Primeri matematičnega opisa - električno vezje RC



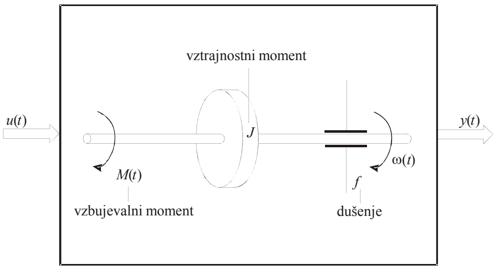
$$u(t) = U(t)$$
$$y(t) = U_C(t)$$
$$U_C(0) = y_0$$

Razmere v vezju opisuje enačba $\frac{dU_C(t)}{dt} = -\frac{1}{RC}U_C(t) + \frac{1}{RC}U(t)$

Če upoštevamo oznake za u in y ter vpeljemo $-1/RC = a$ in $1/RC = b$ $\boxed{\frac{dy(t)}{dt} = ay(t) + bu(t), \qquad y(0) = y_0}$

Za enoličen opis potrebujemo tudi začetno stanje

Primeri matematičnega opisa - mehanski vztrajnik



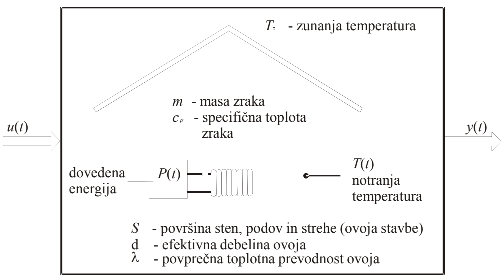
$$u(t) = M(t)$$
$$y(t) = \omega(t)$$
$$\omega(0) = y_0$$

Vrtenje opisuje enačba $$M(t) = J\frac{d\omega(t)}{dt} + f\omega(t)$$

Če upoštevamo oznake za u in y ter vpeljemo $-f/J = a$ in $1/J = b$

$$\boxed{\frac{dy(t)}{dt} = ay(t) + bu(t), \qquad y(0) = y_0}$$

Primeri matematičnega opisa - ogrevalni sistem



$$u(t) = P(t)$$
$$T_z(t) = T_z = konst.$$
$$y(t) = T(t) - T_z$$
$$T(0) - T_z = y_0$$

Prehajanje toplote opisuje enačba $$P(t) = mc_p\frac{dT(t)}{dt} + \frac{\lambda S}{d}(T(t) - T_z)$$

Če upoštevamo oznake za u in y, $T_z = konst.$, ter vpeljemo $-\lambda S/mc_p d = a$ in $1/mc_p = b$

$$\boxed{\frac{dy(t)}{dt} = ay(t) + bu(t), \qquad y(0) = y_0}$$

Matematični model sistema

- Enak matematični opis za vse tri primere
  - enačba, ki povezuje odvod vrednosti izhodne spremenljivke z njeno trenutno vrednostjo in vrednostjo vhodne spremenljivke
- Diferencialna enačba
  - enačba, ki povezuje vrednosti odvisnih spremenljivk z njihovimi prvimi ali višjimi odvodi
  - splošen matematični opis dinamičnega sistema

  ─► matematični model
- Matematično modeliranje
  - izpeljava matematičnega modela
  - različne vrste modelov
  - diferencialna enačba je ena od možnih oblik modela

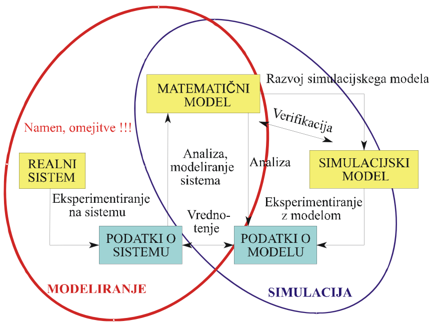
Reševanje diferencialne enačbe

- Rešitev
  - funkcije, ki opisujejo potek odvisnih spremenljivk, in za katere enačba velja
  - obravnavani primeri: rešitev je časovni potek $y(t)$ pri danih koeficientih a in b, začetnem stanju y_0 in danem časovnem poteku $u(t)$
- Način reševanja
  - v preprostih primerih (npr. pri linearnih sistemih) lahko rešitev izračunamo analitično
  - v drugih primerih lahko določimo le numerični približek s pomočjo računalnika

    ─► simulacija

4.2 Simulacija

- V večini realnih primerov
  - matematičnih modelov ne poskušamo reševati analitično, temveč jih rešujemo numerično
- Povezava modeliranja in simulacije
  - modeliranje
    - konstrukcija modelov
    - obravnava relacij med procesom in njegovimi modeli
  - simulacija
    - eksperimentiranje z modeli
    - izračun časovnih odzivov sistema, ki jih vrednotimo glede na realni sistem



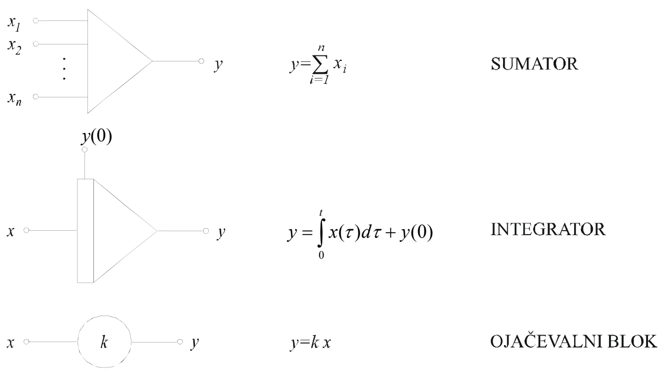
Pomen in možnosti simulacije

- Možnost eksperimentiranja, ne da bi se morali pri tem ukvarjati z realnim objektom
  - boljše razumevanje delovanja
  - napovedovanje obnašanja
  - preizkušanje različnih možnosti pri načrtovanju sistemov
  - učenje in vadba upravljanja s sistemom
- Računalniška simulacija
  - tek specialnega programa
    - rezultat je časovni odziv modela, ki opisuje obnašanje modeliranega procesa
  - simulacijska programska orodja
    - specializirani programi za modeliranje in simulacijo
    - večinoma grafično usmerjena

Simulacijska shema

- Posebna grafična predstavitev
  - osnova zvezne simulacije
    - signali se v večjem delu opazovanega časa zvezno spreminjajo
    - spremenljivke stanj in njihovi odvodi so zvezni preko celotnega simulacijskega teka
- Gradniki so bloki
  - predstavljajo določene funkcije v simulacijski shemi
  - grafična predstavitev blokov se razlikuje med posameznimi simulacijskimi programskimi orodji
  - uvedli bomo univerzalne bloke simulacijskih shem, ki so neodvisni od uporabljenega simulacijskega orodja

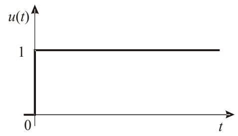
Osnovni simulacijski bloki



Najpomembnejši blok v simulacijski shemi – integrator

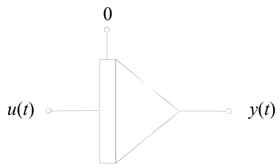
Delovanje integratorja

- Odziv na stopničast vhodni signal



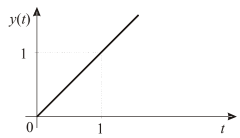
$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$ enotina stopnica

če je $y(0) = 0$



dobimo

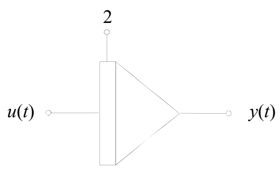
$$y(t) = \int_0^t 1 \cdot d\tau + 0 = \tau \Big|_0^t = t, \quad t \geq 0$$



Delovanje integratorja

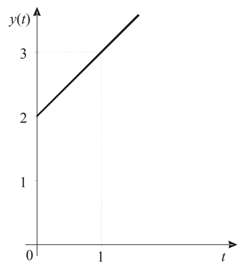
- Odziv na stopničast vhodni signal, drugačno začetno stanje

če je $y(0) = 2$



dobimo

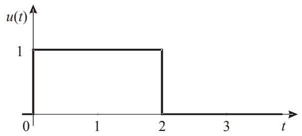
$$y(t) = \int_0^t 1 \cdot d\tau + 2 = \tau \Big|_0^t + 2 = t + 2, \quad t \geq 0$$



- Vidimo, da je vrednosti izhoda integratorja odvisna
  - od vrednosti vhoda
  - od vrednosti začetnega stanja, v kateri se odraža preteklo dogajanje

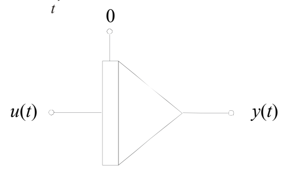
Delovanje integratorja

- Odziv na pulzni vhodni signal



$$u(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & 0\le t<2\\ 0, & t\ge 0\end{cases}$$

če je $y(0)=0$

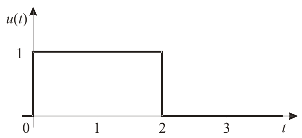


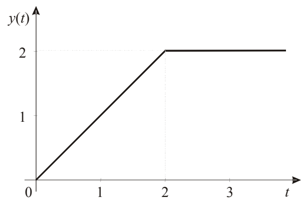
dobimo

$$y(t)=\int_0^t u(\tau)d\tau+y(0)=\begin{cases}\int_0^t 1\cdot d\tau, & 0\le t<2\\ \int_0^2 1\cdot d\tau+\int_2^t 0\cdot d\tau & t\ge 2\end{cases}=\begin{cases}t, & 0\le t<2\\ 2, & t\ge 2\end{cases}$$

Delovanje integratorja

- Odziv na pulzni vhodni signal

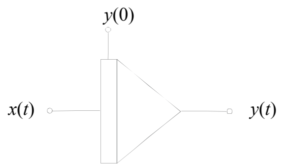




- Vidimo, da lahko integrator daje od nič različen signal na izhodu tudi v trenutkih, ko je vhodni signal enak nič
  - posledica vrednosti vhodnega signala, preden je ta postal enak nič
  - integrator pomni preteklo dogajanje

Vloga integratorja v simulacijski shemi

- Pri



  velja $y(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau + y(0)$

  če enačbo odvajamo, dobimo $\frac{dy(t)}{dt} = x(t)$

- Vhod integratorja je enak odvodu signala, ki se nahaja na njegovem izhodu
  - če s pomočjo sumatorja in ojačevalnega bloka povežemo izhod in vhod integratorja, lahko na ta način predstavimo diferencialno enačbo v obliki simulacijske sheme

Primer simulacijske sheme

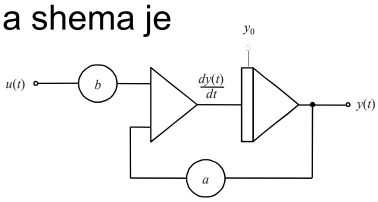
- Diferencialna enačba iz uvodnih primerov

$$\frac{dy(t)}{dt} = ay(t) + bu(t), \qquad y(0) = y_0$$

- Glede na zvezo med vhodom in izhodom integratorja moramo zagotoviti

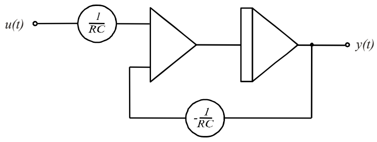
$$x(t) = ay(t) + bu(t)$$

- Ustrezna shema je



Simulacija RC-vezja

- Simulacijska shema

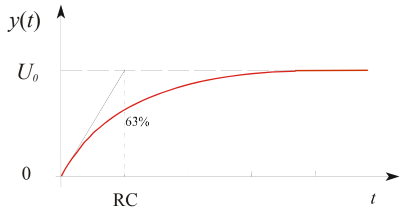


predpostavimo začetno stanje $y(0)=0$

- Odziv na določen vhodni signal

$$u(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ U_0, & t\geq 0\end{cases}$$

stopnica z amplitudo U_0



Simulacija diferencialne enačbe

- Postopek
  1. preuredimo enačbo tako, da ostane na levi najvišji odvod, vse ostalo prenesemo na desno
  2. narišemo zaporedno vezavo n integratorjev, če je n red najvišjega odvoda v enačbi
  3. z upoštevanjem izhodov vmesnih integratorjev kot odvodov nižjega reda sestavimo izraz na desni strani enačbe in izhod tega izraza priključimo na prvi integrator
- Indirektna metoda za simulacijsko reševanje diferencialne enačbe
  - metoda je uporabna, če je možno izraziti najvišji odvod
  - ter če v enačbi ne nastopajo odvodi vhodnega signala

Primer simulacije diferencialne enačbe

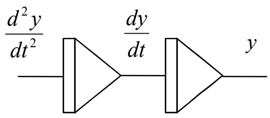
Enačba

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+a_1\frac{dy(t)}{dt}+a_0y(t)=b_0u(t)$$

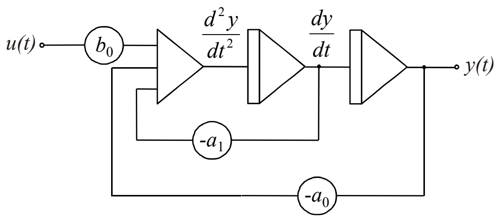
1. korak

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}=-a_1\frac{dy(t)}{dt}-a_0y(t)+b_0u(t)$$

2. korak



3. korak



Uporaba osnovnih simulacijskih blokov

- Lahko zgradimo enostavne simulacijske sheme
  - simulacija sistemov, ki so modelirani v obliki diferencialnih enačb
- Izračun signalov v shemi
  - numerične integracijske metode
    - posebni računski algoritmi, ki jih tu podrobneje ne obravnavamo
- Simulacijske sheme lahko uporabimo kot osnovo za simulacijo s programskimi orodji, npr. Simulink

4.3 Lastnosti dinamičnih sistemov

- Mnoge lastnosti dinamičnih sistemov lahko določimo iz zapisa enačbe sistema, ne da bi poznali njeno rešitev
- Obravnavali bomo
  - Linearnost: medsebojna povezanost spremenljivk; zakon o natovarjanju ali superpoziciji
  - Časovno nespremenljivost – spremenljivost: odvisnost parametrov od časa
  - Zveznost: odvijanje procesa v obliki neprekinjenih tokov
  - Stabilnost: omejenost izhodnih signalov pri omejenih vhodnih signalih

23

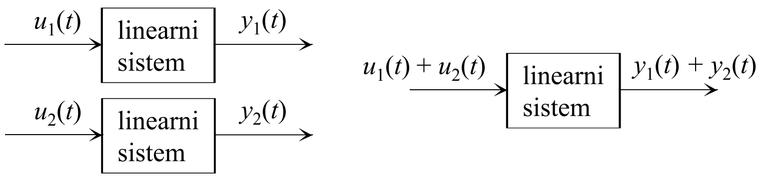
Linearnost

- Velja, če so zveze med vh. in izh. spremenljivkami ter njihovimi odvodi podane z linearnimi izrazi
  - npr. $y(t) = a_1 u(t) + a_2$ ali $\frac{dy(t)}{dt} = a_1 y(t) + a_2 u(t)$
- Sistemi, opisani s takšnimi enačbami, so linearni sistemi
- Za njih velja
  - aditivnost
  - homogenost

zakon natovarjanja ali superpozicije

Lastnosti linearnih sistemov

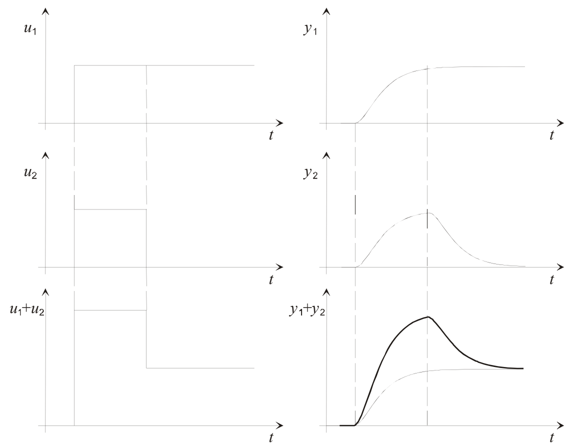
- Aditivnost
  - odziv na vsoto signalov je vsota odzivov na posamezen signal



- Homogenost
  - če s konstanto pomnožimo vhodni signal, dobimo z isto konstanto pomnožen prvotni odziv

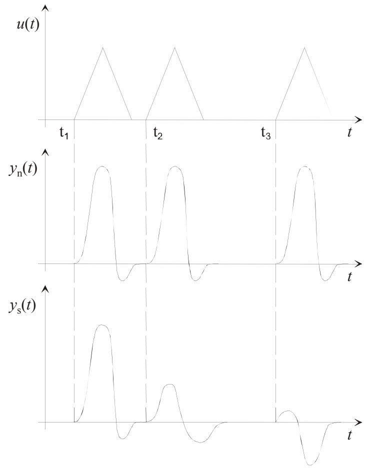
Lastnosti linearnih sistemov

- Zakon natovarjanja ali superpozicije



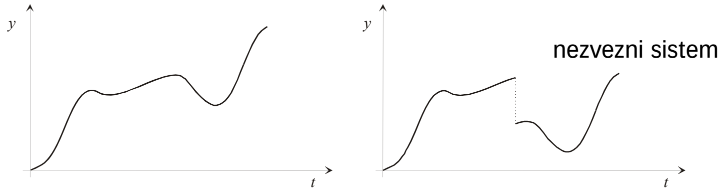
Časovna nespremenljivost in spremenljivost

- Sistem je časovno nespremenljiv
  - če je oblika izhodov neodvisna od trenutka nastopa vhodov
- Sistem je časovno spremenljiv
  - če je oblika izhodov odvisna od trenutka nastopa vhodov
  - časovno spremenljive sisteme opisujejo diferencialne enačbe s spremenljivimi parametri



Zveznost

- Pri zveznih procesih masa in/ali energija prehajata skozi dele procesa v neprekinjenih tokovih
  - primeri: parni kotli, toplotni izmenjevalniki, pretočni reaktorji …



Stabilnost

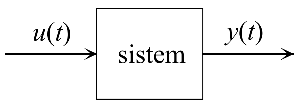
- Sistem je stabilen, če na poljubne omejene vhodne signale reagira z omejenimi izhodnimi signali
  - omejeni vhodni signali:
    - stopničasta funkcija, pravokotni impulz, sinusoida ipd.
  - neomejeni vhodni signali:
    - linearno naraščajoča funkcija, eksponentno naraščajoča f.
- Mejno stabilen sistem se na nekatere omejene vhodne signale odzove z neomejenim odzivom
  - primer: integrator in stopničast vhodni signal
- Nestabilen je sistem, ki na vsak omejen vhodni signal reagira z odzivom, ki kaže tendenco naraščanja prek vseh meja

4.4 Laplace-ova transformacija

- Matematično orodje, primerno za reševanje linearnih diferencialnih enačb
  - velik pomen pri analizi in načrtovanju dinamičnih sistemov
- Omogoča preslikavo časovnih funkcij
  - funkcije kot sinusoida, eksponentna funkcija ipd. postanejo racionalne funkcije (kvocient polinomov) nove spremenljivke s
- Omogoča predstavitev dinamičnega sistema s prenosno funkcijo
  - prevladujoča predstavitev linearnih sistemov v teoriji vodenja

Predstavitev sistema z diferencialno enačbo

- Predstavitev linearnega, časovno nespremenljivega zveznega sistema z enim vhodom in enim izhodom z diferencialno enačbo
  - vhodno-izhodni zapis sistema



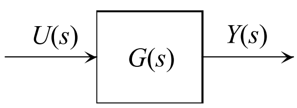
$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\ldots+a_1y^{(1)}(t)+a_0y(t)=b_m u^{(m)}(t)+b_{m-1}u^{(m-1)}(t)+\ldots+b_1u^{(1)}(t)+b_0u(t)$$

n ... red sistema
$n>=m$ (realizabilni sistem)

$y^{(n)}(t)$ označuje n-ti odvod, $y^{(n)}(t)=\dfrac{d^n y(t)}{dt^n}$

Laplace-ova transformacija in prenosna funkcija

- Predstavitev linearnega, časovno nespremenljivega zveznega sistema z enim vhodom in enim izhodom s prenosno funkcijo
  - diferencialna enačba in prenosna funkcija sta povezani preko Laplace-ove transformacije



$$G(s)=\frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

Laplace-ova transformacija

- Laplace-ova transformacija časovni funkciji $f(t)$ priredi novo funkcijo $F(s)$, ki jo imenujemo Laplace-ov transform

$$\mathcal{L}: \quad f(t) \quad \mapsto \quad F(s)$$

  - transformacija je definirana le za pozitivni del časovne osi, zato privzamemo $f(t) = 0,\ t < 0$
- Primer:

$$f(t) = e^{-at}, \quad t \geq 0$$

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s+a}$$

Lastnosti Laplace-ove transformacije

1. Množenje s konstanto

$$\mathcal{L}[kf(t)] = kF(s), \qquad \text{če} \quad \mathcal{L}[f(t)] = F(s)$$

2. Vsota in razlika

$$\mathcal{L}[f_1(t) \pm f_2(t)] = F_1(s) \pm F_2(s)$$

če privzamemo

$$\mathcal{L}[f_1(t)] = F_1(s) \quad \text{in} \quad \mathcal{L}[f_2(t)] = F_2(s)$$

Lastnosti 1 in 2 pomenita, da je Laplace-ova transformacija linearna preslikava

Lastnosti Laplace-ove transformacije

3. Odvajanje

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0^+)$$

če privzamemo $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$
in $f(0^+)$ pomeni vrednost, proti kateri limitira f, če se točki 0 bližamo z desne (npr. pri enotini stopnici je $f(0^+) = 1$)

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0^+) - s^{n-2} f^{(1)}(0^+) - \ldots - f^{(n-1)}(0^+)$$

Lastnosti Laplace-ove transformacije

4. Integriranje

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{F(s)}{s}$$

če privzamemo $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$

Operaciji diferenciranja in integriranja se pri Laplace-ovi transformaciji preslikata v množenje oz. deljenje s spremenljivko s

Preslikava diferencialne enačbe

- Zaradi lastnosti Laplace-ove transformacije pri odvajanju lahko prevedemo diferencialno enačbo v algebrajsko
- Primer: $\dfrac{dy(t)}{dt} = ay(t) + bu(t), \qquad y(0) = 0$

  po transformaciji $\mathcal{L}\left[\dfrac{dy(t)}{dt}\right] = \mathcal{L}\left[ay(t) + bu(t)\right]$

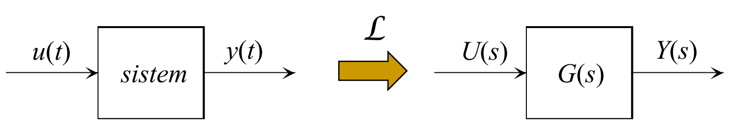
  $$sY(s) = aY(s) + bU(s)$$

  lahko izrazimo $Y(s) = \dfrac{b}{s-a}U(s)$

  če poznamo $U(s)$, lahko izračunamo $Y(s)$

Prenosna funkcija

- Vzemimo linearni, časovno nespremenljivi zvezni sistem z vhodom $u(t)$ in izhodom $y(t)$



- Definicija:

  Prenosna funkcija linearnega, časovno nespremenljivega sistema je definirana kot razmerje Laplace-ovega transforma izhodnega signala in Laplace-ovega transforma vhodnega signala ob predpostavki, da so začetna stanja sistema enaka nič.

Prenosna funkcija

- Prenosna funkcija in diferencialna enačba sta dve različni obliki zapisa matematičnega modela sistema

$$u(t) \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{sistem}\\ \text{(dif. en.)}\end{array}} \longrightarrow y(t)$$

$$\begin{aligned} &y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = \\ &b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1}u^{(m-1)}(t) + \ldots + b_1 u^{(1)}(t) + b_0 u(t) \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}[u(t)] = U(s) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow \mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$$

$$\begin{aligned} &s^n Y(s) + a_{n-1}s^{n-1}Y(s) + \ldots + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) = \\ &b_m s^m U(s) + b_{m-1}s^{m-1}U(s) + \ldots + b_1 s U(s) + b_0 U(s) \end{aligned}$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_0}$$

Prenosna funkcija

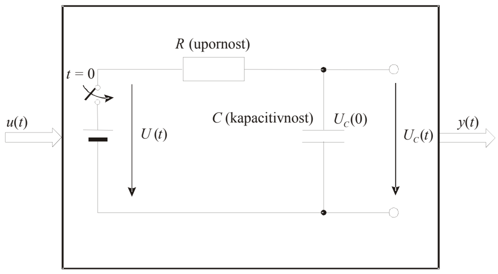
$$U(s) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow Y(s) \qquad \frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_0}$$

- Prenosna funkcija je model sistema in izraža povezave med vhodom in izhodom

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_0} U(s)$$

- Prenosna funkcija je lastnost sistema in je neodvisna od vhoda ali začetnih stanj
- Enote so odvisne od enot vhodnega in izhodnega signala

Primer – električno vezje RC



$$u(t) = U(t)$$
$$y(t) = U_C(t)$$
$$U_C(0) = y_0$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\frac{1}{RC}y(t) + \frac{1}{RC}u(t)$$
$$RC\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t) \quad \Big/ \mathcal{L}$$
$$RCsY(s) + Y(s) = U(s)$$
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{RC\cdot s + 1}$$

Značilni sistemi in njihove prenosne funkcije

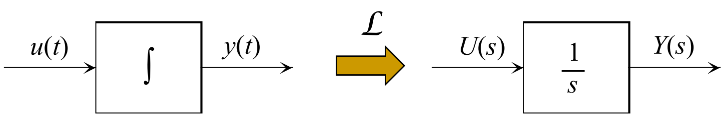
1. Integrator

$$y(t) = \int_0^t u(\tau)d\tau$$

pri določanju prenosne funkcije predpostavimo začetni pogoj 0

$$\mathcal{L}[y(t)] = \mathcal{L}\left[\int_0^t u(\tau)d\tau\right]$$
$$Y(s) = \frac{1}{s}U(s)$$
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s}$$

prenosna funkcija integratorja



Značilni sistemi in njihove prenosne funkcije

2. Diferenciator

$$y(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

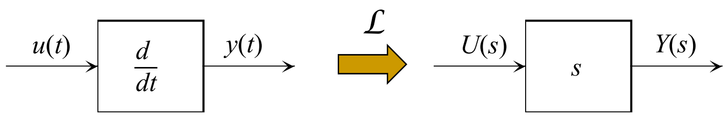
$$\mathcal{L}[y(t)] = \mathcal{L}\left[\frac{du(t)}{dt}\right]$$

$$Y(s) = sU(s) - u(0^+)$$

predpostavimo začetni pogoj $u(0^+) = 0$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = s$$

prenosna funkcija diferenciatorja



Značilni sistemi in njihove prenosne funkcije

3. Sistem 1. reda

$$T\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Ku(t) \quad / \mathcal{L}$$

$$TsY(s) + Y(s) = KU(s)$$

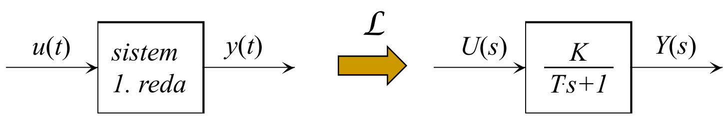
predpostavimo začetni pogoj $y(0^+) = 0$

$$(Ts+1)Y(s) = KU(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{T \cdot s + 1}$$

prenosna funkcija sistema 1. reda

K … ojačenje sistema
T … časovna konstanta sistema



Značilni sistemi in njihove prenosne funkcije

4. Sistem 2. reda

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+2\varsigma\omega_n\frac{dy(t)}{dt}+\omega_n{}^2y(t)=\omega_n{}^2u(t) \quad \Big/\ \mathcal{L}$$

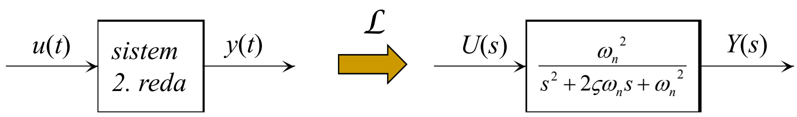
$$s^2Y(s)+2\varsigma\omega_n sY(s)+\omega_n{}^2Y(s)=\omega_n{}^2U(s)$$

$$\left(s^2+2\varsigma\omega_n s+\omega_n{}^2\right)Y(s)=\omega_n{}^2U(s)$$

predpostavimo začetni pogoj
$y(0^+) = 0$ in $y^{(1)}(0^+) = y'(0^+) = 0$

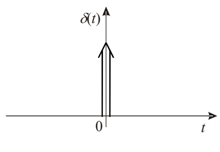
$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{\omega_n{}^2}{s^2+2\varsigma\omega_n s+\omega_n{}^2}$$

prenosna funkcija sistema 2. reda
ω_n … lastna frekvenca nedušenega sistema
ζ … dušilni koeficient



Značilni signali in njihovi transformi

1. enotin impulz $\delta(t)$ (tudi δ- impulz)

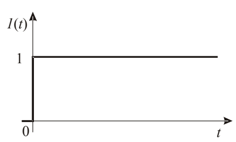


$$\delta(t)=\begin{cases}+\infty, & t=0\\ 0, & t\neq 0\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1$$

$$\mathcal{L}[\delta(t)]=1$$

2. enotina stopnica $1(t)$

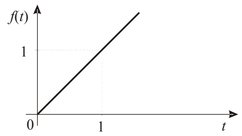


$$1(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t\geq 0\end{cases}$$

$$\mathcal{L}[1(t)]=\frac{1}{s}$$

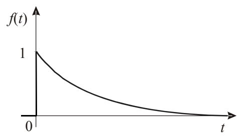
Značilni signali in njihovi transformi

3. enotina rampa



$$f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ t, & t\ge 0\end{cases} \qquad \mathcal{L}\left[f(t)\right]=\frac{1}{s^2}$$

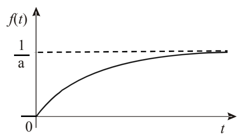
4. eksponentna funkcija



$$f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ e^{-at}, & t\ge 0\end{cases} \qquad \mathcal{L}\left[f(t)\right]=\frac{1}{s+a}$$

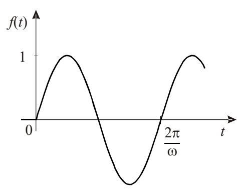
Značilni signali in njihovi transformi

5. obrnjena eksponentna funkcija



$$f(t)=\frac{1}{a}(1-e^{-at}),\quad t\ge 0 \qquad \mathcal{L}\left[f(t)\right]=\frac{1}{s(s+a)}$$

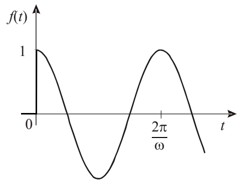
6. sinusna funkcija



$$f(t)=\sin(\omega t),\quad t\ge 0 \qquad \mathcal{L}\left[f(t)\right]=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

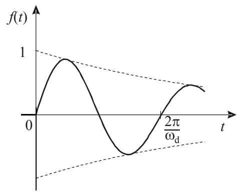
Značilni signali in njihovi transformi

7. kosinusna funkcija



$$f(t)=\cos(\omega t),\quad t\geq 0 \qquad \mathcal{L}\left[f(t)\right]=\frac{s}{s^2+\omega^2}$$

8. dušena sinusna funkcija



$$f(t)=\frac{1}{\omega_d}e^{-\varsigma\omega t}\sin(\omega_d t),\quad t\geq 0$$

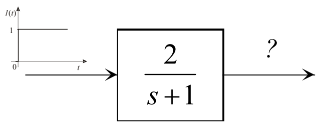
$$\omega_d=\omega\sqrt{1-\varsigma^2}$$

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right]=\frac{1}{s^2+2\varsigma\omega s+\omega^2}$$

Računanje odziva sistema

- Sistem 1. reda s prenosno funkcijo $G(s)=\dfrac{2}{s+1}$ vzbujamo z enotino stopnico

$$u(t)=1(t)\quad\Rightarrow\quad U(s)=\frac{1}{s}$$



$$Y(s)=G(s)\cdot U(s)=\frac{2}{s+1}\cdot\frac{1}{s}=\frac{2}{s(s+1)}$$

iz tabele transformov razberemo

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{a}(1-e^{-at})\right]=\frac{1}{s(s+a)}$$

izraz za Y(s) preuredimo in določimo y(t):

$$Y(s)=\frac{2}{s(s+1)}=2\cdot\frac{1}{s(s+1)}\quad\Rightarrow\quad y(t)=2(1-e^{-t})$$