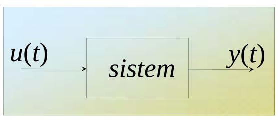
4.5 Blokovni diagrami

- Grafičen prikaz strukture sistema
  - z blokovnimi diagrami ponazorimo obnašanje sistema, ki je sestavljen iz več komponent oz. manjših sistemov
- Gradniki blokovnih diagramov
  - bloki
  - usmerjene povezave
  - sumacijske točke
  - razcepišča

Bloki

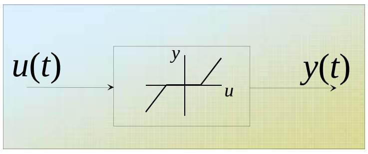
- Blok vsebuje simbol, ki ponazarja zvezo med njegovim vhodom in njegovim izhodom



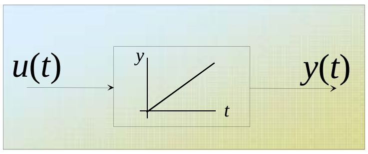
$$y(t) = f\{u(t), lastnosti\ sistema\}$$

  - v blok lahko narišemo karakteristiko bloka
    - npr. obliko nelinearnosti, obliko časovnega odziva na stopnico
  - pri linearnih sistemih je simbol bloka največkrat kar prenosna funkcija
    - izhod takšnega bloka dobimo, če vhod bloka pomnožimo s simbolom bloka

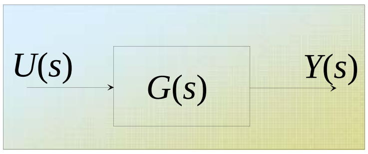
Bloki in pripadajoči simboli



mrtva cona



integrator

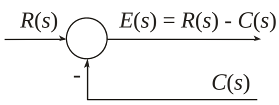


linearni sistem

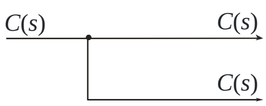
$$Y(s) = G(s) \cdot U(s)$$

Sumacijske točke in razcepišča

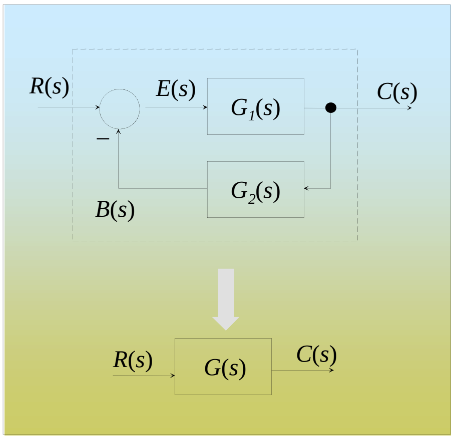
- Sumacijska točka
  - omogoča seštevanje ali odštevanje dveh ali več signalov
  - operacijo nakažemo z znakom + ali – (+ lahko izpustimo)



- Razcepišče
  - uporabimo, če signal vpliva na več blokov v diagramu



Preoblikovanje in poenostavljanje blokovnih diagramov

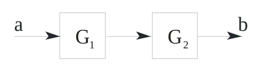
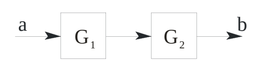
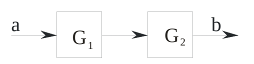
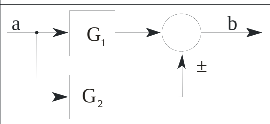
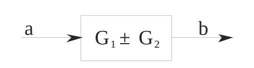
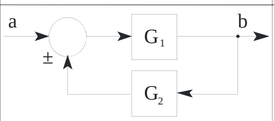
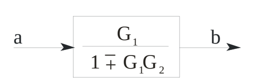


$$C(s) = G_1(s) \cdot E(s)$$
$$B(s) = G_2(s) \cdot C(s)$$
$$E(s) = R(s) - B(s) = R(s) - G_2(s)C(s)$$
$$C(s) = G_1(s) \cdot \big(R(s) - G_2(s)C(s)\big) =$$
$$= G_1(s)R(s) - G_1(s)G_2(s)C(s)$$
$$\big(1 + G_1(s)G_2(s)\big)C(s) = G_1(s)R(s)$$

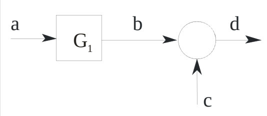
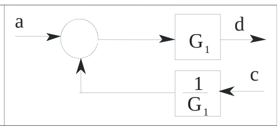
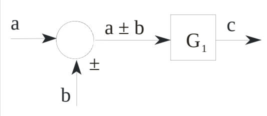
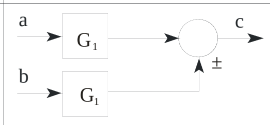
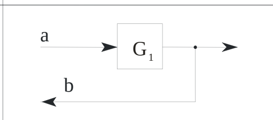
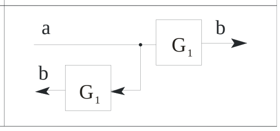
$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}$$

Za manj računanja uporabljamo nekatera pravila preoblikovanja blokovnih diagramov - pravila algebre blokovnih shem

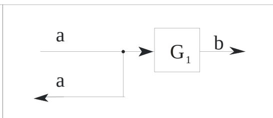
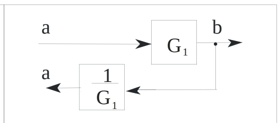
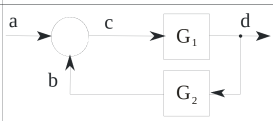
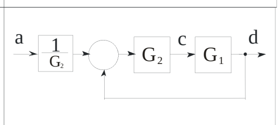
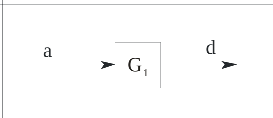
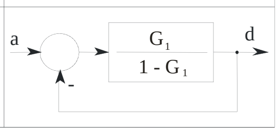
Pravila algebre blokovnih shem

1. Zamenjava vrstnega reda		
2. Redukcija zaporedne vezave		
3. Redukcija vzporedne vezave		
4. Redukcija zanke		

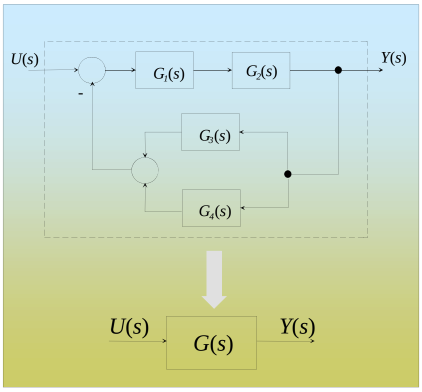
Pravila algebre blokovnih shem

5. Premik S pred blok		
6. Premik S za blok		
7. Premik R pred blok		

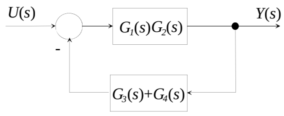
Pravila algebre blokovnih shem

8. Premik R za blok		
9. Odstranitev bloka iz povratne zanke		
10. Razširitev bloka v zanko		

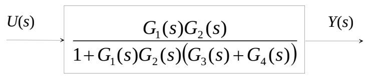
Primer poenostavljanja



1. korak:

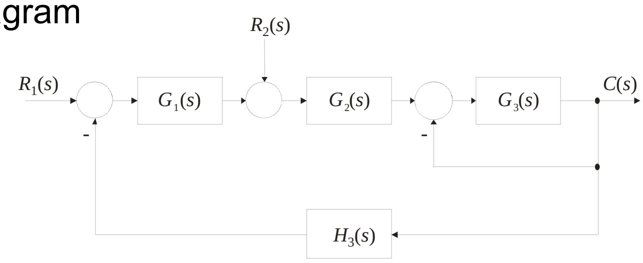


2. korak:

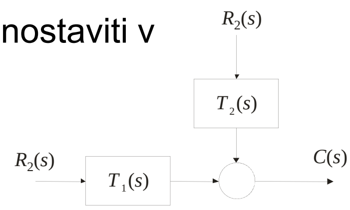


Primer poenostavljanja

Diagram

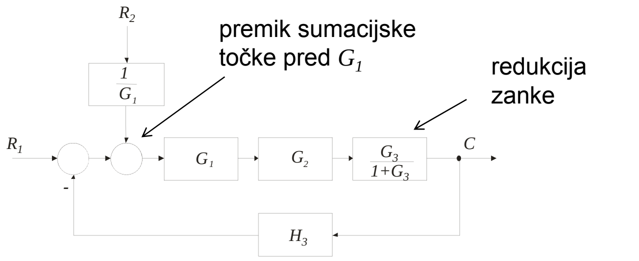


želimo poenostaviti v

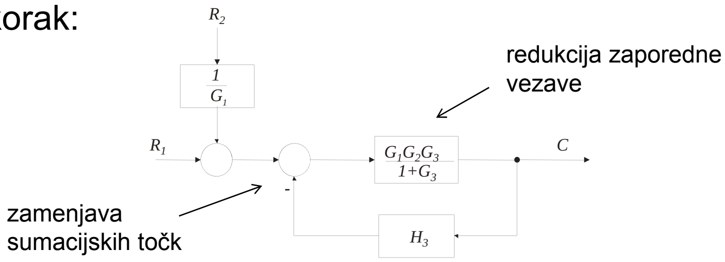


Primer poenostavljanja - reševanje po korakih

1. korak:

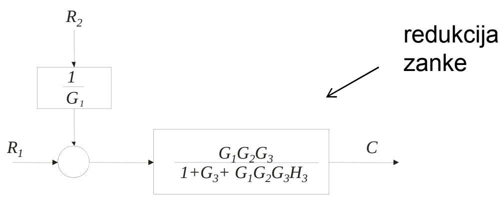


2. korak:

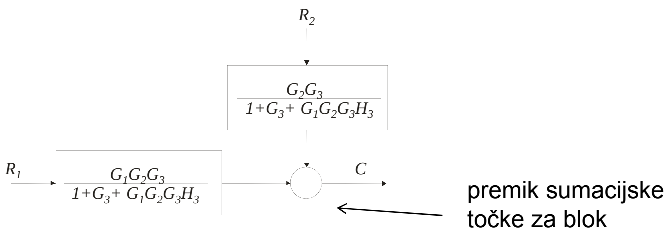


Primer poenostavljanja - reševanje po korakih

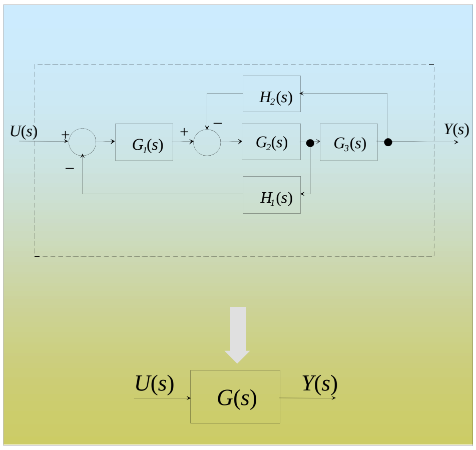
3. korak:



4. korak:

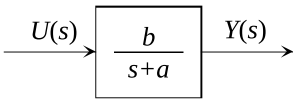


Primer poenostavljanja

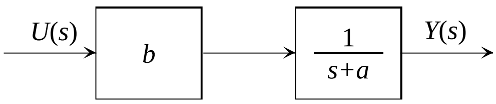


$$G(s)=\frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)}{1+G_2(s)G_3(s)H_2(s)+G_1(s)G_2(s)H_1(s)}$$

Primer razgrajevanja sheme

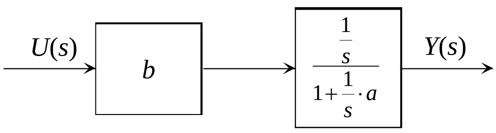


1. korak:



blok razdelimo na dva zaporedna bloka

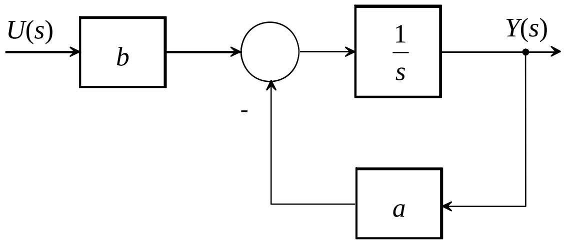
2. korak



preoblikujemo zapis v drugem bloku

Primer razgrajevanja sheme

3. korak:



pravilo za redukcijo zanke uporabimo v obratni smeri

Dobljena blokovna shema je ekvivalentna simulacijski shemi za sistem 1. reda

Postopek risanja blokovnih diagramov

- Namesto izpeljave matematičnega modela z diferencialnimi enačbami lahko narišemo model sistema v obliki blokovne sheme
  - izhajamo iz fizikalnih zakonov in pripadajočih enačb
  - izberemo vhode in izhode sistema – kaj so vplivne veličine in kaj želimo opazovati
  - enačbe, ki opisujejo shranjevalnike mase ali energije preoblikujemo – na desno stran postavimo integriranje, na levo pa veličine z lastnostjo »vztrajnosti«

$$u_L = L\frac{di_L}{dt} \quad \rightarrow \quad i_L = \frac{1}{L}\int_0^t u_L \, d\tau$$

  - shranjevalnike predstavimo z integratorji, ostale enačbe prilagodimo, da jih lahko izrazimo z osnovnimi bloki

Primer modeliranja RC-vezja

- Osnovne enačbe

$$u(t) = u_R(t) + u_C(t)$$
$$u_R(t) = Ri(t)$$
$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$
$$q(t) = Cu_C(t) \quad \Rightarrow \quad i(t) = C\frac{du_C(t)}{dt}$$

- Določitev vhoda in izhoda

vhod $u(t) \quad \rightarrow \quad U(s)$

izhod $u_C(t) \rightarrow \quad U_C(s)$

Primer modeliranja RC-vezja

- Shranjevalnik - kondenzator

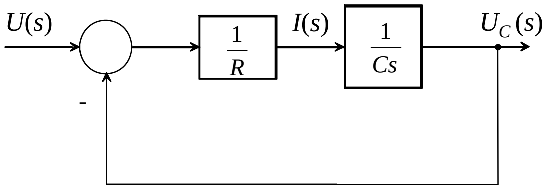
$$i(t) = C\frac{du_C(t)}{dt} \quad \rightarrow \quad u_c(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau$$
$$i(t) = \frac{u(t) - u_C(t)}{R}$$

- Po Laplace-ovi transformaciji

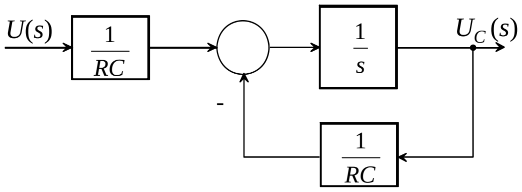
$$U_C(s) = \frac{1}{Cs} \cdot I(s)$$
$$I(s) = \frac{U(s) - U_C(s)}{R}$$

Primer modeliranja RC-vezja

- Na podlagi enačb narišemo shemo

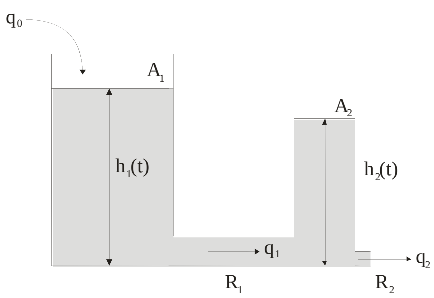


- Shemo lahko tudi preoblikujemo v

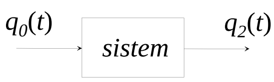


Primer modeliranja hidravličnega sistema

- Sistem z dvema posodama



zanima nas zveza med q_2 in q_0 (izhodnim in vhodnim pretokom)



Primer modeliranja hidravličnega sistema

- Upoštevamo ravnotežje volumna

$$q_{vh} - q_{izh} = \frac{dV(t)}{dt} = A\frac{dh}{dt}$$

zapišemo ravnotežni enačbi za obe posodi, izrazimo nivo $h(t)$

$$h_1(t) = \frac{1}{A_1}\int_0^t (q_0 - q_1)d\tau$$

$$h_2(t) = \frac{1}{A_2}\int_0^t (q_1 - q_2)d\tau$$

upoštevamo še hidravlično upornost

$$q_1(t) = \frac{h_1(t) - h_2(t)}{R_1}, \qquad q_2(t) = \frac{h_2(t)}{R_2}$$

Primer modeliranja hidravličnega sistema

- Na enačbah izvedemo Laplace-ovo transformacijo in dobimo

$$H_1(s) = \frac{1}{A_1 s}\cdot\left(Q_0(s) - Q_1(s)\right)$$

$$H_2(s) = \frac{1}{A_2 s}\cdot\left(Q_1(s) - Q_2(s)\right)$$

$$Q_1(s) = \frac{H_1(s) - H_2(s)}{R_1}$$

$$Q_2(s) = \frac{H_2(s)}{R_2}$$

na podlagi teh enačb lahko narišemo blokovni diagram

Primer modeliranja hidravličnega sistema

- Blokovni diagram

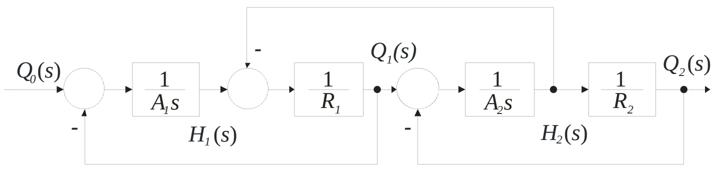
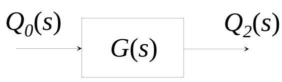
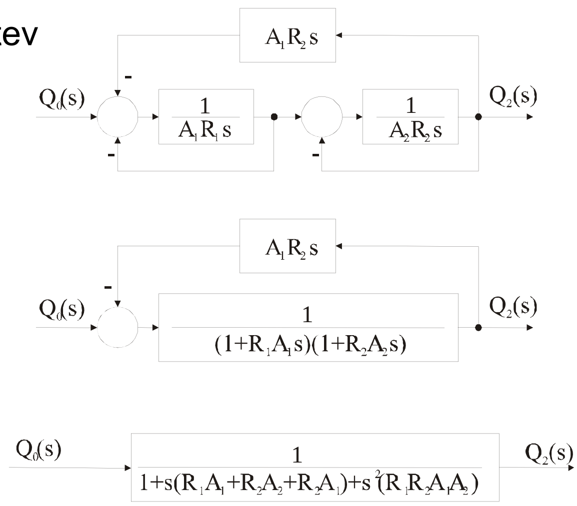


diagram želimo poenostaviti do oblike



Primer modeliranja hidravličnega sistema

- Poenostavitev



4.6 Uvod v analizo sistemov v časovnem prostoru

- Pri analizi regulacijskih sistemov nas pogosto zanima, kakšni so časovni poteki določenih signalov
- Analiziramo
  - prehodni pojav, ustaljeno stanje
  - lastni odziv, vsiljeni odziv
  - odzive na značilne signale
    - odziv na stopnico
    - odziv na impulz, …
- Na lastnosti odziva lahko sklepamo že iz oblike prenosne funkcije
  - tip sistema, red sistema
  - ojačenje, poli, ničle

Odziv na stopnico

- Primer sistema z dvema posodama
  - predpostavimo takšne parametre, da je

$$G(s)=\frac{1}{0{,}5s^2+1{,}5s+1}$$

  - predpostavimo še, da je $q_0 = 1\ \mathrm{m^3/s}$ za $t >= 0$
  - izračunajmo časovni potek izhodnega pretoka

$$Q_0(s)=\frac{1}{s}$$

$$Q_2(s)=G(s)\cdot Q_0(s)=\frac{1}{0{,}5s^2+1{,}5s+1}\cdot\frac{1}{s}=\frac{2}{s(s^2+3s+2)}$$

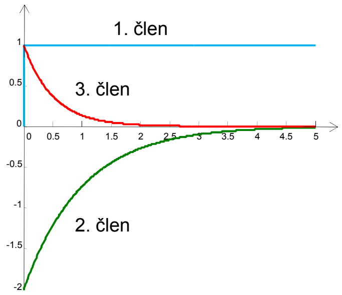
Odziv sistema z dvema posodama

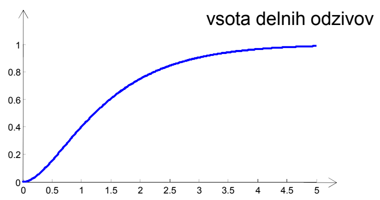
- transform lahko preoblikujemo v vsoto členov

$$Q_2(s) = \frac{2}{s(s^2+3s+2)} = \frac{2}{s(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+2}$$

- in določimo členom pripadajoče časovne funkcije

$$q_2(t) = 1 - 2e^{-t} + e^{-2t}, \qquad t \geq 0$$





Prehodni pojav in ustaljeno stanje

- Odziv sistema lahko razdelimo na dve komponenti

$$q_2(t) = q_t(t) + q_{ss}(t)$$

prehodni pojav (transient)

ustaljeno oz. stacionarno stanje (steady state)

- $q_t(t)$ je prehodni pojav od začetnega stanja do ustaljenega stanja; s časom izzveni
- $q_{ss}(t)$ je ustaljeno stanje, to je del odziva, ki ostane, ko prehodni pojav izzveni, velja:

$$q_{ss}(t) = \lim_{t \to \infty} q_2(t)$$

ni nujno da se časovni signal v ustaljenem stanju s časom ne spreminja

Ustaljeno stanje in Laplace-ova transformacija

- Teorem končne vrednosti
  - ena od lastnosti Laplace-ove transformacije

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

- Primer: odziv sistema z dvema posodama na stopnico

$$q_{ss} = \lim_{t\to\infty} q_2(t) = \lim_{s\to 0} sQ_2(s) = s\frac{2}{s(s+1)(s+2)} = \frac{2}{2} = 1$$

  - iz ustaljenega stanja pri odzivu na enotino stopnico lahko določimo tudi ojačenje sistema

Odziv na δ-impulz

- Primer sistema z dvema posodama

$$G(s) = \frac{1}{0{,}5s^2 + 1{,}5s + 1}$$

$$q_0 = \delta(t)$$

$$Q_0(s) = 1$$

$$Q_2(s) = G(s)\cdot Q_0(s) = \frac{1}{0{,}5s^2 + 1{,}5s + 1}\cdot 1 = \frac{2}{(s+1)(s+2)}$$

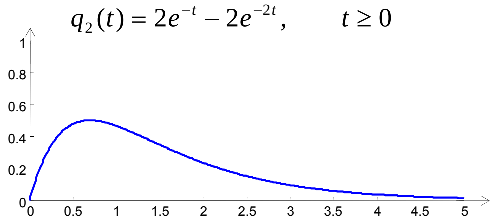
  - transform lahko preoblikujemo v vsoto členov

$$Q_2(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)} = \frac{2}{s+1} - \frac{2}{s+2}$$

Odziv na δ-impulz

- določimo členom pripadajoče časovne funkcije

$$q_2(t) = 2e^{-t} - 2e^{-2t}, \qquad t \geq 0$$

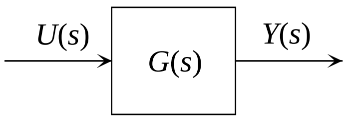


- Odziv na δ-impulz je odvisen samo od prenosne funkcije sistema
  - pravimo mu tudi naravni odziv sistema
  - členi tega odziva so odvisni od faktorjev, na katere je možno razstaviti imenovalec prenosne funkcije sistema
    - pomen polov

Ničle in poli prenosne funkcije

- Prenosna funkcija linearnega sistema
  - kvocient dveh polinomov spremenljivke s
  - polinoma lahko zapišemo v faktorizirani obliki

$$G(s) = \frac{K(s-z_1)(s-z_2)\ldots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_n)}$$



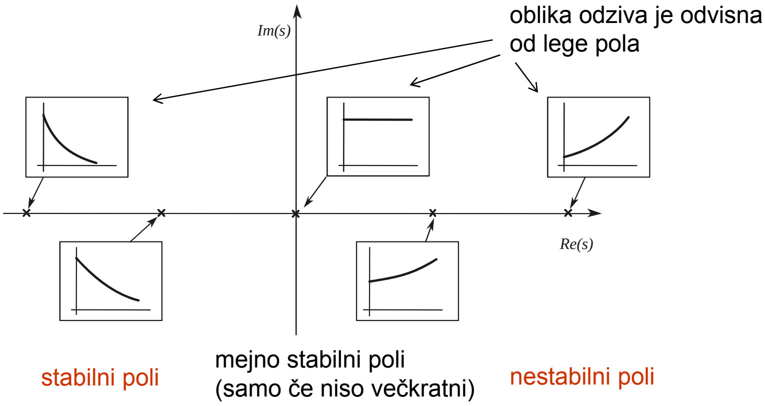
z_i … koreni polinoma v števcu
imenujemo jih ničle prenosne funkcije

p_i … koreni polinoma v imenovalcu
imenujemo jih poli prenosne funkcije

ničle in pole (v splošnem kompleksna števila) pogosto predstavimo z lego v kompleksni ravnini s

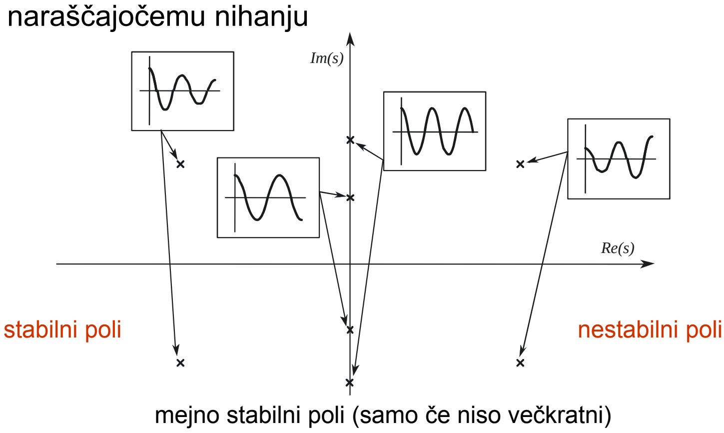
Poli na realni osi

- $G(s)$ preoblikujemo v vsoto
  - vsak tak pol v vsoti $G(s)$ prispeva člen $\frac{A}{s-p_i}$
  - v časovnem odzivu to ustreza členu $Ae^{p_i t}$



Konjugirano kompleksni poli

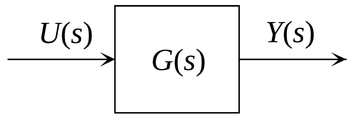
- $G(s)$ preoblikujemo v vsoto
  - vsak par takih polov v vsoti $G(s)$ prispeva člen $\frac{As+B}{s^2+2\varsigma\omega s+\omega^2}$
  - v časovnem odzivu to ustreza dušenemu, nedušenemu ali naraščajočemu nihanju



Ničle, poli in lastnosti sistema

1. **Red sistema**
   - najvišji odvod izhodne spremenljivke v diferencialni enačbi
   - stopnja polinoma v imenovalcu prenosne funkcije
   - število polov
   - število časovnih konstant

     n ... red sistema



2. **Število ničel sistema**
   - najvišji odvod vhodne spremenljivke v diferencialni enačbi
   - stopnja polinoma v števcu prenosne funkcije

     m... število ničel sistema
     n>=m (realizabilni sistem)

     n-m... relativni red sistema

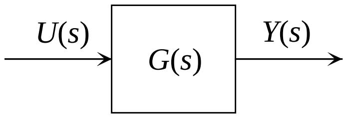
Ničle, poli in lastnosti sistema

3. **Stabilnost sistema**
   - stabilnost oz. nestabilnost linearnih sistemov je odvisna od lege polov sistema (in ni odvisna od lege ničel)
     - stabilni poli ležijo v levi polravnini
     - nestabilni poli ležijo v desni polravnini
     - poli na imaginarni osi
       - so mejno stabilni, če so enojni
       - so nestabilni, če so večkratni – ustrezajo faktorju s^n oz. $(s^2+\omega^2)^n$
   - sistem je stabilen, če so vsi realni deli polov negativni, oz. če vsi poli ležijo v levi s-polravnini
   - sistem z enojnimi poli na imaginarni osi je mejno stabilen
   - če se eden ali več polov nahaja na desni strani ravnine s (ali večkratni pol na imag. osi), je sistem nestabilen

Ničle, poli in lastnosti sistema

4. **Časovne konstante sistema τ_i**
   - so odvisne od realnega dela polov in določajo hitrost pripadajočega dela prehodnega pojava:

$$G(s) = \frac{K(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)}$$



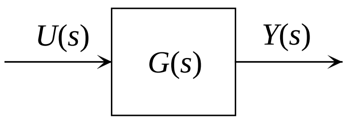
$$G(s) = \frac{K_s(c_1 s+1)(c_2 s+1)\dots(c_m s+1)}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)\dots(\tau_n s+1)}$$

$$\boxed{\tau_i = \frac{1}{-\operatorname{Re}(p_i)}}$$

Ničle, poli in lastnosti sistema

5. **Enosmerno ojačenje**
   - določa statično lastnost sistema in je definirano na naslednji način:

$$G(s) = \frac{K_s(c_1 s+1)(c_2 s+1)\dots(c_m s+1)}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)\dots(\tau_n s+1)}$$



$$\boxed{K_s = \left[\frac{\Delta y}{\Delta u}\right]_{\text{v ustaljenem stanju}}}$$

   - če je sistem stabilen, ga lahko določimo na naslednji način:

$$\boxed{K_s = \left[\frac{\Delta y}{\Delta u}\right]_{\text{v ustaljenem stanju}} = \lim_{s\to 0} G(s)}$$

Razvrstitev sistemov glede na njihovo naravo

- Glede na obliko prenosne funkcije lahko sklepamo na obliko časovnih odzivov sistema
- Več tipov
  - Proporcionalni sistemi
  - Integrirni sistemi
  - Diferencirni sistemi
  - Sistemi z mrtvim časom

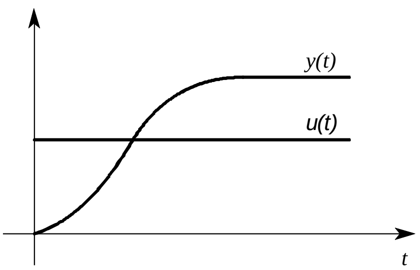
- Značilna oblika odziva na stopničasto vzbujanje

Proporcionalni sistemi

$$G_P(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0}$$

$$b_0 \neq 0 \quad in \quad a_0 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad K_s \neq 0$$

- Odziv na stopnico se ustali pri končni in od nič različni vrednosti, ki je proporcionalna $u(t)$



Integrirni sistemi

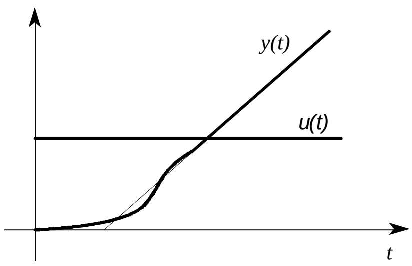
$$G_I(s) = \frac{1}{s^j}\,\frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_0}{s^f + a_{f-1}s^{f-1} + \cdots + a_0}$$

$b_0 \neq 0 \quad in \quad a_0 \neq 0$

$n = j + f \quad \cdots \quad red\ sistema$

$j \quad \cdots \quad vrsta\ sistema$

- Po koncu prehodnega pojava pri odzivu na stopnico izhod sistema 1. vrste narašča s strmino, ki je proporcionalna $u(t)$

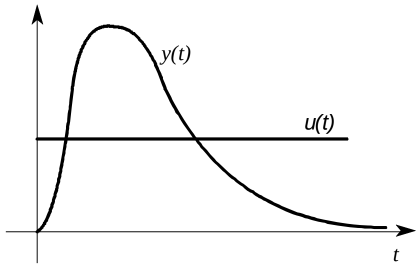


Diferencirni sistemi

$$G_D(s) = s^j\,\frac{b_g s^g + b_{g-1}s^{g-1} + \cdots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0}$$

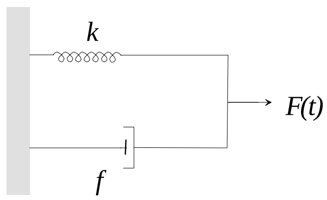
$b_0 \neq 0 \quad in \quad a_0 \neq 0$

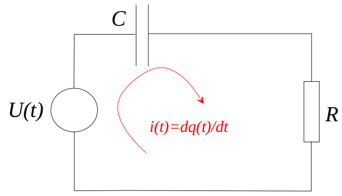
- Po koncu prehodnega pojava pri odzivu na stopnico se izhod ustali pri vrednosti 0



Proporcionalni sistem 1. reda

$$G_P(s) = \frac{K_s}{Ts+1}$$

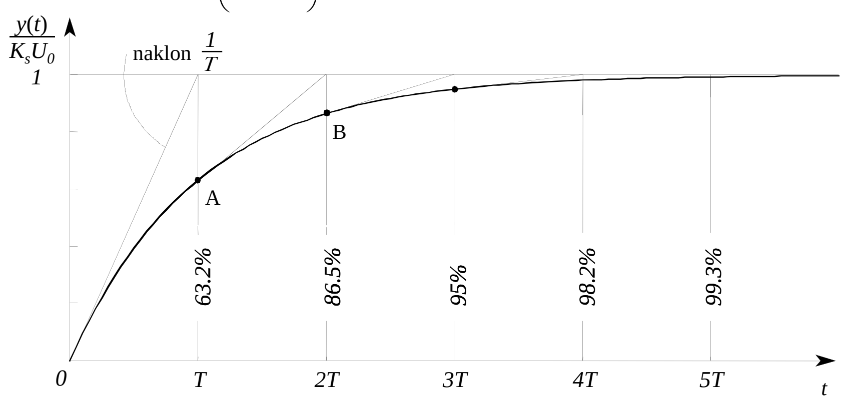




Odziv proporcionalnega sistema 1. reda na stopnico

$$u(t) = U_0 \cdot 1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ U_0 & t \geq 0 \end{cases}$$

$$y(t) = K_s U_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right), \qquad t \geq 0$$

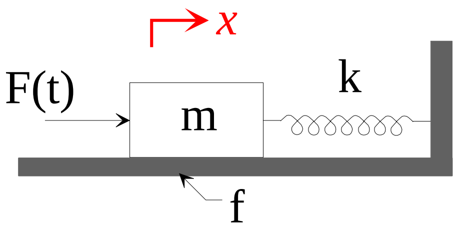


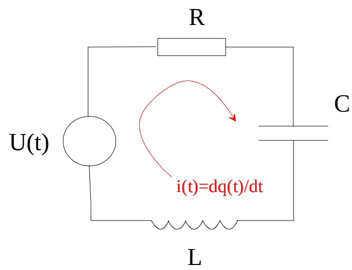
Proporcionalni sistem 2. reda

$$G_P(s)=\frac{K_s\omega_n^{\ 2}}{s^2+2\varsigma\omega_n s+\omega_n^{\ 2}}=\frac{K_s\omega_n^{\ 2}}{(s+\varsigma\omega_n\pm j\omega_d)}$$

$$\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\varsigma^2}$$

ω_n ... lastna frekvenca nedušenega sistema
ω_d ... lastna frekvenca dušenega sistema
ζ ... koeficient dušenja



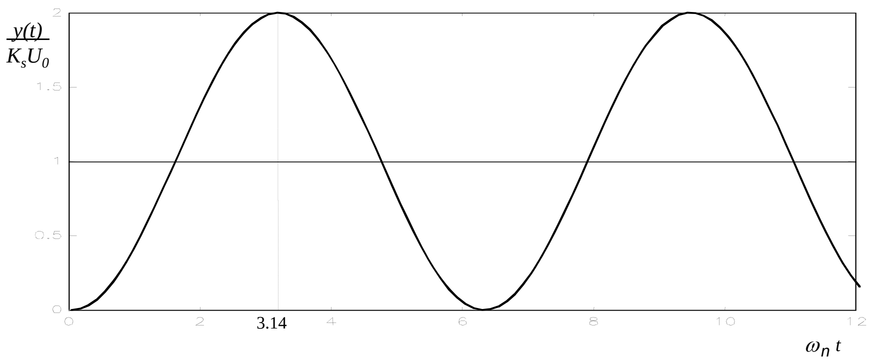


Odziv proporcionalnega sistema 2. reda na stopnico

$$u(t)=U_0\cdot 1(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ U_0 & t\geq 0\end{cases}$$

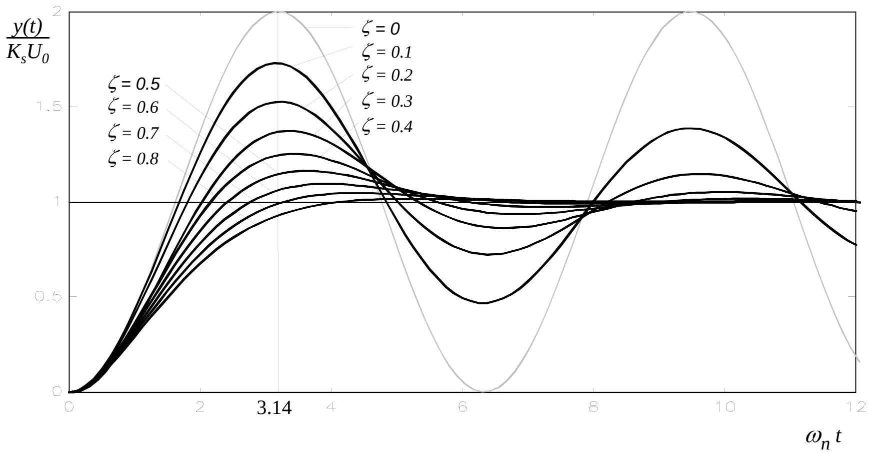
Oblika odziva je odvisna od koeficienta dušenja ζ

1. $\zeta = 0$: nedušen sistem (nedušeno nihanje)



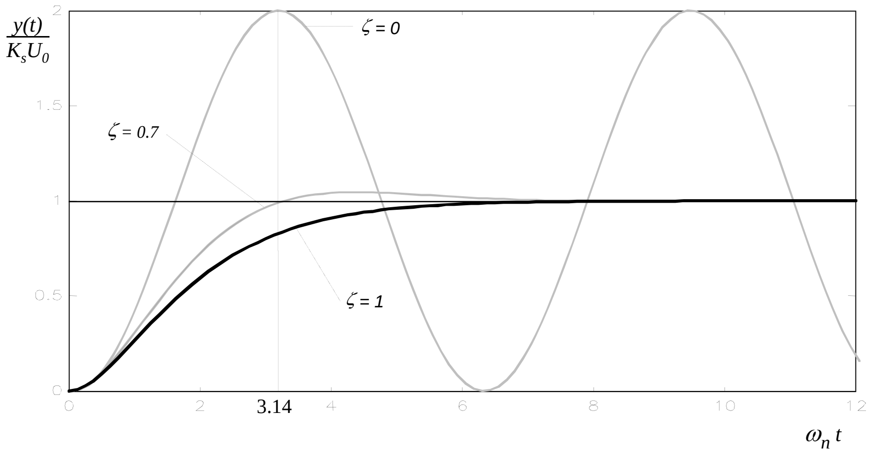
Odziv proporcionalnega sistema 2. reda na stopnico

2. $0 < \zeta < 1$: podkritično dušen sistem (dušeno nihanje)



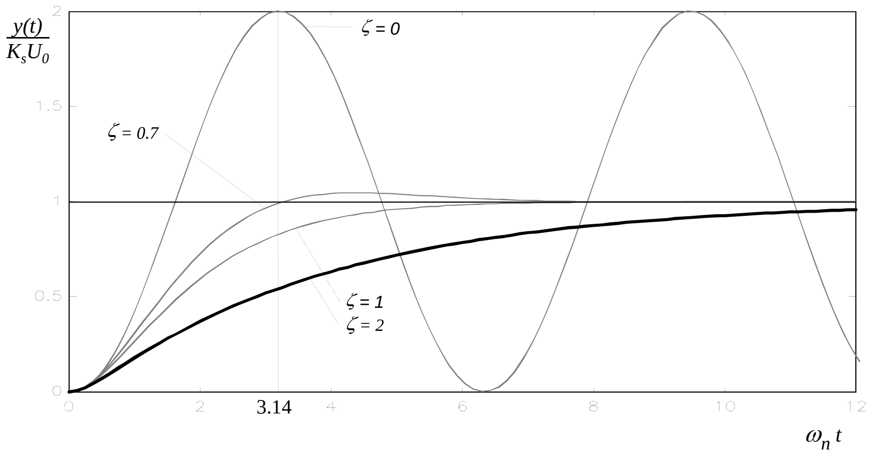
Odziv proporcionalnega sistema 2. reda na stopnico

3. $\zeta = 1$: kritično dušen sistem (meja aperiodičnosti)

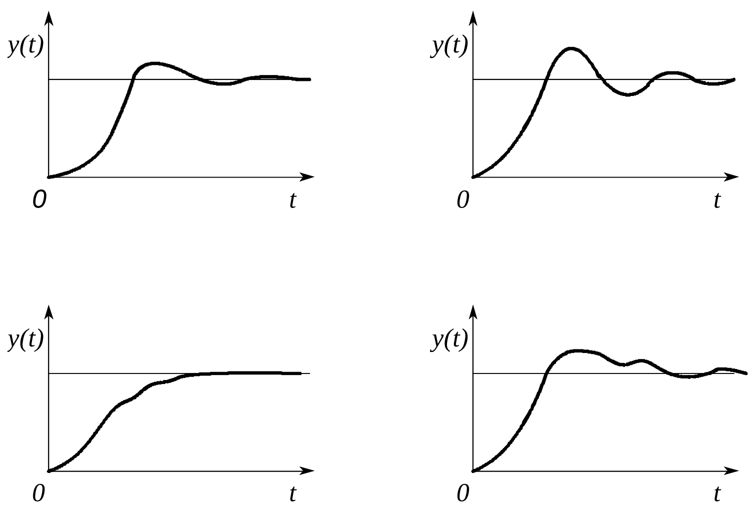


Odziv proporcionalnega sistema 2. reda na stopnico

4. $\zeta > 1$: nadkritično dušen sistem (aperiodični odziv)



Sistemi višjih redov



Integrirni sistemi

$$G_I(s) = \frac{1}{s^j}\frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_0}{s^f + a_{f-1}s^{f-1} + \cdots + a_0}$$

$b_0 \neq 0 \quad in \quad a_0 \neq 0$

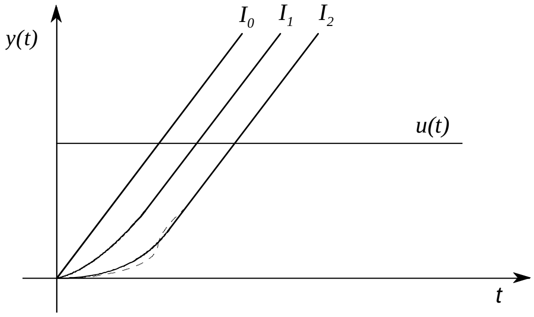
$n = j + f \quad \cdots \quad red\ sistema$

$j \quad \cdots \quad vrsta\ sistema$

$$G_0(s) = \frac{K_I}{s}$$

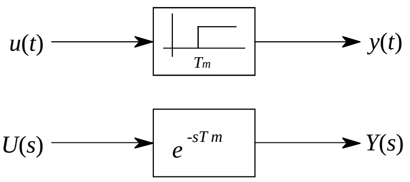
$$G_1(s) = \frac{K_I}{s(\tau_1 s + 1)}$$

$$G_2(s) = \frac{K_I}{s(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$



Sistemi z mrtvim (transportnim) časom

- So sistemi, pri katerih preteče določen čas, preden se pokaže vpliv vhodne veličine na izhodno



$$y(t) = u(t - T_m)$$

$$G(s) = e^{-sT_m} \qquad \text{(a)}$$